МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2023
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2023
Proceedings of the Fifty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 10–14, 2023

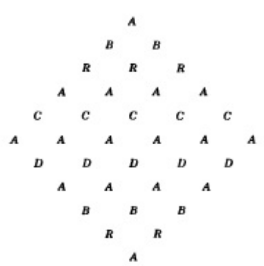
ПЪТЕШЕСТВИЕ В БИНОМИЯ

Веселин Дренски

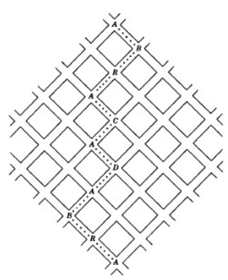
В своята книга „Математическото откритие“ Дьорд Поя тръгва от въпроса по колко различни начина може да се прочете магическата дума „абракадабра“, написана върху квадрат с повторение на буквите, превежда задачата на езика на маршрути по улиците на Ню Йорк и по такъв начин въвежда биномните коефициенти и триъгълника на Паскал. Целта на тази статия е да направи няколко крачки по-нататък и чрез едно пътешествие във въображаемата страна Биномия да разкаже и за други свойства на биномните коефициенти и триъгълника на Паскал.

1. Въведение. Унгарският математик Дьорд Поя е известен не само със своите фундаментални резултати в комбинаториката, теорията на числата, числените методи и теорията на вероятностите. Той има големи заслуги като педагог и популяризатор на математиката. Неговата книга „Математическото откритие“ [2] е излязла в два тома през 1962 и 1965 г. През 1968 г. книгата е преведена на български [4] от Иван Димовски и Иван Чобанов, които са направили много, за да могат редица чуждестранни книги по математика да достигнат до широката българска публика.

В глава 3. „Математическа рекурсия“ Дьорд Поя задава въпроса по колко начина може да се прочете думата „абракадабра“, изобразена на фиг. 1 ([4, фиг. 3.2]), започвайки от горния (северен) ъгъл и движейки се само надолу, на югоизток и югозапад, докато се стигне до долния (южен) ъгъл. Тази задача се превежда на езика на най-късите пътища по улиците на един град, фиг. 2 ([4, фиг. 3.3]). (В английския оригинал [2] става въпрос за улиците на Ню Йорк.)



Фиг. 1

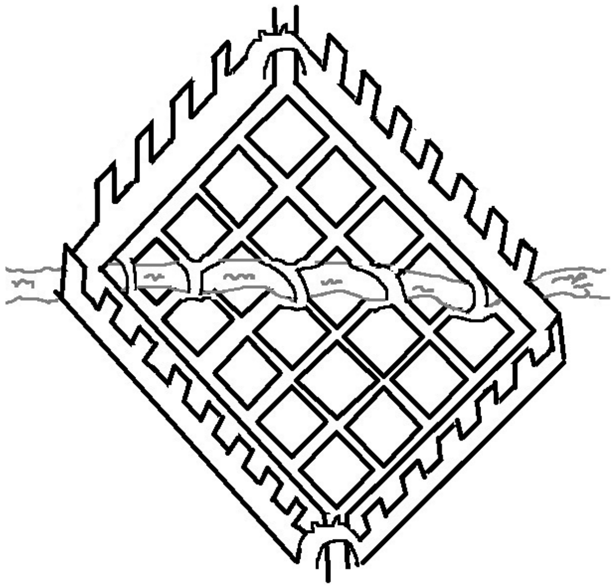


Фиг. 2

2020 Mathematics Subject Classification: 00A08, 00A09, 05A10.
Ключови думи: Биномни коефициенти, триъгълник на Паскал, Нютонов бином.

В тази статия ние ще използваме идеята на Дьорд Поя и чрез едно пътешествие в страната Биномия ще разкажем и за други свойства на биномните коефициенти, триъгълника на Паскал и Нютоновия бином.

2. Страната Биномия и триъгълникът на Паскал. Столицата на страната Биномия има правоъгълна форма. Тя се състои от квадратни квартали, като всички улици са ориентирани от северозапад на югоизток или от североизток на югозапад. Градът е ограден от крепостна стена и има две порти – едната от северната, а другата от южната страна. По средата на града от запад на изток минава река, като на всяка пресечка има мост (фиг. 3).



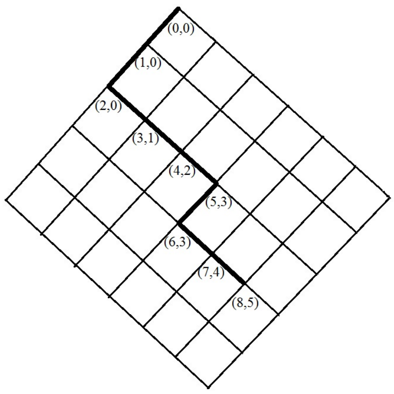
Фиг. 3. Столицата на Биномия

Въпрос 1. *Един пътешественик влиза в града през северната порта и се движи по най-късия път, за да излезе през южната порта. По колко начина може да стане това?*

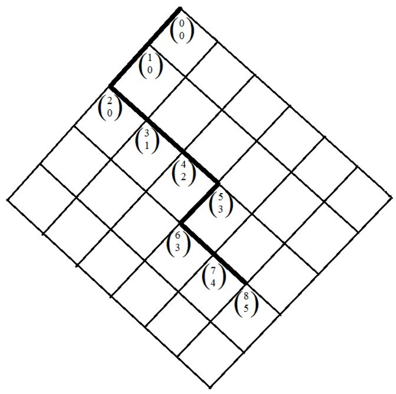
За да стане задачата по-лесна, ние ще означим пресечките на улиците с двойка числа (*координати*). Първото число ще означава броя на всички квартали, през които е минал пътешественикът на път за южната порта, а второто число ще показва броя на всички квартали, през които е минал, движейки се в посока югоизток. Например, пътят, показан на фиг. 4, минава през точките с координати

$$(0,0),(1,0),(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),(6,3),(7,4) \text{ и } (8,5),$$

а (8,5) означава, че този път минава през 8 квартала, като в 5 от тях се движи югоизток. Следвайки означението, въведено от Леонард Ойлер, ще означаваме с $\binom{n}{k}$ броя на най-кратките пътища от северната порта до кръстовището с координати (n,k) (фиг. 5).



Фиг. 4

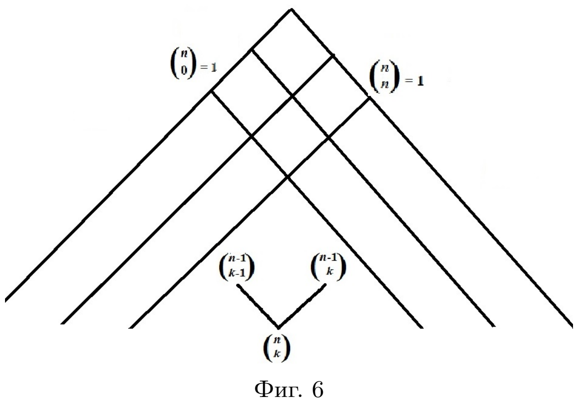


Фиг. 5

Ясно е, че ако искаме да стигнем от точката (0,0) до някоя от точките (1,0), (2,0), (3,0) или (4,0), трябва да вървим само на югозапад и това може да стане по един единствен начин. Аналогично, от точката (0,0) се стига до точките (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) и (5,5), като се върви само на югоизток. От друга страна, за да стигнем в (8,5), ние трябва да минем или през (7,4) или през (7,5). Следователно,

$$\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{2}{0} = \cdots = \binom{1}{1} = \binom{2}{2} = \cdots = 1, \binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5}.$$

Да забравим за момент конкретната форма на столицата на Биномия и да си мислим, че тя има един северен вход и безбройно много улици, които водят от северозапад на югоизток и от североизток на югозапад, виж фиг. 6. Тогава има само един начин да се стигне от точката (0,0) до точките $(n, 0)$ и (n, n). От друга страна, ако $0 < k < n$, то броят на пътищата от точката (0,0) до точката (n, k) е равен на сумата от броя на възможните пътища до $(n-1, k-1)$ и $(n-1, k)$.



Фиг. 6

Ще формулираме това като следната теорема.

Теорема 2. *Броят на най-кратките пътища* $\binom{n}{k}$ *от северната порта на столицата на Биномия до пресечката с координати* (n,k) *удовлетворява условията*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, n = 0, 1, 2, \dots \ \text{и} \ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \ \text{ако} \ 0 < k < n.$$

Дефиниция 3. *Броят на пътищата* $\binom{n}{k}$ *от точката* $(0,0)$ *до точката* (n,k) *се нарича биномен коефициент (и се изговаря „n над k“).*

Наредени в триъгълник, както е показано на фиг. 7 и фиг. 8, числата $\binom{n}{k}$ образуват *триъгълника на Паскал*.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&\binom{0}{0}&&&&&&& \\
&&&&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&&&& \\
&&&&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&&&& \\
&&&&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&&&& \\
&&&\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}&&& \\
&&\binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5}&& \\
&\binom{6}{0}&&\binom{6}{1}&&\binom{6}{2}&&\binom{6}{3}&&\binom{6}{4}&&\binom{6}{5}&&\binom{6}{6}& \\
\binom{7}{0}&&\binom{7}{1}&&\binom{7}{2}&&\binom{7}{3}&&\binom{7}{4}&&\binom{7}{5}&&\binom{7}{6}&&\binom{7}{7}
\end{array}$$

Фиг. 7

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&2&&1&&&&& \\
&&&&1&&3&&3&&1&&&& \\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&& \\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&& \\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1& \\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

Фиг. 8

Триъгълникът на Паскал играе съществена роля в теорията на вероятностите, комбинаториката и алгебрата. Той е наречен така в чест на Блез Паскал, който го разглежда в своя трактат [1] от 1654 г., публикуван след неговата смърт през 1665 г. На историците на математиката е известно, че този триъгълник е бил изучаван и преди това в Индия, Персия, Китай, Германия и Италия [3].

Тъй като лявата и дясната страна на триъгълника на Паскал се състоят от единици, е ясно, че той е симетричен относно вертикалната права, която минава през върха, т.е.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Да се върнем обратно към картата на столицата на Биномия на фиг. 3. Мостовете над реката са с координати (4,0), (4,1), (4,2), (4,3) и (4,4). Тръгвайки от северната порта на града на път за южната, пътешественикът трябва да мине по един от мостовете. Той има $\binom{4}{0}$ възможности да стигне до моста с координати (4,0) и $\binom{5}{5}$ възможности да продължи оттам до южната порта, т.е. всички възможности за минаване през този мост са $\binom{4}{0}\binom{5}{5}$. Поради симетрията на триъгълника на Паскал $\binom{5}{5} = \binom{5}{0}$, т.е. всички възможности са $\binom{4}{0}\binom{5}{0}$. Възможностите за минаване през моста с координати (4,1) са $\binom{4}{1}\binom{5}{1}$ и т.н. Следователно, за броя $\binom{9}{5}$ на всички пътища от (0,0) до (9,5) получаваме

$$\binom{9}{5} = \binom{4}{0}\binom{5}{0} + \binom{4}{1}\binom{5}{1} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} + \binom{4}{3}\binom{5}{3} + \binom{4}{4}\binom{5}{4}.$$

Ако приемем, че $\binom{n}{k-i} = 0$, когато $n < k - i$, по същия начин можем да докажем и общото равенство

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k-i}.$$

В специалния случай, когато $n = k$, се получава

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

3. Нютоновият бином. Да разпишем всички пътища с дължина 4 квартала, които започват от северната порта на града. Ще означаваме движенията на югозапад с вертикална чертичка |, а тези в посока югоизток – с кръстче X, като отделяме чертичките и кръстчетата с точки:

|·|·|·|; X·|·|·|,|·X·|·|, |·|·X·|, |·|·|·X; X·X·|·|, X·|·X·|, X·|·|·X, |·X·X·|, |·X·|·X, |·|·X·X;
X·X·X·|, X·X·|·X, X·|·X·X, |·X·X·X; X·X·X·X.

Пътищата с 0 кръстчета водят до точката (4,0) и техният брой е $\binom{4}{0}$, тези с едно кръстче водят до (4,1) и са $\binom{4}{1}$ на брой и т.н. Сега ще заменим чертичките с единички, а кръстчетата с x и ще добавим плюсчета между отделните пътища:

$$1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + (x\cdot 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot x\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot x\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1\cdot x)$$
$$+(x\cdot x\cdot 1\cdot 1 + x\cdot 1\cdot x\cdot 1 + x\cdot 1\cdot 1\cdot x + 1\cdot x\cdot x\cdot 1 + 1\cdot x\cdot 1\cdot x + 1\cdot 1\cdot x\cdot x)$$
$$+(x\cdot x\cdot x\cdot 1 + x\cdot x\cdot 1\cdot x + x\cdot 1\cdot x\cdot x + 1\cdot x\cdot x\cdot x) + x\cdot x\cdot x\cdot x.$$

Лесно се вижда, че полученият израз е равен на развитието на $(1+x)^4$, т.е.

$$(1+x)^4 = \binom{4}{0} + \binom{4}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 + \binom{4}{4}x^4.$$

С подобни разсъждения се доказва следната теорема, а изразът в нея се нарича *Нютонов бином.*

Теорема 4. *За всяко естествено число n е в сила равенството*

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k.$$

Нютоновата биномна формула е била известна на Блез Паскал, а преди него – и на други математици от Индия, Иран и Китай. Главната заслуга на Исак Нютон е, че той я обобщава за степени $(1 + x)^n$, където n е произволно комплексно число.

Ако в Нютоновата формула заместим x с единица, ще получим равенството

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

4. Комбинации и вариации без повторение, пермутации. Да разгледаме подмножествата от k елемента на едно множество от n елемента. Например, всички 3-елементни подмножества на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ са

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\},$$

$$\{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$$

и техният брой е 10. Ако погледнем фиг. 8, ще видим, че $\binom{5}{3} = 10$. Оказва се, че това не е случайно съвпадение. В сила е следната теорема.

Теорема 5. *Броят на всички k-елементни подмножества на едно множество от n елемента е равен на биномния коефициент* $\binom{n}{k}$.

Доказателство. Да се върнем в столицата на Биномия, отново да означим пътищата от северната порта с координати (0,0) до пресечката с координати (n, k) с редици от чертички и кръстчета и да разгледаме една конкретна редица. Сега да си напишем числата от 1 до n. Ако на i-то място в редицата от чертички и кръстчета има кръстче, ще оградим числото i с кръгче. Ако там стои чертичка, няма да правим нищо. На разглеждания път ще съпоставим множеството от k числа, заградени с кръгче. Например, на редицата (|,|,X,X,|,X,|,|), отговаряща на път от (0,0) до (8,3) ще съпоставим $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ и подмножеството $\{3, 4, 6\}$ на 8 елементното множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$:

$$(|, |, X, X, |, X, |, |) \to (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \to \{3, 4, 6\}.$$

Очевидно е, че на различните пътища от (0,0) до (n, k) отговарят различни k-елементни подмножества на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ и всяко такова подмножество отговаря на някакъв път. Следователно, има *взаимно еднозначно съответствие* между пътищата от (0,0) до (n, k) и k-елементните подмножества на n-елементното множество. С други думи, броят на такива пътища и на такива подмножества е един и същ и е равен на $\binom{n}{k}$. $\square$

Задача 6. *В ежегодния маратон на Биномия участват 26 състезатели.*

(i) *Колко възможности има за класиралите се на първите три места?*

(ii) *Колко са възможностите за класирането на всичките 26 участника?*

(iii) *Колко са възможните тройки от състезатели, класирани на първите три места, ако не се интересуваме кой от тримата е на първо, второ и трето място?*

(Предполага се, че има фотофиниш и не е възможно делението на едно място от няколко състезатели.)

Решение. (i) Очевидно е, че всеки от 26-те състезателя може да заеме първото място. Второто място може да заеме всеки от останалите 25 участника в маратона. За третото място имаме 24 възможности. Следователно, всички възможности са $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$.

(ii) Аналогично, броят на възможностите за класирането на всичките 26 участника е

$$26! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 25 \cdot 26 = 40\,3291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000.$$

(iii) Ако вече сме избрали по един от $26 \cdot 25 \cdot 24$ начина тримата победители, единият от тях може да заеме едно от трите места, вторият – едно от останалите две места и за третия остава само една възможност, т.е. броят на тройките победители е $\dfrac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,600$.

Едни от основните обекти в комбинаториката са *комбинаторните конфигурации.* Те се получават в резултат на избирането и подреждането на елементите на дадено множество по дадени правила. Най-простите примери на комбинаторни конфигурации са вариациите, пермутациите и комбинациите. *Вариация без повторение на n елемента от k-ти клас* е избор на k различни два по два елемента от едно n-елементно множество, като редът на избора има значение. Броят на всички вариации без повторение на n елемента от k-ти клас ще означаваме с V_n^k. Когато нареждаме всичките n елемента на множеството, говорим за *пермутация на n-елементното множество.* Когато избираме k елемента от това множество, но редът, по който са избрани елементите, няма значение, говорим за *комбинация без повторение на n елемента от k-ти клас.* Броят на всички такива комбинации ще означаваме с C_n^k. Очевидно е, че можем да отъждествяваме комбинаците без повторение на n елемента от k-ти клас с подмножествата от k елемента на множеството от n елемента и теорема 5 дава, че $C_n^k = \dbinom{n}{k}$.

Примерите в задача 6 показват, че броят на възможностите за класиране на първите три места е V_{26}^3, на броя на възможните класирания на всички състезатели е $26!$, а на възможните тройки от победители е C_{26}^3.

Теорема 7. (i) *Броят V_n^k на всички вариации без повторение на n елемента от k-ти клас е равен на $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.*

(ii) *Броят на всички пермутации на елементите на едно n-елементно множество е $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.*

(iii) *Броят C_n^k на всички комбинации без повторение на n елемента от k-ти клас е равен на*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \ \textit{където } 0! = 1.$$

Доказателство. Ще работим с множеството $\{1, 2, \dots, n\}$.

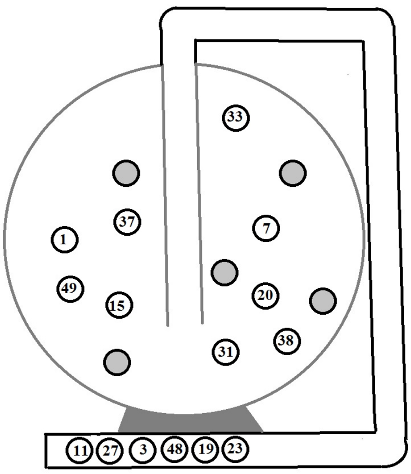
(i) Ще повторим разсъжденията в решението на задача 6. Имаме n възможности да изберем първото число i_1, второто число i_2 можем да изберем по $n-1$ начина и т.н. Накрая имаме $n-k+1$ възможности да изберем k-тото число i_k. Следователно имаме $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ редици $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, т.е. $V_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

(ii) Тъй като пермутациите на елементите на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ са вариации без повторение на n елемента от n-ти клас, от (i) получаваме, че броят на пермутациите е $V_n^n = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

(iii) Всички комбинации без повторение на n елемента от k-ти клас могат да се получат на два етапа. Най-напред избираме по един от възможните V_n^k начина вариация без повторение на n елемента от k-ти клас и след това нареждаме избраните k елемента по големина. Ако комбинацията се състои от числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$, то всички вариации, от които тя е получена, са пермутации на елементите на множеството $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ и съгласно (ii) техният брой е $k!$. Следователно, броят C_n^k на комбинациите е

$$\frac{V_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad \square$$

За много от хората думата „комбинация“ е свързана със Спорт тото 2. В играта „6 от 49“ играчът попълва фиш, на който отбелязва 6 числа от 1 до 49. При тегленето на тиража в сфера са поставени топки с числата от 1 до 49 и по случаен начин се избират 6 топки. Фишът печели, ако в него има поне три познати числа. На фиг. 9 са се паднали топките с номера 11, 27, 3, 48, 19, 23 и печелившите числа са 3, 11, 19, 23, 27 и 48. Следователно, най-напред имаме вариацията без повторение $(11, 27, 3, 48, 19, 23)$, от която е получена комбинацията, която отговаря на множеството $\{11, 27, 3, 48, 19, 23\}$.



Фиг. 9

Задача 8. *Какво ще спечелим, ако в играта „6 от 49“ попълним фишове с всевъзможните комбинации?*

Решение. Броят на фишовете с всевъзможните комбинации е $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$. В един от фишовете ще улучим „шестица“. За „петица“ трябва да сме избрали пет от печелившите 6 числа и едно от останалите 43 числа, т.е. $\binom{6}{5}\binom{43}{1} = 258$ фиша;

за „четворка“ имаме четири печеливши и две непечеливши числа, т.е. $\binom{6}{4}\binom{43}{2} =$ 13 545 фиша. Накрая за „тройка“ фишовете са $\binom{6}{3}\binom{43}{3} = 246\,820$. Следователно, от всичките 13 983 816 фиша печелят само 260 624.

Ще завършим този параграф със следната задача.

Задача 9. *Един ученик се явява на изпит. Конспектът съдържа 100 въпроса, на които трябва да се отговори с „Да“ или „Не“. На изпита се дават 10 случайно избрани въпроса. Ученикът знае отговорите на 60 от въпросите, а на останалите е решил да отговаря по случаен начин с „Да“ или „Не“. Каква е вероятността изпитваният да отговори вярно на всичките 10 въпроса?*

Решение. Ще постъпим както в предишната задача. Броят на възможностите да се изберат 10 въпроса е $\binom{100}{10} = 17\,310\,309\,456\,440$. Възможни са два случая: Падат се 10 от 60-те въпроса, които ученикът знае. Вероятността за това е $\binom{60}{10}/\binom{100}{10}$. В останалите случаи могат да се паднат k от останалите 40 въпроса и $10-k$ ot 60-те, на които знае отговора. Във всеки от тези случаи ученикът ще отговори вярно с вероятност $\frac{1}{2^k}$. Следователно, вероятността да се отговори вярно на всичките 10 въпроса е

$$\frac{1}{\binom{100}{10}} \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} \binom{40}{k} \binom{60}{10-k}.$$

Лесно можем да пресметнем това число, ако подходим по следния начин и използваме някоя от популярните системи за компютърна алгебра (например Maple, Mathematica или MATLAB). Да разгледаме произведението

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{40}(1+x)^{60} = \sum_{p=0}^{40} \frac{1}{2^p}\binom{40}{p} x^p \sum_{q=0}^{60} \binom{60}{q} x^q = \sum_{k=0}^{100} \left(\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2^p} \binom{40}{p} \binom{60}{k-p} \right) x^k.$$

Следователно, сумата $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k}\binom{40}{k}\binom{60}{10-k}$ е равна на коефициента пред x^{10}. Умножаваме полиномите

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^{40} = 1 + 20x + 195x^2 + 1235x^3 + \frac{45695}{8}x^4 + \frac{82251}{4}x^5 + \frac{959595}{16}x^6$$
$$+\frac{2330445}{16}x^7 + \frac{76904685}{256}x^8 + \frac{8544965}{16}x^9 + \frac{52978783}{64}x^{10} + \cdots$$

и

$$(1+x)^{60} = 1 + 60x + 1770x^2 + 34220x^3 + 487635x^4 + 5461512x^5 + 50063860x^6$$
$$+386206920x^7 + 2558620845x^8 + 14783142660x^9 + 75394027566x^{10} + \cdots .$$

Оказва се, че коефициентът пред десетата степен на произведението е равен на $\frac{227\,841\,318\,291\,223}{128}$. Следователно, вероятността ученикът да отговори вярно на всичките 10 въпроса е равна на $\frac{227\,841\,318\,291\,223}{128 \cdot 17\,310\,309\,456\,440} \approx 0{,}1028294903$, т.е. малко повече от 10%.

Забележка 10. Ако използваме идеята от решението на задача 9 и сравним коефициентите пред x^k в равенството

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = (1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \right) x^k,$$

ще получим друга интересна връзка между биномните коефициенти:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m+n.$$

Тъй като $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, в специалния случай $m = 1$ ще получим определящото правило за триъгълника на Паскал

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

а когато $k = m$, ще получим равенството

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{n}{k-i}$$

в края на раздел 2.

5. Полиноми на много променливи. Ще направим едно приложение на нашите разглеждания за полиномите на много променливи.

Въпрос 11. *Колко са едночлените $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ от n-та степен на k променливи $x_1, x_2, \ldots, x_k$? Колко са едночлените от степен, по-малка или равна на n?*

Теорема 12. *Броят на едночлените $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ от n-та степен на k променливи $x_1, x_2, \ldots, x_k$ е равен на $\binom{n+k-1}{k-1}$, а на тези от степен $\leq n$ е равен на $\binom{n+k}{k}$.*

Доказателство. Да разгледаме маршрутите в столицата на Биномия, които започват от северната порта и завършват на кръстовището с координати $(n+k-1, k-1)$. Отново ще използваме чертички и кръстчета за движенията на югозапад и югоизток. Но сега е по-удобно да означаваме с кръстче движението на югозапад, а с чертичка движението на югоизток. Освен това чертичките ще бъдат разделителни линии между групите променливи. Ще заместим кръстчетата преди най-лявата чертичка с x_1, тези между първата и втората чертичка – с x_2 и т.н. Кръстчетата след последната $(k-1)$-ва чертичка ще заместим с x_k. Например, ако $n = 8$, $k = 5$, на пътя, който стига до кръстовището $(12, 4)$ и е означен с XXXX||X|XX|X, отговаря едночленът от осма степен $x_1 x_1 x_1 x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 x_4 \cdot x_5 = x_1^4 x_3 x_4^2 x_5$. Отново имаме взаимно еднозначно съответствие между едночлените от степен n и пътищата до точката $(n+k-1, k-1)$, с което се доказва, че броят на тези едночлени е $\binom{n+k-1}{k-1}$. За доказателството на второто твърдение ще разгледаме едночлените от n-та степен на $k+1$ променливи $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$. Съгласно току що доказаното, техният брой е равен на $\binom{n+k}{k}$. Ако заместим x_0 с единица, ще получим точно по веднъж всички едночлени на $x_1, x_2, \ldots, x_k$ от степен $\leq n$, т.е. техният брой също е $\binom{n+k}{k}$. $\square$

Следствие 13. *За всеки две цели числа $n \geq 0$ и $0 \leq k \leq n$ е в сила равенството*

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m+k-1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}.$$

Доказателство. Твърдението следва веднага от теорема 12, защото изразява факта, че броят на едночлените от степен $\leq n$ е равен на сумата от броя на едночлените от степени $0, 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Забележка 14. Равенството в следстие 13 може да се докаже и директно, като се използват свойствата на триъгълника на Паскал. Тъй като

$$\binom{k-1}{k-1} = \binom{k}{k} = 1,$$

последователно получаваме

$$\begin{aligned}
&\left(\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1}\right) + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1} \\
&= \left(\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right) + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1} \\
&= \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k-1} + \cdots + \binom{n+k-1}{k-1} \\
&= \cdots = \binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}.
\end{aligned}$$

Заключение. Авторът се надява, че читателят ще продължи самостоятелно своето пътешествие в държавата Биномия – страната на биномните коефициенти, и ще стигне до други интересни факти в областта на комбинаториката.

Благодарности. Авторът изказва своите искрени благодарности на анонимния рецензент за внимателното и критично четене на ръкописа, както и за препоръките, които съществено допринесоха за подобряване на представянето на резултатите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Pascal. Traité du triangle arithmetique: avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière. 1654, published 1665, `https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-CCB-00013-00024/1` (8.03.2023).

[2] G. Pólya. Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. New York-London-Sydney, John Wiley and Sons, Inc. Vol. I, 1962, Vol. II, 1965.

[3] Pascal's triangle, `https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle` (8.03.2023).

[4] Д. Пойа. Математическото откритие: За разбирането, изучаването и обучаването в решаване на задачи. София, Народна просвета, 1968.

Веселин Дренски
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България
e-mail: drensky@math.bas.bg

A JOURNEY TO BINOMIA

Vesselin Drensky

In his book “Mathematical discovery” George Pólya starts from the question in how many different ways one can read the magic word “abracadabra”, written in a square with repetitions of the letters, translates the problem in the language of paths in the streets of New York, and in this way he introduces the binomial coefficients and the Pascal triangle. The purpose of our paper is to make a few more steps and during a journey in the fictional country Binomia to present also other properties of the binomial coefficients and the Pascal triangle.
Key words: Binomial coefficients, Pascal triangle, Newton’s binomial.