МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2021
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2021
Proceedings of the Fiftieth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2021

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ЕВРИСТИЧЕН ПОДХОД ПРИ ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В 6.–7. КЛАС

Цветелина Желязкова, Добринка Бойкина

В статията се представя методическа система от задачи за намиране дължини на отсечки и лица на фигури (триъгълници и четириъгълници), зададени чрез координатите на върховете си. Разработката е предназначена за СИП по математика за 6.–7. клас.

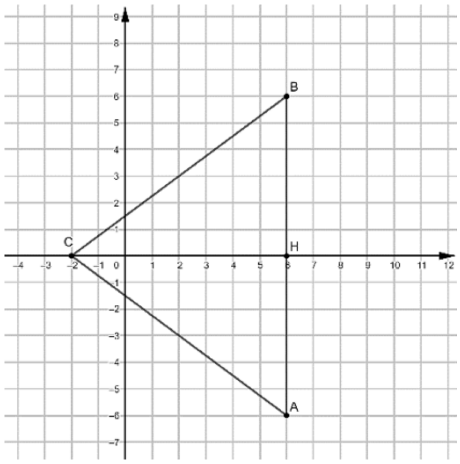
Настоящата разработка включва система от задачи, които са предназначени за избираемите учебни часове след изучаване на темите „Декартова координатна система“, „Лица на равнинни фигури“, „Питагорова теорема“. Част от представените задачи са подходящи както за шестокласници, така и за седмокласници, докато решенията на задачите, с които се извеждат формули за лица на фигури, зададени в координатна система, предполагат знания и умения за опериране с многочлени, изучавани в седми клас съгласно сега действащата учебна програма. Представена на шестокласници, системата може да претърпи промени според преценката на учителя, без това да наруши евристичната роля, която изпълнява. За седмокласниците е подходящо да се разглежда след изучаване на темата „Умножение на многочлен с многочлен“, като при това учениците самостоятелно биха могли да реализират решенията на всички задачи, представени в настоящата статия. Считаме, че преди разглеждането на представените по-долу задачи учениците са запознати със следните формули за намиране на дължина на отсечка в координатна система: Ако $A\,(x_A; y)$ и $B\,(x_B; y)$, то $|AB| = |x_B - x_A|$; Ако $C\,(x; y_C)$ и $D\,(x; y_D)$, то $|CD| = |y_D - y_C|$.

Предлагането на готовите формули може да спести време в краткосрочен план за конкретна урочна единица, но много по-трайни се оказват знанията, станали достояние след положени усилия от страна на ученика. Затова, използвайки конкретно-индуктивен подход, с подходящи примери, чрез правилно използвани евристични похвати, учителят може така да ръководи учебния процес, че учениците сами да достигнат до новото знание, до новия способ за решаване на задачи – целта на урока. При това е уместно да се има предвид следната мисъл на Д. Пойа: „Способ на решение, открит от самия ученик, и след успешното му приложение, става не само нов елемент в логическата структура на неговите дейности, но и ценно достояние на ученика.“ [2]. Тогава учениците не само ще използват съзнателно откритият от тях способ за решаване, но и ще се мотивират да търсят и откриват, както нови знания, така и решения на по-сложни и интересни за тях задачи.

След темата „Питагорова теорема“ в шести клас при изграждане на умения за решаване на основните задачи е целесъобразно да се разгледа въпросът за намиране на дължина на отсечка, която не е успоредна на координатните оси. В общия случай темата е предвидена за девети клас (когато учениците вече имат знания за ирационалните числа), но в случаите, при които квадратът на дължината на отсечката е число, което е точен квадрат, задачата успешно може да бъде решена и от ученици в шести и седми клас. Такава задача е следната.

Задача 1. В правоъгълна координатна система Oxy постройте точките: $A\,(6; -6)$, точка B – симетрична на A спрямо абсцисната ос и точка $C\,(x_C; y_C)$, за която е известно, че точка C лежи на оста Ox и x_C е по-малкото от числата, за които е изпълнено равенството $|x_C| = 2$. Намерете периметъра и лицето на триъгълник ABC.

Решение. Щом точка B е симетрична на точка A спрямо абсцисната ос, то $B(6; 6)$. От условието, че точка C лежи на оста Ox следва, че $y_C = 0$, а от равенството $|x_C| = 2$ следва, че $x_C = 2$ или $x_C = -2$, но по условие абсцисата на точка C е по-малката от двете възможни стойности, затова $C\,(-2; 0)$. Нека AB пресича оста Ox в точка H. Тогава нейните координати са $H(6; 0)$. Отсечката CH се явява височина в $\triangle ABC$. За намирането на нейната дължина, а също и на AB, се използва посочената формула.



Фиг. 1

$$|CH| = |x_H - x_c| = 8 \text{ м.ед;}$$

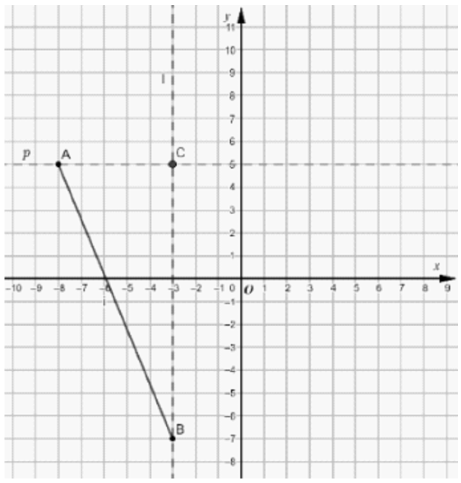
$$|AB| = |y_B - y_A| = 12 \text{ м.ед.}$$

Тогава $S_{ABC} = \dfrac{|AB|\,.\,|CH|}{2} = 48$ кв.м.ед.; $P_{ABC} = AB + BC + AC$. За да пресметнем обиколката на триъгълника, е необходимо да намерим дължините на страните AC и BC. Учениците трябва да съобразят, че $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ са правоъгълни, а AC и BC са техни хипотенузи. $AH = BH = 6$ м.ед. Използвайки теоремата на Питагор, намираме $AC^2 = AH^2 + HC^2 = 100 = 10^2$, т.е. $AC = 10$ м.ед. Аналогично се установява, че $BC = 10$ м.ед. Тогава за обиколката на $\triangle ABC$ се получава $P_{ABC} = 12 + 10 + 10 = 32$ м.ед.

Представената задача е подходяща за всички ученици от разглежданата възраст. Както се вижда, при решаването ѝ се използват знания и умения за построяване на точка, симетрична на дадена точка спрямо координатна ос, прилагане на понятието *абсолютна стойност* и определяне дължина на отсечка. Необходима е съобразителност – ученикът трябва да открие правоъгълен триъгълник, за който може да приложи Питагорова теорема и да установи дължината на хипотенузата, която пък е и страна на триъгълник ABC. В тази задача намирането на дължина на отсечка, краищата на която не са с равни абсциси или с равни ординати, е съставна част от решението на задачата. Тук чертежът „подсказва“ следващата стъпка, но досещането за нея зависи от различни фактори – наблюдателност, съобразителност, както и от знанията и опита, които учениците са придобили при решаване на задачите от темата „Питагорова теорема“. Удачно е след решаване на задачата, в етапа „Поглед назад“, да се направи анализиране на откритото решение и да се обърне внимание както на отделните стъпки от решението, така и на идеята за намиране на дължините на отсечките AC и BC.

Не толкова очевидно и лесно е откриването на решението на следващата задача с евристичен характер за ученици в шести и седми клас.

Задача 2. В правоъгълна координатна система с начало O са изобразени точките $A\,(-8;5)$ и $B\,(-3;-7)$. Намерете дължината на отсечката AB.

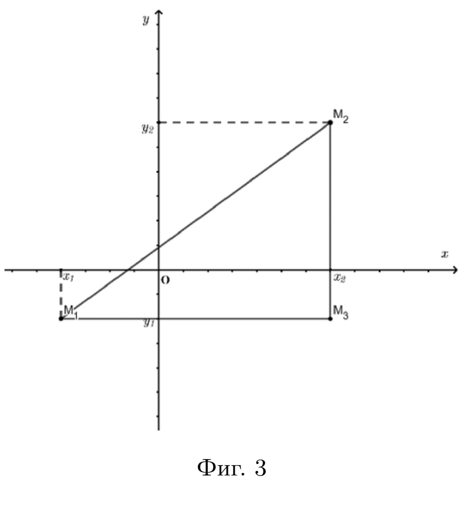


Фиг. 2

Откриването на решение на тази задача, която е предвидена за шестокласници, изисква досещане, че е целесъобразно да се намери правоъгълен триъгълник, за който AB да е хипотенуза, и да се пресметне дължината на отсечката. Това досещане може да се подготвя. То се базира, както на предишния личен опит, така и на умението на учителя да провокира и мотивира ученика за предстоящата дейност, да зададе точните въпроси, които да го насочат в правилна посока. Едно примерно решение е следното: Построяваме през точка B права l, успоредна на Oy, и през A – права p, успоредна на Ox. Двете прави се пресичат в точка $C\,(-3;5)$ – връх при правия ъгъл на триъгълника ABC. Отсечката AB е хипотенуза. $AC = 5$ м.ед. и $BC = 12$ м.ед. Като се приложи Питагорова теорема за $\triangle ABC$, се получава $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB^2 = 25+144 = 169$; $AB = 13$ м.ед.

На база на конкретни примери, използвайки знанията си за степенуване и абсолютна стойност, по-наблюдателните ученици биха могли да се ориентират и сами да открият за Задача 2, че е изпълнено равенството $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2$, понеже $x_C = x_B$ и $y_A = y_C$.

В етапа „Поглед назад“ е уместно да се анализира дейността, да се направят съответни изводи, след което да се докаже, че за произволни точки $M_1\,(x_1;y_1)$ и $M_2\,(x_2;y_2)$, е изпълнено равенството $M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.



Фиг. 3

За тази цел избираме точка M_3 такава, че $\triangle M_1M_2M_3$ да бъде правоъгълен с прав ъгъл при върха M_3, а отсечката M_1M_2 да бъде хипотенуза. Тогава точката M_3 ще има следните координати $M_3\,(x_2;y_1)$. Изразяваме дължините на катетите на правоъгълния $\triangle M_1M_2M_3$ по следния начин: $M_1M_3 = |x_2 - x_1|$ и $M_2M_3 = |y_2 - y_1|$. Като приложим Питагорова теорема за $\triangle M_1M_2M_3$, се получава $M_1M_2^2 = M_1M_3^2 + M_2M_3^2$; $M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Учениците трябва да се убедят, че изборът на точките $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ върху координатната система е без значение. Те могат да направят това, разглеждайки различни случаи за разположение на точките спрямо отделните квадранти.

Следващата задача има за цел приложение на доказаната формула.

Задача 3. В правоъгълна координатна система са изобразени точките $A(-10; -5)$, $B(-1; -5)$, $C(4; 7)$, $D(0; 10)$, $E(-8; 10)$, $F(-14; 2)$ и $G(-14; -2)$. Да се намери обиколката на седмоъгълника $ABCDEFG$.

Решение. $AB = 9$ м.ед.; $DE = 8$ м.ед.; $BC^2 = 25 + 144 = 169$; $BC = 13$ м.ед.; $CD^2 = 16+9 = 25$; $CD = 5$ м.ед; $EF^2 = 36+64 = 100$; $EF = 10$ м.ед.; $FG = 4$ м. ед.; $GA = 5$ м.ед. Тогава обиколката е $P = AB+BC+CD+DE+EF+FG+GA = 54$ м.ед.

Понеже задачи 1 и 2 са евристични по своя характер за учениците, то именно досещането, което е необходимо за решаването им, ги довежда до откриването на правилото, формулата, която може да се използва по-нататък за решаване на подобен тип задачи. По такъв начин, прилагайки евристичния подход, съчетан с конкретно-индуктивния, при обучението по математика за решаването на една първоначално евристична за учениците задача, самостоятелно откритото и добре усвоеното ново правило, нова формула се превръща в алгоритъм, който може да се прилага при решаването и на други задачи. Но, за да се превърне в лесно за приложение средство, е необходимо това ново правило, тази нова формула да се упражняват в различни ситуации. Затова в следващите редове ще насочим вниманието си към пресмятане на лице на триъгълник, зададен в координатна система.

Както видяхме в предишните задачи, по дадени координати на две точки в координатна система може да се изрази дължината на отсечката, чиито краища са тези точки. Знаейки това, сега да разгледаме въпроса: „Дали е възможно да приложим тази идея за намиране и на лицето на многоъгълник – да го пресметнем по зададени координати на върховете му?“ За целта е уместно да се започне с най-простия многоъгълник – триъгълника, като разгледаме примери, подходящи и за задължителните учебни часове, въз основа на които ще изведем формула за лицето му. За целта тръгваме от вече познатото и достъпно за учениците. Задачите трябва да са „свързани“ в логическа последователност на разсъжденията, като всяка следваща се намира в зоната на близкото развитие на познавателните възможности на учениците, за да достигнат постепенно и последователно до целта.

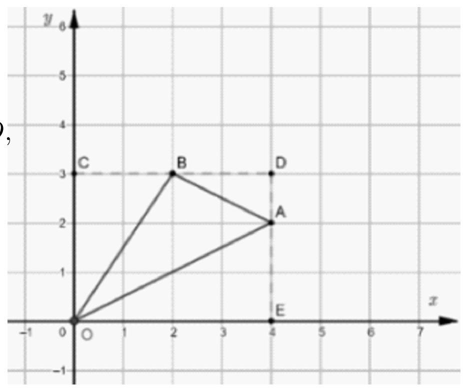
Задача 4. В правоъгълна координатна система с начало точка O са дадени точките $A(4; 2)$ и $B\ (2; 3)$. Да се намери лицето на триъгълник OAB.

Решение. „Опаковаме“ триъгълника ABO, като през върховете A и B построяваме прави, успоредни на координатните оси, и пресечните точки означаваме, както е показано на фиг. 4. Изразяваме лицето на триъгълника по следния начин:

$S_{OAB} = S_{OEDC} - (S_{OAE} + S_{ABD} + S_{OBC})$.

$OE = 4$ м.ед.; $OC = 3$ м.ед.;

$S_{OEDC} = OE.OC = 12$ кв.м.ед.;



Фиг. 4

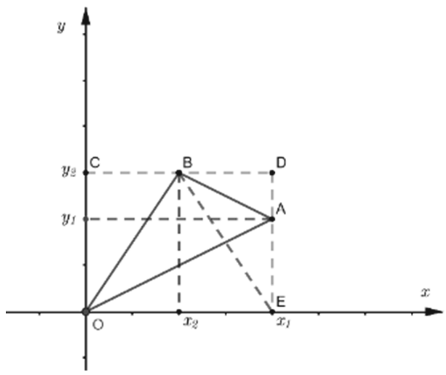
$|AE| = 2$ м.ед.; $BC = 2$ м.ед.; $BD = |x_D - x_B| = 2$ м.ед. $|AD| = |y_D - y_A| = 1$ м.ед.
$S_{OAE} = \dfrac{|OE|\,.\,|AE|}{2} = 4$ кв.м.ед.; $S_{OBC} = \dfrac{|OC|\,.\,|BC|}{2} = 3$ кв.м.ед.;
$S_{BDA} = \dfrac{|BD|\,.\,|DA|}{2} = 1$ кв.м.ед.; $S_{OAB} = 12 - (4 + 3 + 1) = 4$ кв.м.ед.

При решаването на задачата има значение досещането за начина на изразяване лицето на $\triangle ABO$, както и описаното му „опаковане". Опитът ни показва, че в повечето случаи, представената идея се възприема лесно от учениците, тъй като търсенето на лицето на $\triangle ABO$ се свежда до намиране на лицата на познати фигури – правоъгълник и правоъгълни триъгълници, поради което в следващите задачи тази идея се прилага без затруднения.

Сега да разгледаме общия случай.

Задача 5. В правоъгълна координатна система с начало точка O са дадени точките $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$. Да се намери S_{OAB}.

Решение. Без да нарушаваме общността на разсъжденията, можем да приемем, че $y_2 > y_1$ и $x_2 < x_1$ (фиг. 5). Изразяването на лицето на $\triangle OAB$ следва идеята от предната задача:
$S_{OAB} = S_{OEDC} - (S_{OAE} + S_{ABD} + S_{OBC})$;
$|OE| = |x_1|$; $|AE| = |y_1|$; $|DA| = |y_2 - y_1|$;
$|BD| = |x_1 - x_2|$; $|BC| = |x_2|$; $|CO| = |y_2|$.



Фиг. 5

Ще изразим лицата, както следва:
$S_{OEDC} = |OE|\,.\,|DE| = |x_1.y_2|$.

Разглеждат се различни случаи в зависимост от знаците на координатите на точките A и B.

Така, при $x_2 > 0$ и $y_1 > 0$ имаме:

$$S_{OAE} = \frac{|OE|\,.\,|AE|}{2} = \frac{1}{2}.\,|x_1.y_1| = \frac{1}{2}.x_1.y_1$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2}.\,|CO|\,.\,|BC| = \frac{1}{2}.\,|x_2.y_2| = \frac{1}{2}.x_2.y_2$$

$$S_{BDA} = \frac{1}{2}.\,|BD|\,.\,|DA| = \frac{1}{2}.\,|x_1 - x_2|\,.\,|y_2 - y_1| = \frac{1}{2}.\,(x_1 - x_2)\,(y_2 - y_1)$$

$$= \frac{1}{2}.\,(x_1.y_2 - x_2.y_2 - x_1.y_1 + x_2.y_1)$$

$$S_{OAB} = x_1.y_2 - \frac{1}{2}.\,(x_1.y_2 + x_2.y_1) = \frac{1}{2}\,(x_1.y_2 - x_2.y_1)\,.$$

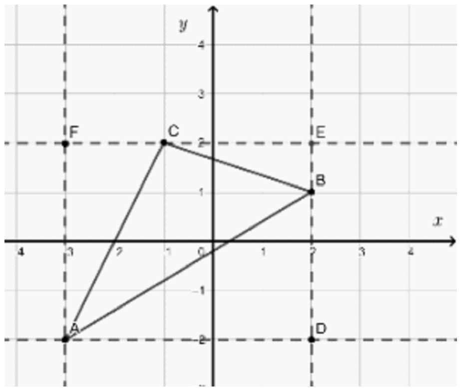
Останалите случаи са аналогични на разгледания.

Възможни са и други начини за изразяване лицето на триъгълника OAB чрез лицата на подходящи геометрични фигури. Поради ограничения обем на статията няма да се спираме подробно на тях. Всеки друг начин за решаване на задачата е от полза за ученика, обогатява опита му и развива математическото му мислене.

Формулата е лесна за запомняне и прилагане. На учениците в шести и седми клас е необходимо е да се обърне внимание, че е от значение в каква последователност се вземат координатите на върховете на триъгълника – обхождането е обратно на часовниковата стрелка. Ако това стане в посока на часовниковата стрелка, заествайки по формулата, за лицето на триъгълника ще получим отрицателна стойност. Учениците могат да проверят това с конкретни примери. За да избегнем този проблем, най-удобно е да представим формулата по следния начин: $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}\left|x_1.y_2 - x_2.y_1\right|$.

Следвайки логическата последователност на разсъжденията с цел обобщение, трябва да се разгледа и лицето на триъгълник, когато връх не съвпада с началото на координатната система. Изхождаме отново от конкретен пример от задължителните учебни часове. Такава е следната задача.

Задача 6. ([1], 46/351) В координатна система с мерна единица 1 cm са избрани точките $A\,(-3;-2)$; $B\,(2;1)$ и $C\,(-1;2)$. Намерете лицето на ΔABC.



Фиг. 6

Решение. Опаковаме триъгълника с правоъгълника $ADEF$. Тогава

$S_{ABC} = S_{ADEF} - (S_{ADB} + S_{BEC} + S_{ACF})$

$S_{ABC} = 5.4 - \left(\dfrac{5.3}{2} + \dfrac{1.3}{2} + \dfrac{2.4}{2}\right) = 20 - 13 = 7$ см^2.

Задача 7. В координатна система са избрани точките $A\,(x_1;y_1)$, $B\,(x_2;y_2)$ и $C\,(x_3;y_3)$. Да се изрази лицето на $\triangle ABC$ чрез посочените координати на върховете му.

Решение. Приемаме, че $x_1 < x_3 < x_2$ и $y_1 < y_2 < y_3$ (по аналогия с фиг. 6). Във всички останали случаи ходът на решението е аналогичен на представеното подолу. Изразяването на лицето на триъгълник ABC може да се направи по различни начини – да се спуснат перпендикуляри от върховете към координатните оси и то да се изрази чрез лицата на правоъгълни трапеци и правоъгълни триъгълници или чрез ограждане на триъгълника, което ще разгледаме по-долу. Така,

$$S_{ABC} = S_{ADEF} - (S_{ADB} + S_{BEC} + S_{ACF})\,.$$

$$S_{ADEF} = |AD|\,.\,|DE| = |x_2 - x_1|\,.\,|y_3 - y_1| = x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1$$

$$S_{ADB} = \frac{1}{2}.\,|AD|\,.\,|DB| = \frac{1}{2}.\,(x_2 - x_1)\,.\,(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}.\,(x_2.y_2 - x_2.y_1 - x_1.y_2 + x_1.y_1)$$

$$S_{BCE} = \frac{1}{2}.\,(y_3 - y_2)\,.\,(x_2 - x_3) = \frac{1}{2}.\,(y_3.x_2 - y_3.x_3 - y_2.x_2 + y_2.x_3)$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2}.\,(x_3 - x_1)\,.\,(y_3 - y_1) = \frac{1}{2}.\,(x_3.y_3 - x_3.y_1 - x_1.y_3 + x_1.y_1)$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2}.\,(x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1.y_2 + x_3.y_1 - y_2.x_3) \\ &= \frac{1}{2}.\,(x_1.y_2 + x_2y_3 + x_3.y_1 - (y_1x_2 + y_2.x_3 + y_3x_1)) \\ &= \frac{1}{2}.\,(x_1.\,(y_2 - y_3) + x_2.\,(y_3 - y_1) + x_3.\,(y_1 - y_2))\,. \end{aligned}$$

Както и в задача 5, обобщаваме:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right|.$$

В етапа „Поглед назад“ е добре да се обърне внимание на два частни случая – (1) когато една от страните на триъгълника е успоредна на една от осите и (2) когато две от страните са успоредни на координатните оси. Така например, за триъгълника с върхове $A_1\left(x_1; y_1\right)$; $A_2\left(x_2; y_1\right)$; $A_3(x_2;\ y_3)$ е изпълнено $A_1A_2||Ox$, а $A_2A_3||Oy$. Неговото лице е $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|x_1\left(y_1 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_2\left(y_1 - y_1\right)\right| = \frac{1}{2}\left|x_1\left(y_1 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right)\right|$, т.е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left(x_1 - x_2\right)\left(y_1 - y_3\right)\right|.$

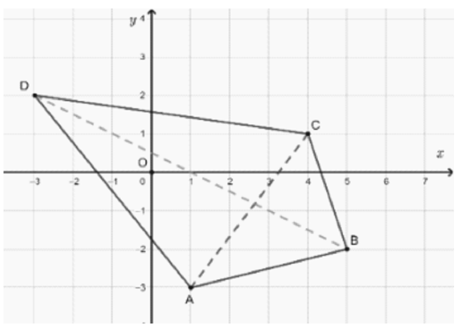
За триъгълника с върхове $A_1\left(x_1; y_1\right)$; $A_2\left(x_2; y_2\right)$ и $A_3\left(x_1; y_3\right)$ е в сила $A_1A_3||Oy$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_1\left(y_1 - y_2\right)\right| = \frac{1}{2}\left|x_1\left(y_1 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right)\right|$, т.е. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left(x_1 - x_2\right)\left(y_1 - y_3\right)\right|.$

Важно е учениците да не останат с грешното впечатление, че координатите на върховете на триъгълника са задължително положителни числа. За тази цел може да се разгледа задачата при конкретни условия за абсцисите и ординатите, което поради ограничения обем на статията, ще оставим за самостоятелна работа на читателя. Със следващата задача ще разгледаме и лицето на изпъкнал четириъгълник.

Задача 8. В координатна система са избрани точките $A\left(1; -3\right)$, $B\left(5; -2\right)$, $C\left(4; 1\right)$, $D\left(-3; 2\right)$. Намерете S_{ABCD}.

Решение. Един начин за решаване е чрез опаковане на фигурата. $S_{ABCD} = 22$ кв.м.ед.

Тук предлагаме друго решение, използващо изведените формули. Представяме лицето на четириъгълника като сбор от лицата на два триъгълника (построяваме един от диагоналите, например AC) (фиг. 7). Тогава е изпълнено



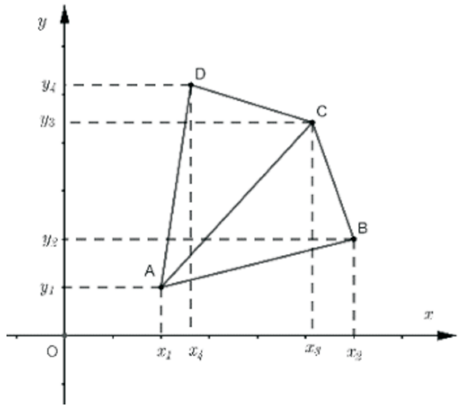
Фиг. 7

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.\left|x_A.\left(y_B - y_C\right) + x_B.\left(y_C - y_A\right) + x_C.\left(y_A - y_B\right)\right|,$$
$$= \frac{1}{2}.\left|1.\left(-2 - 1\right) + 5.\left(1 + 3\right) + 4.\left(-3 + 2\right)\right| = \frac{1}{2}.\left|-3 + 20 - 4\right| = \frac{13}{2} \text{ кв.м.ед.}$$
$$S_{ACD} = \frac{1}{2}.\left|x_A.\left(y_C - y_D\right) + x_C.\left(y_D - y_A\right) + x_D.\left(y_A - y_C\right)\right|,$$
$$= \frac{1}{2}.\left|1.\left(1 - 2\right) + 4.\left(2 + 3\right) - 3.\left(-3 - 1\right)\right| = \frac{1}{2}.\left|-1 + 20 + 12\right| = \frac{31}{2} \text{ кв.м.ед.}$$
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 22 \text{ кв.м.ед.}$$

Аналогично се разсъждава, ако се построи диагонала BD.

Задача 9. В правоъгълна координатна система са избрани точките $A\,(x_1; y_1)$, $B\,(x_2; y_2)$, $C\,(x_3; y_3)$ и $D(x_4; y_4)$ така, че четириъгълникът $ABCD$ да е изпъкнал. Да се изрази лицето на $ABCD$ чрез посочените координати на върховете му.



Фиг. 8

Ще разделим четириъгълника на триъгълници, което е познат за учениците начин за намиране лица на фигури още от пети клас, и ще приложим вече изведената погоре формула. Възможен е и друг начин, например да оградим четириъгълника и да представим лицето му чрез лицата на няколко геометрични фигури, както в предходните задачи.

Нека наредбата на координатите, съответстваща на фиг. 8, е $x_1 < x_4 < x_3 < x_2$ и $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$. При други възможни случаи решението протича аналогично.

И така, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$ (построяваме диагонала AC).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2))$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}(x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3))$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} = {} & \frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\ & + x_4(y_1 - y_3)) = \frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)). \end{aligned}$$

Обобщаваме: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\left|(x_1(y_2 - y_4) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_4 - y_2) + x_4\,(y_1 - y_3)\right|$.

Този резултат може да се запише и по следния начин:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) + (x_2 - x_4)\,(y_3 - y_1)\right|,$$

който по-лесно се запомня и изказва и словесно.

Идеята за разработване на предложената система от задачи възникна при запознаването ни със статията на С. Сефибеков [3].

В заключение ще посочим, че използвайки евристичен подход, чрез конкретната методическа система от предложените/разгледаните задачи, учителят може да ръководи учениците последователно по пътя на откритието на нов за тях метод за решаване на определени задачи и да им покаже как, открили веднъж алгоритъм, правило, формула, те могат да ги използват за бързо и лесно решаване и на по-сложни задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Борисов. Математически олимпиади и конкурси, Част 1. Добрич, ПМГ „Иван Вазов“, 1993.

[2] Д. Пойа. Математическото откритие: За разбирането, изучаването и обучаването в решаване на задачи. София, Народна просвета, 1968.
[3] С. Сефибеков. О площади многоугольника. *Квант*, бр. 4 (1981), 20–21.

Цветелина Желязкова
e-mail: tsvetelina.zhelyazkova@yahoo.com
Добринка Бойкина
e-mail: boikina@uni-plovdiv.bg
Факултет по математика и информатика
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
ул. Цар Асен № 24
4000 Пловдив, България

USING A HEURISTIC APPROACH IN MATHS EDUCATION IN 6.–7. GRADE

Tsvetelina Zhelyazkova, Dobrinka Boykina

A methodical system of problems for finding out lengths of segments and areas of figures (triangles and quadrilaterals), determined by the coordinates of their vertices is presented in the paper. The article is intended for the optional courses in mathematics in 6.–7. class.