МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2021
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2021
Proceedings of the Fiftieth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
2021

ИЗПОЛЗВАНЕ НА ФОРМАТА НА ВЕЙР ПРИ ЧИСЛЕНОТО ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ЖОРДАНОВАТА ФОРМА НА МАТРИЦА

Петко Петков, Михаил Константинов

В статията се прави кратък преглед на числените проблеми, възникващи при определяне на жордановата канонична форма на квадратна матрица. Оспорва се съществуващото мнение, че жордановата форма е неподходяща за числено определяне в аритметика с крайна точност. Разглеждат се методи за устойчиво определяне на жордановата структура на матрица, основани на получаването на каноничната форма на Вейр.

Жордановата канонична форма е мощен инструмент за решаване на редица задачи, които възникват в областта на теорията на матриците и матричните изчисления. В нея е кодирана цялата информация за алгебричната структура на разглежданото линейно преобразуване или съответната матрица [23, 7, 20]. С нейна помощ се решават важни теоретични задачи като анализа на устойчивостта на линейни стационарни системи, изчисляването на матрични функции и решаването на матрични уравнения. Жордановата форма има приложения в редица научни дисциплини като теория на колебанията, теория на електрическите вериги и теория на линейните системи за управление.

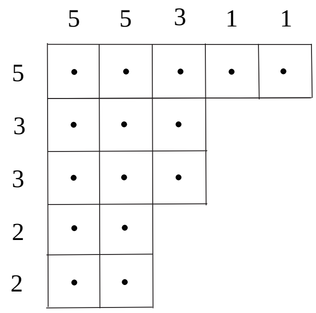
1. Кратки теоретични сведения. По-нататък ще използваме следните означения: $\mathbb{C}^{n\times n}$ – пространството на $n\times n$ матриците над $\mathbb{C}$; I_n (или само I) – единичната $(n\times n)$-матрица; $0_{p\times q}$ (или само 0) – нулевата $(p\times q)$-матрица; $\|A\|$ – спектралната норма на матрицата A.

Нека матрицата $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ има p различни собствени стойности $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$. Да означим с $s_{1k},s_{2k},\ldots,s_{jk}$ ненарастващата редица от размерностите на жордановите блокове в жордановата канонична форма на A, принадлежащи на собствената стойност λ_k. Списъкът

$$[(s_{11},s_{21},\ldots)(s_{12},s_{22},\ldots)\ldots(s_{1p},s_{2p},\ldots)]$$

се нарича *характеристика на Сегре* на матрицата A [7, с. 170], [25, с. 210]. Жордановата структура на A е напълно определена от характеристиката на Сегре.

Съществува една малко известна алтернатива на формата на Жордан – т.нар. *канонична форма на Вейр*. Тази форма е предложена от чешкия математик Едуард Вейр (1852-1903) през 1885 г. [21, 22] и може да се получи от жордановата форма чрез пермутационни преобразувания на подобие (както и обратното). Сведения за тази форма могат да се намерят в по-стари литературни източници като МакДъфи [12] и Търнбул и Айткен [19], но липсват в по-късните източници. Тази форма е „преоткрита“ едва през 1999 г. от американската математичка Х. Шапиро [17].



Фиг. 1. Диаграма на Ферерс

Нека λ_i има кратност w_i и нека

$$w_{i1},\ w_{i1}+w_{i2},\ \ldots,\ w_{i1}+w_{i2}+\cdots+w_{iq}=w_i$$

са дефектите (размерностите на нулевите подпространства) на последователните степени

$$A-\lambda_i I, (A-\lambda_i I)^2, \ldots, (A-\lambda_i I)^q,$$

съответно, където q е най-малкото цяло число, за което се получава максималният дефект w_i. Множеството от числата $w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{iq}$ се нарича *характеристика на Вейр на* A *по отношение на* λ_i [12, с. 73], [25, с. 210], [17].

Характеристиките на Сегре могат да се намерят еднозначно от характеристиките на Вейр, както и обратното, с помощта на следната теорема.

Теорема [19, стр. 80]. *Характеристиката на Вейр и характеристиката на Сегре на* A *по отношение на собствената стойност* λ_i *с кратност* w_i *са спрегнати разбивки на* w_i.

Получаването на спрегната разбивка се илюстрира с т.нар. *диаграма на Ферерс* (фиг. 1), в която s_{ki} е броят на точките в колоната k, а w_{ik} е броят на точките в реда k. Нека например характеристиката на Сегре за 15-кратна собствена стойност е $(5,5,3,1,1)$. Тогава от диаграмата на Ферерс намираме, че характеристиката на Вейр е $(5,3,3,2,2)$.

От тази диаграма следва, че за дадена собствена стойност λ_i, първият елемент на характеристиката на Вейр w_{i1} е равен на броя на жордановите блокове, съответстващи на тази собствена стойност. На свой ред, броят на елементите в характеристиката на Вейр е точно равен на първия елемент на характеристиката на Сегре s_{1i}, т.е., на реда на максималния жорданов блок.

Характеристиките на Вейр на матрицата A, подобно на характеристиката на Сегре, представляват пълно множество от структурни инварианти относно действието на подобие на групата на неособените матрици в пространството $\mathbb{C}^{n\times n}$ [12, с. 73].

Характеристиките на Вейр могат да се използват за дефиниране на канонична форма на матрица $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Нека за $r\geq s$ означим с $I_{r,s}=[I_s;0]$ матрицата с r реда и s колони, в която първите s реда формират матрицата I_s, а останалите $r-s$ реда са нулеви. Ако собствената стойност λ_i има характеристика на Вейр $(w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{iq})$, то на тази собствена стойност отговаря *блокът на Вейр* [7, с. 204]

$$W_i = \begin{bmatrix} \lambda_i I_{w_1} & I_{w_1,w_2} & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_i I_{w_2} & I_{w_2,w_3} & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i I_{w_{q-1}} & I_{w_{q-1},w_q} \\ 0 & & & & \lambda_i I_{w_q} \end{bmatrix}.$$

Наддиагоналните блокове $I_{w_j,w_{j+1}}$ имат пълен колонен ранг, $\mathrm{rank}(I_{w_j,w_{j+1}}) = w_{j+1}$. Директното изчисляване на степените на $W_i - \lambda_i I_{w_i}$ показва, че блокът W_i има характеристиката на Вейр $(w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iq})$.

Каноничната форма на Вейр е пряка сума на блокове на Вейр с различни собствени стойности.

2. Алгоритми на Кублановская, Кагщрьом и Руе. Пресмятането на жордановата канонична форма в крайна аритметика, например в двоична аритметика с плаваща точка [8], е една от най-сложните задачи на числената линейна алгебра. Това се дължи на факта, че определянето на кратността на собствените стойности в присъствието на грешки от закръгляне е свързано със сериозни трудности. Също така, определянето на размерностите на жордановите блокове, принадлежащи на дадена кратна собствена стойност (характеристиката на Сегре), е свързано с пресмятането на числения ранг на матрица, което е сериозно предизвикателство при работа в машинна аритметика с крайна точност.

В основата на най-добрите алгоритми за получаване на жордановата форма стои метод, предложен от съветската математичка Вера Кублановская (1920–2012) през 1966 г. В своята работа [24] Кублановская показва как с помощта на последователност от ортогонални преобразувания на подобие могат да се намерят размерностите на нулевите пространства на степените на матрицата $(A - \lambda_i I)^k$ (съответно характеристиките на Вейр), а оттам и размерностите на жордановите блокове, съответстващи на кратна собствена стойност. Алгоритъмът на Кублановская е в „суров вид“ от гледна точка на съвременните изисквания, но в него присъства идеята, която прави възможно създаването на ефективни алгоритми за получаване на канонични форми на матрици и матрични снопове.

Алгоритъмът на Кублановская прави силно впечатление на шведския математик Аксел Руе (1942–2015), който посещава Ленинградската академия на науките през 1969 г. и има редица разговори с Кублановская. Руе предлага много сериозни подобрения на първоначалния алгоритъм, като го прави подходящ за компютърно приложение [16]. Една от най-важните добавки, извършени от Руе, е групирането на кратните собствени стойности на матрицата, което се извършва с помощта на теоремата на Гершгорин [23, гл. XIV]. Това групиране е много съществено, тъй като от него зависи обусловеността на неособените преобразования, използвани при блокдиагонализацията на матрицата. В тази връзка Руе предлага за пръв път разместването на собствени стойности да се осъществява с помощта на числено устойчиви равнинни ротации.

Също така той предлага при определянето на размерностите на нулевите подпространства да се използва декомпозицията по сингулярни стойности, която е найсигурният инструмент за получаване на числения ранг на матрица. Руе въвежда понятието *числена кратна собствена стойност*, с което на свой ред може да се дефинира понятието *числена структура на матрица*. За разлика от теоретичната жорданова струкура, числената структура се определя с помощта на някакъв допуск, което я прави нечувствителна към малки промени („смущения“) в елементите на матрицата. Тази структура се нарича добре обусловена, ако тя остава непроменена при достатъчно големи смущения върху първоначалната матрица. В статията си Руе дава и горна граница върху числото на обусловеност на неособеното преобразование, което привежда първоначалната матрица в жорданова форма.

Алгоритъмът, предложен от Руе, не е посрещнат възторжено от американските и английските специалисти в областта на числената линейна алгебра. В своята работа [5] най-големите капацитети в областта на изчисляване на собствените структури по това време, Голъб и Уилкинсън, принизяват значението на този алгоритъм и предлагат друг числен алгоритъм, използващ т.нар. *верижни зависимости* между собствените и присъединените собствени вектори.

Както обаче показват по-късните изследвания на Кагщрьом, този алгоритъм дава значително по-лоши резултати в сравнение с алгоритъма, използващ неособени преобразования на подобие.

Окончателният вариант на алгоритъма за получаване на жордановата форма на матрица е разработен от Аксел Руе и неговия аспирант Бо Кагщрьом и е публикуван в [9]. Алгоритъмът е реализиран като програмата на Фортран JNF [10]. Независимо от доказаните качества на този алгоритъм той и до сега не е получил достатъчно разпространение в матричните изчисления. Така например, в широко използваната програмна система MATLAB® и досега не е включена функция за пресмятане на жордановата форма на матрица в общия случай. Включената там функция `jordan` е от програмната система Maple на MapleSoft (партньор на MathWorks, Inc), прилага символни изчисления и може да се използва само в ограничени случаи.

Вероятна причина за това е, че в програмата на Кагщрьом и Руе се използват допуски, които изискват известна настройка и това ограничава автоматичното („сляпо“) използване на алгоритъма. По същество, тези допуски играят ролята на регуляризационни параметри, с които се постига определянето на жорданова структура, водеща до най-добре обусловено преобразование на подобие. В този смисъл в алгоритъма на Кагщрьом и Руе има определен потенциал, който още не е използван напълно. Това би могло да стане вбъдеще при създаването на програмно осигуряване за научни изчисления, в което са включени елементи на изкуствен интелект.

Интересно е да се отбележи, че алгоритъмът на Кагщрьом и Руе, с който се намира директно формата на Вейр, не е цитиран в единствената книга [13], посветена на тази форма.

Програмата JNF бе включена в програмата система SYSLAB (разширение на първоначалния вариант на MATLAB®, разработено в Техническия университет-София) още през 1985 г. [27]. Обширните числени експерименти с програмата JNF показват, че тя обикновено намира жордановата форма с достатъчно голяма точност. Това е така, тъй като матриците, възникващи в практическите изчисления, обикновено имат добре обусловена числена структура. (Лошо обусловените жорданови структури принадлежат на много ограничено множество и поради това са малко вероятни).

Тази програма получава жордановата форма на седем стъпки и по избор на ползвателя могат да се изпълнят само част от тези стъпки. Това дава възможност при желание да се получат само формата на Шур, блок-диагоналната форма на матрицата или само размерностите на жордановите блокове. В редица случаи тази информация е напълно достатъчна и привеждането в жорданова форма не е необходимо. В последните години бе създаден вариант на алгоритъма JNF, който е реализиран под формата на M-файлове за MATLAB®, което облекчава много използването на алгоритъма.

Въпросът за определяне на жордановата форма има интересно развитие. Едва през 1999 г. бе констатирано [17], че алгоритъмът на Кублановская и алгоритъмът на Кагщрьом и Руе всъщност намират най-напред характеристиките на Вейр, т.е. размерностите на блоковете в каноничната форма на Вейр. По такъв начин алгоритъмът на Кагщрьом и Руе най-напред определя каноничната форма на Вейр и поради това избягва до голяма степен числените проблеми, свързани с намиране на жордановата форма.

3. Митове, свързани с формата на Жордан. Трудностите, свързани с определянето на жордановата форма, водят до създаването на мита, че тази форма не може да се определи сигурно по числен път поради високата чувствителност на кратните собствени стойности към смущения в първоначалната матрица. Стига се дотам, че даже се отрича възможността за използване на жордановата форма в изчислителната практика [15]. За съжаление, този мит фигурира в редица съвременни книги, написани от много сериозни изследователи, като например Голъб и Ван Лоан [4], Стюърт [18], Демел [3] и др. В тези книги се предлага вместо жордановата форма да се използва формата на Шур, която може да се получи по числено устойчив начин с помощта на унитарни (в частност ортогонални) преобразования на подобие [4].

Трябва обаче да се подчертае, че в редица изчислителни задачи, като например изчисляване на матричната експонента, използването на формата на Шур не е подходящо, тъй като води до силно усложняване на втората стъпка на алгоритъма, а именно – получаването на експонентата на триъгълна матрица. Разбира се, съществуват ефективни преки методи за пресмятане на матрична експонента (без използване на канонични форми) чрез подходящо мащабиране и използване на апроксимациите на Тейлър и на Падé, виж например [1] и [14, 26]. Също така, формата на Шур също е силно чувствителна при близки или кратни собствени стойности [11] – един факт, който не е много популярен. Освен това съществуват задачи, например определяне на чувствителността на собствените стойности [6], при които трябва да се познават размерностите на жордановите блокове, в които участват кратните собствени стойности. В такива случаи жордановата форма е незаменима.

Нека сега да резюмираме накратко митовете за жордановата форма. Най-често срещаните твърдения са, както следва.

- *Жордановата форма е силно чувствителна към смущения.* Това е вярно за теоретичната жорданова форма, но се избягва чрез дефинирането на числена жорданова форма, която в общия случай е нечувствителна към малки смущения в данните. Тук трябва да се добави, че и теоретичната форма на Шур може да е много чувствителна относно смущения в данните.
- *Жордановата форма не може да се получи по числено устойчив начин.* Това твърдение не се отнася за алгоритъма на Кагщрьом и Руе, в който размерностите на жордановите блокове се намират с помощта на ортогонални преобра-

зувания на подобие. Единствената стъпка в този алгоритъм, която може да е свързана с числени трудности, е седмата (последната), на която се намират наддиагоналните свързващи елементи на отделните блокове. Числените трудности на тази стъпка могат да се дължат на използването на лошо обусловени елементарни преобразования и те са неизбежни, ако жордановата форма е *лошо обусловена.* За щастие, това се случва рядко и може да се избегне чрез използване на добре обусловена жорданова структура, като се зададат подходящи допуски.

- *Жордановата форма може да се замени с формата на Шур.* Това твърдение не е вярно за някои задачи, при които трябва да се познават характеристиките на Сегре, например определянето на чувствителността на кратни собствени стойности.

В заключение е подходящо да завършим с авторитетното мнение на големия американски специалист в областта на матричните изчисления проф. Дж. Стюърт, който отбелязва, че „...като математически инструмент жордановата форма все още е полезна и съобщенията за нейната смърт са силно преувеличени“ [18, с. 22].

4. Числени примери.

Пример 1. Нека като илюстрация за работата на програмата JNF разгледаме определянето на жордановата структура на матрицата от 8-и ред

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & -5 & -11 & 14 & 33 \\ -2 & -10 & 0 & -3 & 9 & 10 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & 4 & -2 & -10 & -16 & 13 & 25 \\ 1 & -6 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 3 & 4 & -2 & -4 \\ 1 & -6 & 0 & -3 & 3 & 3 & 3 & 11 \\ 0 & 6 & -2 & 4 & -5 & -2 & -2 & -13 \\ -1 & -7 & 0 & -2 & 6 & 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Тази матрица има осемкратна собствена стойност, равна на 1, която участва в два жорданови блока – един с размерност 2 и един с размерност 6. Това прави собствената стойност на матрицата силно чувствителна към смущения.

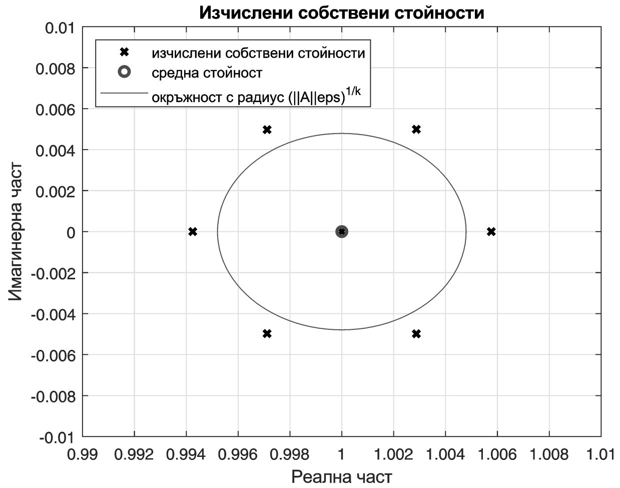
Ако собствените стойности на матрицата A се изчислят с програмната система MATLAB®, получаваме следния резултат

$$\begin{bmatrix} 1.002873209024355 + 0.004990147628609i \\ 1.002873209024355 - 0.004990147628609i \\ 1.005762145133220 + 0.000000000000000i \\ 0.997118955905148 + 0.004976576889708i \\ 0.997118955905148 - 0.004976576889708i \\ 0.994253525007774 + 0.000000000000000i \\ 0.999999999999996 + 0.000000041668050i \\ 0.999999999999996 - 0.000000041668050i \end{bmatrix}.$$

Изчислените собствени стойности са показани в комплексната равнина на фиг. 2. Окръжността, показана с непрекъсната линия, има радиус $(\|A\|\varepsilon)^{1/k}$, където

$$\varepsilon = 2^{-52} \simeq 2.2204 \times 10^{-16}$$

е машинният епсилон на двоичната аритметика с двойна точност [8] и $k = 6$ е



Фиг. 2. Грешки при изчисляване на собствените стойности с MATLAB®

размерността на по-големия жорданов блок. Този радиус характеризира чувствителността на кратните собствени стойности към смущения в елементите с порядък $\|A\|\varepsilon$. Вижда се, че първите 6 от собствените стойности се характеризират с големи грешки, тъй като те отговарят на жордановия блок с размерност 6. В резултат на грешките от закръгляне 6-кратната собствена стойност 1 се е трансформирала в 6 съществено различни от 1 изчислени собствени стойности. Двукратната собствена стойност 1 също се е превърнала в две различни собствени стойности (седмата и осмата), които обаче са значително по-близки до 1.

Матрицата от собствените и присъединените вектори е много лошо обусловена (в двоична аритметика с двойна точност), като нейното число на обусловеност е 7.5322×10^{12}.

Със съжаление може да се констатира, че MATLAB®, както и най-добрият пакет програми LAPACK [2], предназначен за матрични изчисления, не предлагат добра алтернатива в случая на кратни собствени стойности. Очевидно е, че в такъв случай изчислителната задача е *лошо поставена* и тя трябва да се регуляризира, като се открият размерностите на жордановите блокове и съответните собствени стойности се третират като кратни. Именно това се прави в програмата JNF, която за дадената матрица намира жордановата форма (наддиагоналните елементи са показани с точност до четвъртия знак след десетичната точка)

$$J = \left[\begin{array}{cc|cccccc}
1 & 5.2140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 2.7978 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2.1113 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.9194 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2.0780 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.9491 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Ще отбележим, че програмата JNF пресмята не класическата жорданова форма с единици и нули над главния диагонал, а матрица, в която ненулевите наддиагонални елементи могат и да са различни от 1, като например елемента 5.2140 в позиция (1,2) на матрицата J.

Размерностите на жордановите блокове са вярно определени, като диагоналните елементи са равни на 1 с точност до 15-ия знак след десетичната точка! Матрицата на преобразуванието в жорданова форма е добре обусловена, като нейното число на обусловеност е 1.0740×10^3.

Пример 2. Матрицата

$$B = \begin{bmatrix} -97969999 & 97000000 & -960299 \\ -98959699 & 97979901 & -970000 \\ -1010000 & 1000000 & -9899 \end{bmatrix}$$

има трикратна собствена стойност, равна на 1, която участва в един жорданов блок. Опитът да се пресметнат собствените стойности на матрицата B чрез програмата `eig` от MATLAB®дава катастрофален резултат, а именно

$$\begin{bmatrix} 2.501079062327850 \\ -0.490769261495183 \\ 0.989690182302353 \end{bmatrix}$$

Само третата собствена стойност е донякъде улучена, и то с относителна грешка 1%. Първата и втората собствени стойности са пресметнати с грешка 150%, а на втората е получен грешно и знакът.

Същевременно програмата JNF пресмята жордановата форма много точно като

$$\begin{bmatrix} 0.999999988 & 1.42126296 & 0 \\ 0 & 0.999999988 & 1421374.37 \\ 0 & 0 & 0.999999988 \end{bmatrix}.$$

Размерността на жордановия блок е определена точно, а собствените стойности са изчислени с относителна грешка 10^{-8}.

И в двата примера програмата `jordan` от MATLAB®дава вярната жорданова канонична форма. Използването на тази символна програма, обаче, е ограничено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Al-Mohy, N. Higham. A new scaling and squaring algorithm for the matrix exponential. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **31**, No 3 (2009), 970–987, doi: 10.1137/09074721X.

[2] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen. LAPACK Users' Guide, 3rd edition. Philadelphia, PA, SIAM, 1999, ISBN 0-89871-447-8.

[3] J.W. Demmel. Applied Numerical Linear Algebra. Philadelphia, PA, SIAM, 1997, ISBN 978-0-898713-89-3.

[4] G. H. Golub, C. F. Van Loan. Matrix Computations, 4th edition. Baltimore, MD, The John Hopkins University Press, 2013, ISBN 978-1-4214-0794-4.

[5] G. H. Golub, J. H. Wilkinson. Ill-conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form. *SIAM Review*, **18** (1976), 578–619, doi: 10.1137/1018113.

[6] P. Henrici. Bounds for iterates, inverses, spectral variation and fields of values for non-normal matrices. *Numerische Mathematik*, **4** (1962), 24–40, doi: 10.1007/BF01386294.

[7] R. A. Horn, C. R. Johnson. Matrix Analysis, 2nd edition. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2013, ISBN 978-0-521-83940-2.

[8] IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic 754-2019 (Revision of IEEE 754-2008), 2019, ISBN:978-1-5044-5924-2, doi: 10.1109/IEEESTD.2019.8766229.

[9] B. Kågström, A. Ruhe. An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **6** (1980), 398–419, doi: 10.1145/355900.355912.

[10] B. Kågström, A. Ruhe. Algorithm 560: JNF, an algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **6** (1980), 437–443, doi: 10.1145/355900.355917.

[11] M. Konstantinov, P. Petkov. Perturbation Methods in Matrix Analysis and Control. New York, Nova Science Publishers, 2020, ISBN 978-1-53617-470-0.

[12] C. C. Mac Duffee. The Theory of Matrices, New York, Chelsea, 1946, 1956, ASIN 0486495906.

[13] K. C. O'Meara, J. Clark, C. I. Vinsonhaler. Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form, Oxford, Oxford University Press, 2011, ISBN 978-0-19-979373-0.

[14] P. Petkov, N. Christov, M. Konstantinov. Computational Methods for Linear Control Systems. Hemel Hempstead, Prentice Hall, 1991, ISBN 0-13-161803-2.

[15] L. Reichel, L. N. Trefethen. Eigenvalues and pseudo-eigenvalues of Toeplitz matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **162–164** (1992), 153–185. doi: 10.1016/0024-3795(92)90374-J.

[16] A. Ruhe. An algorithm for numerical determination of the structure of a general matrix. *BIT*, **10** (1970), 196–216, doi: 10.1007/BF01936867.

[17] H. Shapiro. The Weyr characteristics. *The American Mathematical Monthly*, **106** (1999), 919–929, doi: 10.1080/00029890.1999.12005141.

[18] G. W. Stewart. Matrix Algorithms, volume II: Eigensystems. Philadelphia, PA, SIAM, 2001, ISBN 0-89871-503-2.

[19] H. W. Turnbull, A. C. Aitken. An Introduction to the Theory of Canonical Matrices. London, Blackie and Son, 1932.

[20] S. H. Weintraub. Jordan Canonical Form: Theory and Practice. Saint Louis, Morgan & Claypool Publishers, 2009, doi 10.2200/S00218ED1V01Y200908MAS006, ISBN 9781608452507.

[21] E. Weyr. Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces. *Comptes Rendus de L'Académie des Sciences*, Paris, **100** (1885), 966–969.

[22] E. Weyr. Zur Theorie der bilinearen Formen. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **1** (1890), 163–236, doi: 10.1007/BF01692475.

[23] Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц, 5 издание. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2010, ISBN 5-9221-0524-8.

[24] В. Н. Кублановская. Об одном способе решения полной проблемы собственных значений вырожденной матрицы, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **6** (1966), 611–620.

[25] А. Мальцев. Основы линейной алгебры, 4 издание. Москва, Наука, 2005, ISBN 5-02-033636-X.

[26] П. Петков, М. Константинов. Матрични изчисления (с примери от MATLAB). София, Фастумпринт, 2016, ISBN 978-619-722-316-3.

[27] П. Петков, Н. Христов, М. Константинов. Диалогова система SYSLAB за анализ и синтез на линейни многомерни системи. *Автоматика, изчислителна техника и автоматизирани системи*, **22** (1988), 25–31.

Петко Петков
Българска академия на науките
1040 София, България
e-mail: php@tu-sofia.bg

Михаил Константинов
Университет по архитектура,
строителство и геодезия
1046 София, България
e-mail: mmk_fte@uacg.bg

USING THE WEYR FORM IN THE NUMERICAL DETERMINATION OF THE JORDAN CANONICAL FORM OF A MATRIX

Petko Petkov, Mihail Konstantinov

The paper presents a brief survey of the numerical problems arising in the determination of the Jordan canonical form of a square matrix. The existed opinion that the Jordan form is not suitable for numerical determination in a finite precision arithmetic is disputed. Methods for stable determination of the Jordan structure of a matrix based on obtaining the Weyr canonical form are considered.