

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2022
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2022
*Proceedings of the Fifty First Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Tryavna, April 5–9, 2022*

**90-ГОДИШЕН ЮБИЛЕЙ
НА ПРОФЕСОР ПЕТЪР РУСЕВ**

Йорданка Панева-Коновска, Виржиния Кирякова, Йохан Давидов

Тази статия е посветена на 90-годишнината на известния български математик проф. д-мн Петър Русев, един от първите научни сътрудници на Института по математика и информатика при БАН, с кратко описание на научния му път, приносите му в комплексния анализ и изграждането на школа от негови последователи в тази изследователска област.



Проф. д.м.н. Петър Русев е роден на 28 август 1931 г. в гр. Шумен и това е хубав повод да отбележим неговия 90-и юбилей.

Той завършва (1953 г.) Физико-математическия факултет на Софийския университет и през 1957 г. получава докторска степен от Софийския университет за дисертацията *Върху разпределението на нулите на един клас цели функции, представени в интегрална форма* под ръководството на проф. Любомир Илиев.

Професионалната му кариера в Института по математика и информатика започва през 1958 г. като младши научен сътрудник, а през 1968 г. е хабилитиран като ст.н.с. II ст.

Научната степен *доктор на математическите науки* получава през 1979 г. в Българската академия на науките за дисертацията *Представяне на аналитичните функции чрез системи от полиноми и функции на Лагер и Ермит от втори род*.

Редовен професор е от 1983 г. в същия институт. Стипендиант е на фондация „Александър фон Хумболт“ в Гьотингенския университет (септември 1967 г. – юни 1968 г., септември 1968 г. – юни 1969 г.). Удостоен е със званието *Почетен професор на Института по математика и информатика* от 2002 г.

Основните научни интереси на проф. Русев са в следните области: класически ортогонални полиноми, холоморфни функции и представяния в редове, специални функции и интегрални трансформации, многомерен комплексен анализ.

Той е автор на повече от 100 научни статии, на много други публикации и на 3 научни монографии:

[M1] *Analytic Functions and Classical Orthogonal Polynomials*. Bulgarian Math. Monographs **3**, Publ. House of Bulg. Acad. of Sci., Sofia, 1984, 135 pp.

[M2] *Classical Orthogonal Polynomials and Their Associated Functions in Complex Domain*. Bulgarian Mathematical Monographs **10**, Prof. Marin Drinov Acad. Publ. House, 2005, 278 pp.

[M3] *An Invitation to Bessel Functions*. Prof. Marin Drinov Acad. Publ. House, 2016, 182 pp.

Проф. Русев е *научен ръководител* на 7 докторанти, както следва:

– *Иван Рамаданов* (проф., д-р, Univ. de Caen, France, *Dirigeur de Recherches*): „Някои проблеми на теорията на функцията на Бергман“ (1974);

– *Иванка Касандрова* (доц., д-р, Пловдивски университет): „Разпределение и асимптотични свойства на нулите на един клас цели функции“ (1977);

– *Йохан Давидов* (проф., д.м.н., ИМИ – БАН): „Холоморфни изображения и репрезентативни области“ (1977);

– *Валентин Христов* (доц., д-р, ИМИ – БАН): „Върху псевдометриците на Каратеодори и Кобаяши“ (1978);

– *Георги Бойчев* (проф., д-р, Тракийски университет в Ст. Загора): „Равномерна сходимост и сумируемост на редове на Якоби, Лагер и Ермит“ (1984);

– *Любомир Бояджиев* (проф., д.м.н., Технически университет – София, понастоящем в City Univ. of New York, USA): „Аналитични функции и редове на Лагер“ (1986);

– *Йорданка Панева-Коновска* (проф. д.м.н., ИМИ – БАН): „Базисност и пълнота на изброими системи от функции и полиноми на Бесел“ (1998).

В Института по математика и информатика (ИМИ) при Българската академия на науките, той е бил научен секретар (1964-1969), зам. директор (1971-1972), член на Научния съвет (1995–2007). Бил е и председател на Специализирания научен съвет по математика и механика при ВАК (1998–2004).

Проф. Русев е бил ръководител на 4 научни проекта (1989–2000) към Фонда за научни изследвания и по бюджетни теми в Института, организатор на поредица от международни математически конференции и съредатор на сборниците с доклади от такива конференции, а именно: II конгрес на българските математици (Варна,

1967 г., секретар), Международна конференция по конструктивна теория на функциите (Варна, 1970 г., зам.-председател), III конгрес на българските математици (Варна, 1972 г., зам.-председател), Международна конференция по комплексен анализ (Варна, 1981 г., член на Програмния комитет), Международен колоквиум по комплексен анализ и приложения (Златни пясъци, 1983 г., член на Програмния комитет), Международни уъркшоупи по трансформационни методи и специални функции (Transform Methods & Special Functions) – Банкя, 1994 г., Варна, 1996 г., Благоевград, 1999 г. (председател), Боровец, 2003 г. (Програмен комитет), Юбилейна сесия за 50-годишнината на ИМИ (1997 г., Организационна комисия); Международен симпозиум „Теория на геометричните функции и приложения“, 2010 г. (член на Организационния и на Програмния комитети) и др.

Проф. Русев е член е на Редколегията на престижното списание *“Fractional Calculus and Applied Analysis”*. Изпълнявал е основна роля като редактор и преводач на няколко тома, наскоро издадени от Българската академия на науките, с избрани трудове на други бележити български математици като Никола Обрешков, Любомир Чакалов, Любомир Илиев и др. Бил е и главен редактор и автор на разделите за специални функции, комплексен анализ и теория на функциите във Физико-математическа и техническа енциклопедия на БАН, 1990 г. и 2000 г. Бил е редактор и на няколко тома от сборниците трудове с доклади на Пролетни конференции на СМБ.

Рецензент за *Mathematical Reviews* и за математически списания като *“Serdica Bulg. Math. J.”*, *“Mathematica Balkanica”*, *“Revista Tecnica”* (Univ. del Zulia, Venezuela), *“Kuwait J. Sci & Eng.”*, *“Soochow J. of Math.”* (Taipei, Taiwan), *“J. Math. Anal. and Appl.”*, *“Bull. Belgian Math. Soc.”*, *“Ann. Polonici Mat.”* и др.

Бил е експерт за Националния научен фонд (сега ФНИ) и на Международната фондация „Св. св. Кирил и Методий“ по конкурси за стипендии на DAAD, изследователски проекти и др. Член е на Американското математическо дружество, Дружеството за дидактика по математика (Германия), Съюза на учените в България.

Проф. Русев е бил гост-професор в университетите в Трир и Гьотинген (Германия), в Международния математически Банахов център – Варшава (Полша). Изнасял е доклади по покана на много международни конференции (Германия, Франция, Полша, Румъния, Русия, Турция, Унгария, Сърбия) и др.

Преподавателската му дейност включва лекции за студенти по широк спектър от дисциплини (Комплексен анализ, Линейна алгебра и аналитична геометрия, Диференциални уравнения, Цели функции, Конформни изображения, Класически ортогонални полиноми, Функции на няколко променливи, Нули на полиноми), ръководство на семинари и др. в Софийския университет, Русенския университет, Пловдивския университет, Шуменския университет, ИМИ – БАН).

ОСНОВНИ НАПРАВЛЕНИЯ НА НАУЧНИТЕ ПРИНОСИ НА ПРОФ. П. РУСЕВ

Проф. Петър Русев има съществен принос в следните области, свързани с комплексния математически анализ и неговите приложения:

- специални функции и интегрални представяния;
- класически ортогонални полиноми;
- разпределения на нули на цели функции, дефинирани с помощта на трансформации на Фурие;
- Функция на Бергман.

1. Разпределение на нулите на целите функции, дефинирани чрез трансформацията на Фурие. Тази тематика, смятана за възникнала от унгарския математик Д. Поля, става традиционна в българската математика след поредица от публикации на акад. Любомир Чакалов (За един клас цели функции, *Списание на БАН* **36** (1927), 51–92) и на акад. Никола Обрешков (Върху нулите на полиноми и някои цели функции, *Годишник на Софийския университет, Физ. мат. факултет*), **37** (1941/42), 1–115). Техни наследници в това направление в България са: акад. Любомир Илиев, проф. Евтим Божоров, доц. Кирил Дочев, доц. Димитър Димитров, и др.

Резултатите на проф. Петър Русев в тази област са включени в неговата докторска дисертация (1957 г.) и в част от публикациите му. Най-съществените му приноси са:

- Обобщение на модификацията на теоремата на Шур (I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, *J. Reine Angew. Math.* **147** (1917), 205–232), предложена от Л. Илиев в неговата докторска дисертация *Върху нулите на някои класове полиноми и цели функции* (София, 1940). Проф. Русев има принос към разпределението на нулите на цели функции от вида

$$U(f; z) = \int_0^1 f(t) \cos zt \, dt, \quad V(f; z) = \int_0^1 f(t) \sin zt \, dt.$$

Получените от него резултати са свързани с:

- Характеризиране на асимптотичното поведение на нулите на класовете от цели функции от експоненциален тип, ограничени върху реалната ос и имащи само реални нули;
- Прецизиране на разпределението на нулите на цялата функция

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t^{2q}) \cos zt \, dt, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Както е добре известно, цялата функция Φ има само реални нули (G. Pólya, Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen, *J. Reine Angew. Math.* **158** (1027), 6–18);

- Достатъчни условия за „симетрията“ на функцията f в интегралите $U(f; z)$ и $V(f; z)$ спрямо точката $1/2$ и нулите на полиномите $\sum_{k=0}^{n-1} f(k/2n - 1) z^k$, така че функциите $U(f; z)$ и $V(f; z)$ да имат само реални нули, безкрайно много от които са общи.

2. Функция на Бергман. Интересът на Русев към тази тематика се заражда по време на 8-месечната му специализация в Московския държавен университет през

1964. По-специално, вниманието му е привлечено от връзката между аналитичните изображения (не непременно еднозначни) с еднозначни якобиани на области в пространството \mathbb{C}^n , които не намаляват обема, и функцията на Бергман от такива области.

Неговите резултати са свързани с:

- Аналитични характеристики на ограничени полицилиндрични области в \mathbb{C}^n ;
- Линейност на бихоломорфните изображения, запазващи обема на полицилиндричните области в \mathbb{C}^n .

3. Класически ортогонални полиноми. Интересът на проф. Русев към тази област се ражда от участието му в семинара на акад. Никола Обрешков, и най-вече, под влиянието на неговата публикация: Н. Обрешков, Върху някои ортогонални полиноми в комплексната равнина, *Известия на Института по математика на БАН* **2**, No 1 (1956), 45–67. В резултат на това през 1963 г. се появява първата публикация на Русев на тази тема.

Съществена роля за запазване и задълбочаване на интересите на проф. Русев в тази област са изиграли резултатите на Хил за представяне на холоморфни функции чрез редове по полиномите на Ермит (E. Hille, (i) Contributions to the theory of Hermitian series, *Duke Math. J.* **5** (1939), 875–936; (ii) The representation problem, *Trans. A.M.S.* **47** (1940), 80–94) и резултатите на Полард за представяне на такива функции чрез редове по полиноми на Лагер (H. Pollard, Representation of analytic functions by a Laguerre series, *Ann. Math.* **92**, 48 (1947), 358–363).

Друг стимул е неговото неудовлетворение, че в класическата монография на Сегьо, *Orthogonal Polynomials* (AMS Colloq. Publ., 23, 1939, 4th Ed.: 1974) не е обърнато достатъчно внимание на изясняване на характера на сходимостта на редовете по полиномите на Лагер и Ермит, както и на ролята и значението на асоциираните функции (наричани още *функции от втори род*) на класическите ортогонални полиноми и особено на полиномите на Лагер и Ермит.

По този начин се формира непрекъснатият интерес на Русев към проблеми, свързани с представяне на холоморфни функции чрез редове по класически ортогонални полиноми и асоциираните им функции. Дългогодишните му усилия в тази област дават многобройни резултати, поместени в неговата докторска дисертация (д.м.н., 1979), в двете му монографии [M1] (1984) и [M2] (2005) и в голяма част от неговите статии. Най-съществените приноси в тази посока са:

- Ортогоналност на полиномите на Якоби в комплексната равнина при най-общи предположения за техните параметри. Резултатът на Русев е повторен по-късно от други автори (например: A.M. Krall, On complex orthogonality of Legendre and Jacobi polynomials, *Mathematica (Cluj)*, **25** (1980), 59–65);
- Неравенство за полиномите на Лагер и локална равномерна сходимост на редове по тях в областта им на сходимост;
- Неравенства за асоциираните функции (функции от втори род) на Лагер и Ермит и изясняване на характера на сходимост на редовете по тях;
- Автоморфизми чрез оператори за дробно смятане от типа на Риман-Лиувил (дробни интеграли на Ердей-Кобер) в пространствата от холоморфни функции, допускащи представяния чрез ред по полиноми на Ермит и приложение на тези оператори към задачата за представяне на холоморфни функции чрез ред по полиномите

на Лагер при най-общи условия за параметрите;

- Характеризиране на пространствата на холоморфни функции, представени чрез ред по полиномите на Лагер и Ермит и асоциираните им функции посредством класическите интегрални трансформации на Лаплас, Фурие, Ханкел и Майер;
- Сходимост и сумируемост по Чезаро на редове по полиномите на Якоби, Лагер и Ермит по границата на тяхната област на сходимост. Аналогия с класическите резултати за сходимост и $(C, 1)$ -сумируемост на тригонометричните редове на Фурие;
- Аналози на класическите резултати на Островски и Адамар за свръхсходимост и аналитична непродължимост на степенен ред за редове по полиномите на Лагер и Ермит;
- Теорема от Тауберов тип за сумируемост на редове по полиномите на Лагер;
- Теорема от типа Фату и Абел за редовете на Лагер и Ермит. Установена е аналогия с добре известните резултати за степенните редове.

Към тези споменати приноси може да се добави и модификацията на Русев на резултата на Сегьо за аналитична непродължимост на степенен ред, чиито коефициенти приемат краен брой различни стойности (G. Szegö, *Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten*, *Sitzber. preuss. Akad. Wiss.* 1922, 88–91) върху редове по по-обща системи от ортогонални полиноми, както и резултатите на Русев за холоморфното продължение на измерими функции и на локално-Хьолдерови функции.

Всички тези резултати са включени във втората монография на Русев [M2] (2005), която е разширено и преработено издание на първата [M1] (1984).

В заключение да отбележим, че благодарение на споменатите по-горе приноси на Русев, теорията на класическите ортогонални полиноми в комплексна област получава своя завършен вид и пълнота, съпоставими със същата теория в реална област.

4. Специални функции и интегрални представяния. Както е добре известно, класическите ортогонални полиноми на Якоби, Лагер и Ермит и асоциираните им функции са, накратко казано, „дискретни“ аналози на функциите на Гаус, Кумер, Трикоми и Вебер-Ермит. Това е основната мотивация за интереса на Русев към класическите специални функции, наричани още „висши трансцендентни функции“ във фундаменталния тритомник по записките на Х. Бейтман под редакцията на А. Ердей и др. (A. Erdélyi et al. (Eds.), *Higher Transcendental Functions*, Vols. I, II, III; McGraw Hill, 1953).

Асимптотиката на класическите ортогонални полиноми е обект на дългогодишни изследвания и усилия на много изтъкнати експерти. В частност, трябва да се споменат имената на Дарбу, Перон и Сегьо за установяване на асимптотични формули за полиномите на Якоби, Лагер и Ермит. За разлика от асоциираните функции на полиномите на Якоби, асимптотиката на асоциираните функции на Лагер и Ермит почти не е изследвана. Този факт, както и „съмнението“ в доказателството на Теорема 8.22.7, стр. 219 в монографията на Сегьо, става мотивация за проф. Русев да насочи вниманието си към асимптотиката на класическите ортогонални полиноми и асоциираните с тях функции, в комплексна област.

Друг стимул е желанието му да избегне използването на известната асимптотична формула на Перон за функциите на Лагер, получена като следствие от ре-

зултатите за изродените хипергеометрични функции (O. Perron, Über das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines, *J. Reine Angew. Math.* **151** (1921), 63–78), както и тези за функциите на Трикоми в споменатата трилогия (Бейтман-Ердей), дадени като следствия от асимптотичните разложения относно параметъра на решенията на диференциални уравнения. Така се появяват статиите на Русев за асимптотиката на функциите на Вебер-Ермит и Трикоми, в които основните приноси могат да бъдат обобщени, както следва:

- Асимптотично представяне на функциите на Вебер-Ермит като следствие от тяхното интегрално представяне, което обобщава формулата на Чери и дава точни асимптотични формули за полиномите на Ермит. Споменатата формула е дадена в том II на Бейтман-Ердей, с препратка към публикацията на Т.М. Cherry (Expansions in terms of parabolic cylinder functions, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **8** (1949), 50–65). В тази статия обаче липсва доказателство за валидността на интегралното представяне, на което се основава използваният метод на седловинната точка;

- Точни асимптотични формули от типа на Перон за полиномите на Лагер, базирани на тези за полиномите на Ермит;

- Асимптотична формула за функциите, асоциирани с функциите на Трикоми въз основа на тяхното интегрално представяне.

Полиномите на Лагер и Ермит и техните асоциирани са изброими системи от функции на Кумер, Трикоми и Вебер-Ермит. Това е естествената мотивация за Русев да въведе и изучава интегрални представяния на холоморфни функции, включващи тези специални функции. Основната му цел е да установи „непрекъснати“ аналози на резултатите за представяне на холоморфни функции чрез редове по полиноми и асоциирани функции на Лагер и Ермит. Неговите публикации съдържат следните по-съществени постижения:

- „Равномерни“ асимптотики на функциите на Кумер и Трикоми;
- Неравенства за функциите на Кумер и Трикоми;
- Аналози на лемата на Абел и формулата на Коши-Адамар за несобствени интегрални, включващи функциите на Кумер и Трикоми;
- Характеризиране на пространствата от холоморфни функции, допускащи интегрални представяния чрез функциите на Кумер, Трикоми и Вебер-Ермит като образи при класическите интегрални трансформации на Ханкел, Майер и Фурие на подходящи класове от цели функции;
- Единственост на интегралните представяния с помощта на функциите на Кумер, Трикоми и Вебер-Ермит.

Интересът на проф. Русев към пълнотата на изброими системи от специални функции в различни функционални пространства възниква след запознаването му с публикациите на Yu.A. Kaz'min (On subsequences of Hermite and Laguerre polynomials, *Vestnik Moscow Univ., I – Math. & Mech.* **2** (1960), 6–9) и A.F. Leont'ev (On completeness of some systems of polynomials in domains of the complex plane, *Dokl. Acad. USSR* **126** (1959), 939–942), а също и поради влиянието на резултатите от книгата на Сегьо (Теорема 5.7.1) върху пълнотата на системите на функциите на Лагер и Ермит в пространства от функции със сумируем квадрат. Многобройните му публикации по тази тема съдържат следните най-важни резултати:

- Теорема от типа на теоремата на Мюнтц за пълнота в L^2 -пространства на

изброими системи от функции на Трикоми;

– Пълнота на изброими системи, асоциирани с функциите на Кумер и Вебер-Ермит в L^2 -пространства;

– Пълнота на изброими системи от функции на Кумер и Вебер-Ермит в пространства на холоморфни функции.

Към горното могат да се добавят и резултатите на Русев за пълнота на изброими системи от хипергеометричните функции на Гаус, функциите на Трикоми и асоциираните с тях функции на Ермит в пространства от холоморфни функции.

Монографията [МЗ] съдържа есенция от класическите знания за функциите на Бесел и сродните им и свързаните с тях интегрални трансформации. Наред с умело представения по популярен начин материал за едни от най-известните и най-често използвани специални функции, в нея Русев предлага и свои приноси, като:

– прецизиране на асимптотични оценки за „втората“ и за модифицираните функции на Бесел;

– необходимо и достатъчно условие за представимост на холоморфна функция в ред на Шльомилх; – замяна на обичайното условие на Дирихле-Жордан за сходимост на редовете на Фурие-Бесел и Дини в L_1 с условието на Дини; и др.

Повече подробности за биографията и *списъци с публикации* на проф. Петър Русев са дадени в някои юбилейни редакционни бележки:

– „70th Anniversary of Professor Peter Rusev“, *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. 4, No 3 (2001), 409–416;

– „On some of Professor Peter Rusev’s contributions“, *Mathematica Balkanica N.S.*, Vol. 26, Fasc. 1-2 (2012), 1–14 (<http://hdl.handle.net/10525/2633>);

– „80th Anniversary of Prof. Peter Rusev, Editor in FCAA“, *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. 14, No 4 (2011), 496–504

(<https://www.degruyter.com/document/doi/10.2478/s13540-011-0030-8/html>);

– както и на сайта на Музея на математиката и информатиката в България, http://mmib.math.bas.bg/?page_id=13267.

За своята изследователска, научна, организационна и преподавателска дейност проф. Петър Русев е награждаван с: медал „Кирил и Методий“ (1974, 1984); юбилеен медал „1300 години България“ (1981); юбилеен медал „Марин Дринов“ – по случай 100 години Българска академия на науките (1969); юбилейни медали „10 години Шуменски университет“ (1981) и „25 години Шуменски университет“ (1996); медал за принос към ИМИ по случай 60-годишнината на ИМИ (2007). През 2002 г. са му присъдени званието „доктор хонорис кауза“ на Шуменския университет, и статут на Почетен професор в Института по математика и информатика при БАН.

Нека да поднесем на проф. Русев и неговото семейство нашите поздравления и най-добри пожелания по случай неговата 90-годишнина. Благодарим ти, Учителю!

Йорданка Панева-Коновска
e-mail: jpanevakonovska@gmail.com
Виржиния Кирякова
e-mail: virginia@diogenes.bg
Йохан Давидов
e-mail: jtd@math.bas.bg
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България

NINETIETH ANNIVERSARY OF PROFESSOR PETER RUSEV

Jordanka Paneva-Konovska, Virginia Kiryakova, Johann Davidov

This article is dedicated to the 90th anniversary of the distinguished Bulgarian mathematician Professor D.Sc. Peter Rusev who is one of the first Fellows of the Institute of Mathematics and Informatics at the Bulgarian Academy of Sciences. The article is a short description of Professor Rusev's scientific development and is written to honor his contributions to complex analysis as well as his influence on establishing a school of followers in this field of research.