МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2023
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2023
Proceedings of the Fifty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 10–14, 2023

ДИДАКТИЧЕСКИ МОДЕЛИ ЗА ВЪВЕЖДАНЕ НА ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ ОТ КОМБИНАТОРИКАТА

Десислава Георгиева

Предложени са две методически разработки на уводни теми от комбинаториката за общообразователна подготовка в училищния курс по математика. Демонстрира се въвеждане на понятията събиране и умножение на вероятности, пермутация, вариация и комбинация. Акцентира се на подпомогнато, осъзнато, индуктивно достигане до изводи и формули.

Въведение. Опитът на изследователите [5] показва, че темата *Комбинаторика* затруднява голяма част от обучаемите в средното училище. В предложените модели се преодоляват методически проблеми на преподаването на тази тема. Акцентира се на основните дидактически принципи при въвеждане на първичните понятия от комбинаториката и на различни групи методи (познавателни, учебни, интерактивни), които осигуряват достъпност и разбиране на сложните понятия от всички ученици.

Методическа разработка за въвеждане на понятията *събиране* и *умножение на вероятности.* С пропедевтична цел още в трети, четвърти и пети клас може да се решава подобна на следната последователност от логически задачи – тип *изброяване* [4, с. 111], като се обучават учениците да изписват структурирано всички възможни варианти на решение:

Задача 1. Намерете броя на всички трицифрени числа, които се записват с цифрите 3, 4, 5, като всяка от тях се използва само веднъж.

Задача 2. Намерете броя на всички трицифрени числа, които се записват с цифрите 0, 4, 5, като всяка от тях се използва само веднъж.

Задача 3. Намерете броя на всички трицифрени числа, които се записват с цифрите 3, 4, 5, 6, като всяка от тях се използва само веднъж.

Задача 4. Намерете броя на всички трицифрени числа, които се записват с цифрите 0, 3, 4, 5, като всяка от тях се използва само веднъж.

С първата задача се извършва пропедевтика на понятието *пермутация без повторение.* Втората задача също е за пермутация на 3 елемента, но се изключват част от пермутациите, които започват с нула. С нея се осъществява пропедевтика на умножение на възможности. Третата е подобна на първата, а четвъртата – на

2020 Mathematics Subject Classification: 05-01.
Ключови думи: модели за обучение, събиране на възможности, умножение на възможности, пермутация, вариация, комбинация, съединения с повторения и без повторения.

втората задача, като чрез тях се усвояват и усъвършенстват уменията за подредено изписване на всички пермутации. Учителят е добре да организира сравнение на решенията и колективно извеждане от децата на следните изводи: „Когато поставим някакво изискване/ условие за някоя от цифрите в записа на числото се получават по-малко на брой числа.“ и “Броят на трицифрените числа от трета задача е четири пъти по-голям от броя на трицифрените от първа задача.“ Подходящо е, без да се изписват, да се направят разсъждения колко четирицифрени и петцифрени числа могат да се запишат съответно с четири и пет различни от нула цифри.

След като бъдат актуализирани тези знания, в 6. клас може да се предложи следната задача:

Задача 5. Намерете броя на всички трицифрени естествени числа, които се записват с цифрите 3, 4, 5, 6, 7, като всяка от тях се използва само веднъж в записа на числото [3].

Методически модел за решаване на задача 5. Първо се показва използване на правилото за *събиране на възможности*. Предварително на слайд или на табло учителят построява дърво с всички възможности (*граф-дърво*). Ако то е изобразено в компютърна презентация, добре е да бъде зададена анимация и последователно да се появяват отделните клонове и листа на дървото. След *събиране* на последните разклонения на дървото се получава, че търсените числа са 60 на брой [3].

Обучаващият може да предложи и втори вариант за решаване – да бъде построен **само един** от петте клона и да се проведат логически разсъждения, стимулиращи рационалност в мисленето и действията. Едва след това е добре да се демонстрира използване на правилото за *умножение на възможности* [3]. Учителят обяснява: „Нека търсеното число има запис $\overline{abc}$, където a, b и c са цифри измежду 3, 4, 5, 6, 7.“ Обяснява, че чертата над буквите означава, че това е записът на едно трицифрено число. Без черта може да се достигне до заблуда, че това е произведението на три параметъра. Необходимо е да се провежда обучаваща беседа по методиката на Д. Пойа. Мисленето на обучаваните се ръководи и насочва, като се активизират дейности от *зоната на близкото им развитие*, определена от Л. Виготски.

Въпросите в аналитико-обучаващата беседа се подреждат в определена последователност:

- За избора на цифрата a колко възможности има? Защо?
- Избрали сме цифрата a. От колко възможности можем да избираме цифрата b? Ако за a сме избрали цифрата 3, за b остават четири възможности (записва на дъската 4). Ако за a сме избрали цифрата 4, за b отново остават четири възможности (добавя на дъската +4). Ако за a сме избрали цифрата 5, за b отново остават четири възможности (добавя на дъската). Аналогично за всичките пет възможности за a, за b остават четири възможности (добавя на дъската $+4+4+4$). Колко такива двуцифрени числа образуваме? Как по-кратко да запишем израза?
- До какъв извод достигнахме? Всяка възможност за избор на цифрата a, се комбинира с всяка възможност на цифрата b или общо те са $5.4 = 20$. От колко цифри се избира цифрата c? Обосновете се!
- Колко възможности установихте за двуцифрените числа? За всяка от тях има по три възможности за цифра c. Тогава колко са търсените трицифрени числа?

Важно е учителят да не предоставя готови отговори и формулировки, а да ръководи, да насочва мисълта на обучаваните, да моделира ситуацията от задачата чрез изображението на граф-дървото, за да демонстрира отново правилото за умножение на възможности. Първите пет клона означават пет възможности. Следващите разклонения са по 4 за всеки от тези клонове, което прави $5.4 = 20$. Последните разклонения имат по 3 листа, следователно възможностите общо са $20.3 = 60$ трицифрени числа.

Така под ръководството на учителя на база конкретен пример учениците обобщават и достигат до извода: „Намираме произведението от възможностите за първия, втория и третия елемент“.

Следва непосредствено приложение на получения извод в решаване на следната дидактическа система от задачи:

Задача 6. Намерете броя на всички четирицифрени естествени числа, които се записват с цифрите 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 като всяка от тях се използва само веднъж.

Аналитична беседа: Учителят задава следните въпроси: „Представете си как ще изглеждат описани всички варианти? Колко време ще ни отнеме да ги изпишем? Кой подход е по-рационално да използваме? Как ще я решим? Колко възможности има за първата цифра? А за втората, за третата и за четвъртата цифра?“

Задача 7. Намерете броя на всички четирицифрени естествени числа, които се записват с цифрите 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9 като всяка от тях се използва само веднъж.

Метод на сравнителния анализ: Винаги е добре да се извършва сравнение с предходно решената задача-компонента: „Каква е разликата с предишната задача? Колко възможности има за първата цифра? А за втората, за третата и за четвъртата цифра?“

Задача 8. Намерете броя на всички трицифрени естествени числа, които се записват с цифрите 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Методически модел за решаване на задача 8.: Основен метод е аналитичната беседа за сравнение и анализ на задачи, реализирана със следните въпроси: „На коя задача прилича? По какво се различава? Има ли ограничение по колко пъти можем да използваме всяка цифра? Кога се получават повече числа?“ Учителят обучава учениците, преди да се заемат с дадената задача, да анализират добре условието и да потърсят подобни, преди това решени задачи, да открият съществените разлики. Обръща вниманието на обучаваните към важността на всяка дума от условието. При тази задача бързащите и невнимателни ученици могат да се заблудят по аналогия с предходните, че всяка цифра се използва само по веднъж и да не се досетят, че в тази задача няма такова ограничение, а те могат да използват една цифра неколкократно.

Задача 9. Намерете броя на всички трицифрени естествени числа, които се записват с цифрите 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

При тази задача отново става въпрос за пермутации с повторение, но трябва да се обърне внимание за възможностите за първата цифра. Трябва отново да се направи сравнение със 7. задача за броя на възможностите при ситуация *без* и *с* повторение.

След тази система от задачи се извежда правилото за умножение на възможности и може да се предложи на учениците сами да съставят подобни задачи, като варират данните, изискванията или контекста (да не се отнася за числа, а за предмети).

Методическа разработка за въвеждане на понятията *пермутация*, *вариация* и *комбинация*. Когато *пермутациите*, *комбинациите* и *вариациите* се изучават в отделни уроци и чрез задачи с различен контекст, за учениците остава непонятно кой вид *съединение* при коя ситуация се използва. Учебните проблеми се отнасят до механично запомняне и затруднения при избор на формулата при решаване на дадена задача. Усвоените знания са нетрайни. За преодоляването на тези обучителни трудности се предлага следният:

Методически модел „*Цветово кодиране*" за решаване на система от задачи. В 8. клас с вариране на ключовите думи от една задача могат да се съставят *три различни задачи*, чрез които да се сравнят и разграничат трите основни типа съединения. Учителите трябва да умеят да съставят задачи и на базата на няколко такива, заедно с обучаваните, да достигнат до важни изводи, чрез които не само да запомнят, но и да осмислят формулите. Първоначално контекстът е един и същ, за да се насочва вниманието към същественото от математическата теория.

Ефективен за акцентиране на важното и открояване на конкретните разлики в задачите е методът на *цветовото кодиране*. В текста на предварително подбраните задачи за трите типа съединения се оцветяват ключовите думи в различни цветове, като например:

Задача 1. Жълта, синя, зелена и червена топки са поставени в кутия. **Последователно** (думата е изписана в червено) се изваждат **всички** (изписана в тъмно лилаво) топки, като се **подреждат** (изписана в червено) в редица до стената. Намерете по колко начина може да се извърши това.

Думите „последователно" и „подреждат" се изписват с еднакъв цвят, защото навеждат към една и съща ситуация и в други задачи може да фигурира само едната от тях. Първоначално се използват и двете, за да се акцентира на подредбата на елементите.

Необходимо е с беседа учителят да ръководи мисълта на учениците, да изисква отговори на въпросите: „Колко възможности има за първата топка? А за втората, след като сме махнали една? А за останалите? Какво трябва да направим с тези възможности? Спомнете си! За всеки избор на първата топка, колко избора имаме за втората? Ако сме поставили първо жълтата, за втората можем да изберем от синята, зелената или червената. Ако за първа сме избрали синята, за втората ще можем да изберем от жълта, зелена и червена. За всяка от четирите възможности за първа топка можем да изберем по три различни начина втората, т.е. да ги умножим. След като сме подредили първата и втората, за третата остават две възможности, а за последната нямаме избор, тя е само една. Какво направихме с възможностите, събрахме ли ги или ги умножихме? Как ще запишем?"

Докато първата задача се отнася за пермутации, то втората се отнася за вариации, където отново е от значение подредбата, но на част от елементите.

Задача 2. Жълта, синя, зелена и червена топки са поставени в кутия. **Последователно** (изписана в червено) се изваждат **две** (изписана в зелен цвят, като диаметрално противоположен цвят на кафявият от цветовата палитра) топки, като се **подреждат** (изписана в червено) в редица до стената. Намерете по колко начина може да се извърши това.

От съществено значение е беседата, чрез която да открият аналогията и разликата с предходната: „По какво се различава втора задача от предходната? Прилича ли Ви на задачата за образуването на числата? Ако вместо топки в условието пише числа, от колко цифри, какви са числата, които трябва да образуваме? От значение ли е редът на цифрите, в случая топките? Как ще решим втора задача?“

След което преминават към задача от комбинации, където не е от значение подредбата на елементите.

Задача 3. Жълта, синя, зелена и червена топки са поставени в кутия. **Едновременно** (изписана в синьо) изваждаме **две** (изписана в жълто-оранжево) топки и ги подаваме на децата. Намерете по колко начина може да стане това.

Подходящо е обучаващият да продължи с аналогична беседа: „По какво тази задача се различава от предходната? Има ли значение редът в третата задача? До какво заключение стигаме? Два варианта от втора задача ще ги броим за …? Следователно всички варианти, които намерихме във втора задача, на колко ще ги разделим?“

Учениците сравняват трите задачи. Обобщението позволява да се запишат правилата в кратък научен, но същевременно достъпен, формат: „Съединения (групи), при които **подреждаме всички** налични елементи, се наричат ***пермутации*** (**P**).“ След това учителят поставя за устно решаване подобни задачи с по-големи числа, като използва нововъведения термин, т.е. показва приложението на направените изводи. Насочва учениците към използване на аналогия. Преминава се към обобщение: „В общия случай, пермутациите P_n на n на брой елемента ще пресметнем с формулата $P_n = n.(n-1)\ldots.3.2.1$. Този дълъг запис по-кратко се записва с $\boldsymbol{n!}$ и се чете ***n-факториел***.“

Изисква от обучаваните да определят каква е ситуацията във втората задача и те записват: „Съединения, при които **нареждаме част** от елементите, се наричат ***вариации*** (**V**).“

След самостоятелно съставяне на няколко задачи от конкретните примери с индуктивни разсъждения учениците ще достигнат до извода:

„Ако има n на брой елемента и се подреждат k от тях, означени с V_n^k, то

$$V_n^k = \underbrace{n.(n-1).(n-2)\ldots}_{k \text{ множителя}} = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-k+1);$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

където $n, k \in N, 1 \le k \le n$.“

Учителят обръща внимание, че ако в последната формула се запишат всички множители и се съкратят числителя и знаменателя, остават k на брой множителя, както в първата формула. Проверяват предходните примери, като заместят във формулата.

Аналогично се извежда и записва: „Съединения, при които **групираме (без да подреждаме) част** от наличните елементи, се наричат ***комбинации*** (**C**).“

Следват няколко примера, чрез които обучаващият да провери разбирането на учениците и да подпомогне запаметяването на новите термини:

„Ако трябва да подредим две от три топки, това са …? Как пресмятаме?“

„Ако трябва да подредим три от три, това са …? Как пресмятаме?“

„Ако от 4 топки трябва да извадим 3, без значение на реда, това са …?“

Това е мястото в урока, където се въвежда новото понятие, но конкретизирано: „Наричаме комбинация от 4 елемента 3$^{\text{ти}}$ клас.“ След което той отново подпомага извода: „Как ще пресметнем? Какво направихме в трета задача? Броя на всички вариации разделихме на броя на повтарящите се групи. В случая, когато се изваждат две топки от четирите, разделихме на $2! = 2.1$, а в този случай ще разделим на …?“

Поставя се подобна задача, но с други числа: „От кутия с 10 различни топчета се изваждат 4 без значение на реда. Колко различни варианта има? Назовете вида на съединенията. Ако има значение редът, съединенията ще наричаме …? На колко да разделим, за да получим комбинациите? Колко вариации считаме за една комбинация?“

Така се достига до формулата:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_n} = \frac{n\,(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

където $n, k \in N$, $1 \leq k \leq n$.

Методически модел „*Приложимост*“. За приложимостта на получените знания и умения по темата се дава пример за тото-игрите на Българския спортен тотализатор. Практическата значимост на новите понятия се разкрива с беседа: „Какъв е видът на съединенията? Кога се получават по-голям брой комбинации – при тото 6 от 49 или при тото 5 от 35? Кога вероятността за улучване на вярна комбинация е по-голяма и защо при нея печалбите са по-ниски?“

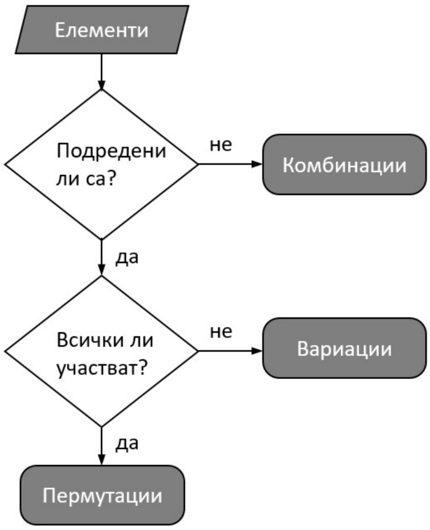
Предлагат се задачи от друг житейски контекст с непосредствено приложение на формулите.

В края на учебния час се достига до следното важно обобщение: Когато **не се подреждат** елементите, съединенията са *комбинации*. Когато е важен **редът** (наредбата) на елементите, тогава случаят е от *пермутации* или *вариации*. Когато участват всички елементи – *пермутации*, когато не участват всички елементи – *вариации*. Тези правила за разпознаване на съединенията могат да се изобразят на табло посредством блок схема, заимствана от информатиката (фиг. 1). На основа на аналогията „операции със съждения – операции с числа“ се достига и използва правилото: „ако се свързват възможности със съюза „или“, се прилага правилото за събиране; ако се свързват със съюза „и“, се прилага правилото за умножаване на възможности“ [2].

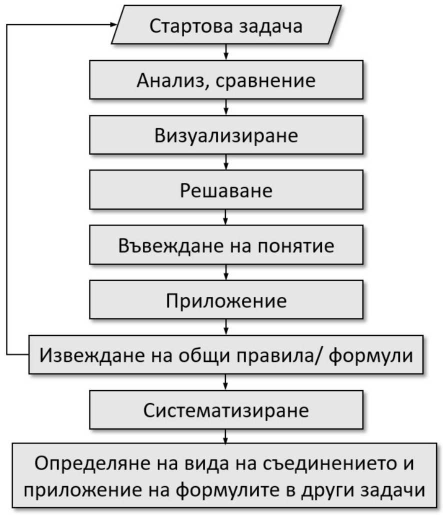
Заключение. Учебните програми по математика и наличието на задачи от комбинаторика в изпитите след 7. клас показват важността на темата. В едно от оскъдните изследвания в областта на методиката на обучение по комбинаторика в 6. клас се подчертава, че: *За да постигнат успех на изпита след 7. клас, учениците трябва значително по-рано да се запознаят с методи за решаване на задачи за преброяване на възможности. Разглеждането на задачи от комбинаторен характер представлява стимул за учениците да разсъждават, да творят, да комбинират идеи и най-вече развива тяхното логическо мислене, което ще бъде в основата на техните успехи* [5].

В това отношение авторските дидактически модели за въвеждане на понятия от комбинаторика преодоляват някои недостатъци в обучението по тази тема и обогатяват педагогическата теория и практика в следните аспекти:

1. Разработените дидактични модели за въвеждане на понятия от комбинаториката обогатяват изследванията в областта на методиката на обучение по комбинаторика.



Фиг. 1. Разпознаване вида на съединението



Фиг. 2. Дидактичен модел – „Комбинаторика“

2. Извежда се необходимостта от *пропедевтика на дейността* за решаване на задачи от комбинаторика още в началния етап на обучението (1.–4. клас), като се посочват примерни задачи. Необходимо е да бъдат разработени системи от задачи с комбинаторен характер за училищния курс по математика.

3. Всеки от представените дидактични модели е съвременна образователна технология, осигуряваща на учителите ефективно прилагане на подробно описани методически идеи за урока. Важен подход в изграждане на моделите е *системният подход* – разработена е система от задачи (съставени от една). Това позволява учениците да открият формулите по индуктивен път (от частното към общото). Използват се *евристични методи* (аналитична беседа, индукция, анализ и синтез, сравнение и аналогия) и *методи за визуализация* (граф-дърво, цветно кодиране, блок-схема).

Обучение по дидактическия модел „Комбинаторика“ (фиг. 2) осигурява разбирането на понятията, предотвратява допускането на грешки (описани в [1]) и трайно запомняне на правилата от този раздел.

4. Приложението на авторските дидактични модели от раздел „Комбинаторика“ съдейства за развиване на мисленето и самостоятелността на учениците. Чрез *насочващо обучение за откриване* начина за получаване на комбинации и самостоятелно достигане до резултатите те ще формират компетенции за самостоятелно учене, комбинативно мислене, творчество при съставяне на задачи и откриване на приложенията на комбинаториката в живота.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Бакоев. Дискретна математика: множества, релации, комбинаторика. София, КЛМН, 2014.

[2] К. Банков, Т. Стоева, И. Цветкова, Д. Петрова. Книга за учителя по математика за 8-ми клас. София, Просвета, 2017.

[3] С. Гроздев, П. Рангелова, Ю. Кръстева. Идеи за осъществяване на пропедевтика по комбинаторика 1.–7. клас. Юбилейна национална научна конференция с международно участие, Смолян, 2012, 145–150.

[4] К. Колева. Логическите задачи, В. Търново, ИТИ, 2021, 978-619-7602-05-0

[5] Ю. Кръстева. Интеграционен модел за обучение по комбинаторика в училище. Автореферат на дисертационен труд. Пловдив, 2013. https://procedures.uni-plovdiv.bg/docs/procedure/321/730186130345095809.pdf

Десислава Георгиева
Факултет „Математика и информатика“
ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“
Бул. „Арх. Георги Козаров“ № 1
5000 Велико Търново, България
e-mail: dmgeorgieva2@gmail.com

METHODOLOGICAL DEVELOPMENTS FOR THE INTRODUCTION OF BASIC CONCEPTS FROM COMBINATORICS

Desislava Georgieva

Two methodological developments of introductory topics from Combinatorics for general educational preparation in the school mathematics course are proposed. An introduction to the concepts of addition and multiplication of probabilities, permutation, variation and combination is demonstrated. Emphasis is on assisted, conscious, inductive reaching of conclusions and formulas.