МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2023
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2023
Proceedings of the Fifty Second Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovetz, April 10–14, 2023

ЕДИН УРОК ЗА ПРИЛОЖЕНИЕ НА СКАЛАРНОТО ПРОИЗВЕДЕНИЕ*

Даниела Цветкова

В обучението си по математика учениците се срещат за пръв път с вектори в 8. клас. Там те се запознават с понятието вектор – насочена отсечка, изучават колинеарни и неколинеарни вектори, еднопосочни и противопосочни, равенство на вектори, противоположни вектори и нулевия вектор. Въвеждат се афинните операции с вектори – събиране, изваждане и умножение на вектор с число.

По новата програма за профилирана подготовка по математика в 11. клас се въвеждат понятието скаларно произведение на два вектора и операции на вектори с координати в правоъгълна декартова координатна система. Знанията на учениците при задачи, свързани с вектори, се засилват. Те вече могат да събират, умножават, намират дължина на вектори, които са зададени с координати. Представя им се приложението на вектори в аналитичната геометрия, при решаване на задачи с многоъгълници и стереометрични задачи. Знаем, че приложението на векторния апарат е огромно, затова ние представяме решаване на задачи от алгебра и анализ чрез използването на вече познатите операции с вектори.

1. Скаларно произведение на два вектора. Ако $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са два ненулеви вектора, то ъгълът между тях се изменя в интервала от $[0°; 180°]$ и за двата вектора е вярно, че:

- $\measuredangle\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) = 0°$, ако $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са еднопосочно колинеарни;
- $\measuredangle\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) = 180°$, ако $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са разнопосочно колинеарни.

Скаларното произведение на двата вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ се означава с $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$ и по определение е число, което се получава по формулата $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right)$.

Когато $\measuredangle\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) = 0°$, то $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right|$, а когато $\measuredangle\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right) = 180°$, то $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -|\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right|$. От тези две равенства следва и фактът, че $\left|\cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}\right)\right| \le 1$, следват и неравенствата

$$-|\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| \le \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \le |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right|. \tag{1}$$

* **2020 Mathematics Subject Classification:** 97G70.
Ключови думи: Скаларно произведение, координати, уравнения, неравенства, НМС, НГС.

Ако векторите $\overrightarrow{a}(a_1;a_2)$ и $\overrightarrow{b}(b_1;b_2)$ са зададени спрямо правоъгълна декартова координатна система в равнината, то скаларното произведение се пресмята по формулата

(2) $$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2,$$

а дължините на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ се намират с формулите

(3) $$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2},\ \left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}.$$

I група. Ирационални уравнения.

Задача 1. [1] Да се реши уравнението $\sqrt{x-3} + 2\sqrt{5-x} = \sqrt{10}$.

Решение. По стандартния начин за решаване на ирационални уравнения можем двукратно да повдигнем на квадрат двете страни и да достигнем до рационално уравнение. Сега ще представим решението на това уравнение с използване на свойствата на скаларното произведение. С този подход лесно се достига до решение на даденото уравнение.

Разглеждаме векторите $\overrightarrow{a}(\sqrt{x-3}\ ;\sqrt{5-x})$ и $\overrightarrow{b}(1;2)$. От равенства (2) и (3) получаваме, че

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \sqrt{x-3} + 2\sqrt{5-x},\ |\overrightarrow{a}| = \sqrt{x-3+5-x} = \sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

. Прилагаме неравенство (1) за избраните вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и получаваме

$$\sqrt{x-3} + 2\sqrt{5-x} \leq \sqrt{10}.$$

Равенство в последното неравенство се достига, когато векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са колинеарни, т.е. $\dfrac{\sqrt{x-3}}{1} = \dfrac{\sqrt{5-x}}{2} \Leftrightarrow x = 3,4$. Понеже $3,4 \in [3;5]$, следва, че е решение на даденото уравнение.

Задача 2. [3] Намерете решенията $(x;y)$ на уравнението $17\sqrt{x^2+y^2} = 8x + 15y$.

Решение. Разглеждаме векторите $\overrightarrow{a}(x;y)$ и $\overrightarrow{b}(8;15)$. Прилагаме равенство (2) и (3) и получаваме,

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 8x + 15y,\ |\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2+y^2},\ \left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17.$$

Прилагаме отново неравенство (3) и получаваме $18x + 15y \leq 17\sqrt{x^2+y^2}$, като равенство се достига, когато векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са колинеарни, т.е. $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{15} \Leftrightarrow x = \dfrac{8y}{15}$. Окончателно получаваме за решенията на даденото уравнение $\left(x;\dfrac{8}{15}x\right)$.

II група. Доказване на неравенства.

Задача 3. [1] Да се докаже, че за произволни реални неотрицателни числа $a, b,\ c,\ d$ е вярно неравенството $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

Решение. Разглеждаме векторите $\overrightarrow{x}(\sqrt{a};\sqrt{c})$ и $\overrightarrow{y}(\sqrt{b};\sqrt{d})$. Тогава

$$\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y} = \sqrt{ab} + \sqrt{cd},\ \overrightarrow{x} = \sqrt{a+c}\ \text{ и }\ |\overrightarrow{y}| = \sqrt{b+d}.$$

Използваме неравенство (1) и получаваме $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}$, с което задачата е решена.

Задача 4. [2] Нека a, b, c са положителни числа, $a > c$ и $b > c$. Да се докаже, че $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq ab$.

Решение. [2] Нека $\overrightarrow{p}\left(\sqrt{c};\sqrt{b-c}\right)$ и $\overrightarrow{q}\left(\sqrt{a-c};\sqrt{c}\right)$. Тогава от (1) следва, че

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq ab.$$

Равенство се получава при $c=\dfrac{ab}{a+b}$.

III група. Намиране на най-голяма и най-малка стойност на изрази.

Задача 5. [2] Да се намери най-голямата стойност на израза $B=6\sqrt{1-5x}+8\sqrt{5x}$ и стойностите на x, при които тя се получава.

Решение. Изразът B е дефиниран при $0\leq x\leq\dfrac{1}{5}$. Разглеждаме векторите $\overrightarrow{a}(6;8)$ и $\overrightarrow{b}(\sqrt{1-5x};\sqrt{5x})$. За тях намираме

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{36+64}=10,\ \overrightarrow{b}=\sqrt{1-5x+5x}=1\quad\text{и}\quad\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=6\sqrt{1-5x}+8\sqrt{5x}.$$

Използваме неравенство (1) за избраните вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и получаваме

$$B=6\sqrt{1-5x}+8\sqrt{5x}\leq 10.$$

Следователно най-голямата стойност на B е 10 и тя се достига при

$$\frac{\sqrt{1-5x}}{6}=\frac{\sqrt{5x}}{8}\ \Leftrightarrow x=\frac{16}{125}.$$

Понеже $\dfrac{16}{125}<\dfrac{1}{5}=\dfrac{25}{125}$, то най-голямата стойност на B се получава при $x=\dfrac{16}{125}$.

Задача 6. Намерете най-голямата и най-малката стойност на израза

$$B=\frac{(2x+2y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

където $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Изразът е дефиниран за $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Разглеждаме векторите

$$\overrightarrow{a}\left(\frac{2x}{1+x^2};\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\quad\text{и}\quad\overrightarrow{b}\left(\frac{1-y^2}{1+y^2};\frac{2y}{1+y^2}\right).$$

За тях намираме

$$\left(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}\right)^2=\left(\frac{2x}{1+x^2}.\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}.\ \frac{2y}{1+y^2}\right)^2=\left(\frac{(2x+2y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right)^2\leq 1.$$

Оттук следва, че $B\in[-1;1]$, което означава, че най-малката стойност на израза е -1, а най-голямата е 1.

Извод. Приложението на вектори при решаване на задачи е изключително голямо. При добавянето на теми за вектори с координати и скаларно произведение на два вектора към учебната програма за профилирана подготовка по математика пред учениците се разкрива огромното разнообразие от задачи и тяхното рационално решаване. Подходящо е при урока за скаларно произведение на два вектора пред учениците да се демонстрира приложението му при задачи от алгебра и анализ, като темата би могла да се доразвие в допълнителните часове по математика или в извънкласни дейности и кръжоци. За учащите е изключително полезно да се направи вътрешнопредметна връзка, да се покаже един нестандартен подход към алгебрични задачи, до чието решение можем да достигнем сравнително лесно. Особено интересно за тях е след демонстрирането на задачите и запознаването им със свойствата на векторите, да се насърчат те сами да създават задачи. Темата е благоприятна, интересна, развива логическото и абстрактното мислене и е много полезна за ученици с повишен интерес към математиката.

ЛИТЕРАТУРА

[1] К.К Азиев. Решение алгебрических задач с помощью скалярного произведения. *Математика в школе*, № 4 (2000), 6–8.

[2] П. Рангелова. Векторите при решаване на задачи с ирационални изрази. Сп. *Математика*, бр. 1 (2013), 13–20, ISSN: 0204-6881.

[3] М. Теофилова. Диофантови уравнения от втора степен (лекция). Извънкласна работа по математика, Пловдивски университет "Паисий Хилендарски Пловдив, 19.11.2022 г.

Даниела Цветкова
ПМГ „Акад. Боян Петканчин“ – Хасково
ПУ „Паисий Хилендарски“
e-mail: danielatsvetkova17@gmail.com

A LESSON ON APPLYING THE SCALAR PRODUCT OF TWO VECTORS

Daniela Tsvetkova

In their mathematics education, the Bulgarian students encounter vectors for the first time in the 8^{th} grade. There, they get to know the concept of a vector – a directed segment, study collinear and non-collinear vectors, same direction and opposite direction vectors, equality of vectors, opposite vectors and the zero vector. The affine operations with vectors are introduced – addition, subtraction and multiplication of a vector by a number.

According to the new program for profiled preparation in mathematics in the 11^{th} grade, the concept of scalar product of two vectors and operations on vectors with coordinates in a Cartesian coordinate system are introduced. Students' knowledge in problems related to vectors is strengthened. They can now add, multiply, find the length of vectors that are set with coordinates. Students are introduced to the application of vectors in analytical geometry, in solving problems with polygons and stereometric problems. We know that the application of the vector apparatus is enormous, so we present solving algebra and calculus problems by using the already familiar vector operations.

Key words: Scalar product, coordinates, equations, inequalities, minimum and maximum value of a mathematical expression