МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2024
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2024
Proceedings of the Fifty-Third Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–5, 2024

ONE PROBLEM, MANY SOLUTIONS*

Plamen Gostev

Faculty of Mathematics and Informatics,
Sofia University "St. Kliment Ohridksi", Sofia, Bulgaria
and Sofia High School of Mathematics, Bulgaria
e-mail: gostev@fmi.uni-sofia.bg

During primary school students are introduced to basic geometry knowledge. As students go through high school, they acquire more and more complex knowledge. In the current article, we present different solutions to one problem, depending on the age and knowledge required to solve the problem. We'll start with two familiar problems. Then we'll generalize and we'll prove a lemma. In the last part we'll present different problems and their solutions that were born from the first two problems and the lemma.
Keywords: circle, regular polygon, diagonal.

ЗАДАЧА – ЕДНА, ПОДХОДИ МНОГО

Пламен Гостев

Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски“, София, България
Софийска математическа гимназия „Паисий Хилендарски“
e-mail: gostev@fmi.uni-sofia.bg

Още в началния етап на образование учениците се запознават с основните геометрични понятия. В средния курс на обучение учениците придобиват базови знания, които постепенно се надграждат в гимназиалния етап от обучението.

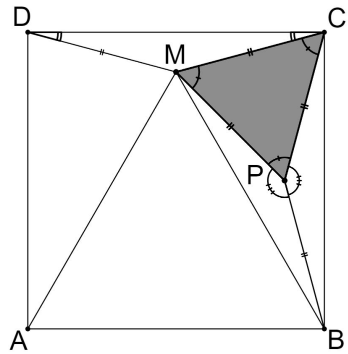
В настоящата статия ще демонстрираме различни подходи при решаване на една и съща задача. Ще започнем с две познати задачи, на които ще покажем решения за различни възрасти с постепенно обогатяване на знанията. От обобщението на тези задачи и доказателството на една лема се появяват няколко нови и интересни задачи, които биха дали на заинтересованите читатели идеи за съставяне на други такива.
Ключови думи: окръжност, правилен многоъгълник, диагонал

*https://doi.org/10.55630/mem.2024.53.135-140
2020 Mathematics Subject Classification: 97G40.

Задача 1. В квадрата $ABCD$ е взета точка M такава, че $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MDC = 15^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMB$.

Решение. Добрият седмокласник бързо би разбрал, че с намирането на двойка еднакви триъгълници ще успее да докаже, че $\triangle ABM$ е равнобедрен. Но с базови знания – дотук. Тогава най-естествено би започнал да търси някакъв по-изобретателен подход. Един от най-честите такива е построяването на ъгъл с големина 60° и получаването на равностранен триъгълник. В случая точка M е „близо“ до страната CD, но нищо не пречи да има такава точка и до страната BC.

Правим построение по идея от статия [1]: точка P – вътрешна за квадрата такава, че $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PBC = 15^\circ$. Тогава се оказва, че $\sphericalangle PCM = 60^\circ$ и $\triangle CDM \cong \triangle BCP$, откъдето $\triangle MCP$ става равностранен. С пресмятане на ъгли достигаме до $\sphericalangle BPM = 150^\circ$. Тогава $\triangle BCP \cong \triangle BMP$, откъдето $BC = BM$ и $\sphericalangle CBM = 30^\circ$. Тогава $\triangle ABM$ става равностранен и достигаме до $\sphericalangle AMB = 60^\circ$.



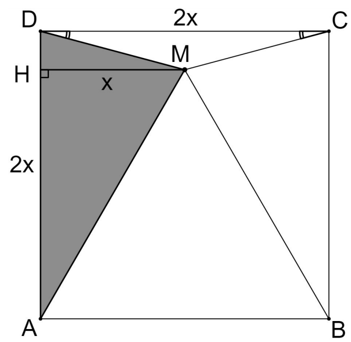
Друг възможен подход е чрез решаването на вече позната задача: триъгълник с ъгъл от 75° и височина, равна на половината от страната, към която е спусната.

Нека $MH \perp AD$ ($H \in AD$). Тогава в $\triangle AMD$ височината (MH) към страната AD е два пъти по-къса от нея и $\sphericalangle ADM = 75^\circ$. Ще покажем, че $\triangle ADM$ е равнобедрен, $AD = AM$, откъдето ще следва, че $\triangle ABM$ е равностранен, съответно $\sphericalangle AMB = 60^\circ$.

За $\sphericalangle DAM$ има три възможности: да е по-голям от 30°, да е по-малък от 30° или да е точно 30°.

(1) Ако $\sphericalangle DAM > 30^\circ$, то $\sphericalangle DMA < 75^\circ$ и от неравенство между страни и ъгли в $\triangle ADM$ получаваме, че $\sphericalangle ADM = 75^\circ > \sphericalangle DMA$, следователно $AM > AD = 2x$. Но в правоъгълния $\triangle AMH$ с хипотенуза AM, $\sphericalangle HAM > 30^\circ$ и катета $HM = x$. Тогава $AM < 2HM = 2x$, противоречие.

(2) Ако $\sphericalangle DAM < 30^\circ$, с аналогични разсъждения отново стигаме до противоречие.



Така остава единствената възможност – $\sphericalangle DAM = 30^\circ$, с което задачата е решена.

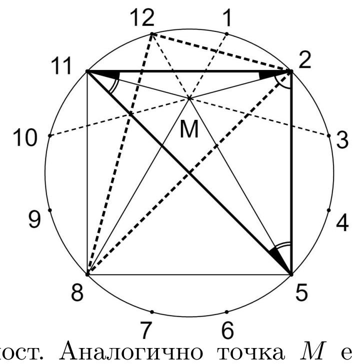
Използвайки **единствеността** в съществуването на **точка** M, можем да формулираме следното елегантно решение, което би ни хрумнало при направа на точен чертеж и известен ни вече отговор. Нека точка M_1 от вътрешността на квадрата е такава, че $\triangle ABM_1$ е равностранен. Тогава достигаме до $\sphericalangle CDM_1 = \sphericalangle DCM_1 = 15^\circ$, откъдето точките M и M_1 съвпадат.

Възможно е задачата да бъде решена „**стандартно**“, с помощта на две косинусови теореми.

Нека страната на квадрата е y. Тогава от приложената за $\triangle CMD$ косинусова теорема получаваме, че $DM^2 = y^2(2 - \sqrt{3})$. След което отново чрез косинусова теорема за $\triangle AMD$ получаваме, че $AM = y$, откъдето се получава, че $\triangle ABM$ е равностранен и $\sphericalangle AMB = 60^\circ$.

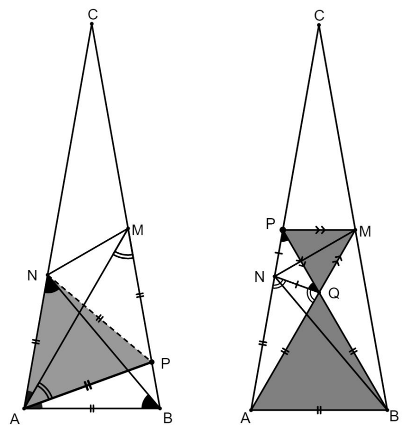
Обобщение. Разглеждаме описаната около квадрата окръжност. Имаме ъгли по 15°, тогава можем да разделим окръжността на 12 равни дъги от по 30°.

(1) В точка M се пресичат хордите $2-10$ и $3-11$. Разглеждаме $\triangle 2-5-11$: с помощта на синусовия вариант на Теоремата на Чева получаваме вярното равенство: $\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}.\dfrac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ}.\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 1$. Тогава хордите $2-10$, $3-11$ и $5-12$ се пресичат в една точка. Аналогично през същата точка M минава и $1-8$. Следователно като вътрешен ъгъл за окръжността $\sphericalangle AMB$ е равен на полусбора от двете му съответни дъги, т.е. $\sphericalangle AMB = 60^\circ$.



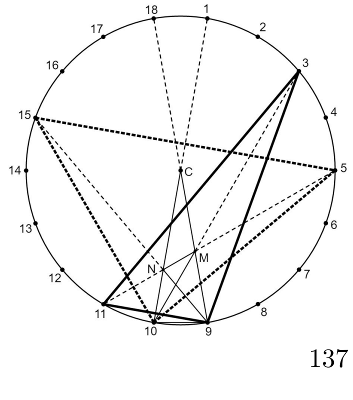
(2) Да разгледаме $\triangle 2-8-12$. Диагоналите $2-10$, $1-8$ и $5-12$ са ъглополовящи на ъглите му, съответно точка M е център на вписаната му окръжност. Аналогично точка M е център и на вписаната в $\triangle 1-5-11$ окръжност, откъдето следва, че диагоналите $1-8$, $2-10$, $3-11$ и $5-12$ се пресичат в точка M, така отново намираме, че $\triangle AMB = 60^\circ$.

Задача 2. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с $\sphericalangle C = 20^\circ$. Точките M и N, съответно от страните BC и AC, са такива, че $\sphericalangle BAM = 60^\circ$ и $\sphericalangle ABN = 50^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMN$.



Решение. Забелязваме, че $\triangle ABN$ е равнобедрен, защото $\sphericalangle ABN = \sphericalangle ANB$. Това ни насочва към построение, което да доведе до появата на равностранен триъгълник. Ако точка $P \in BC$ е такава, че $\sphericalangle BAP = 20^\circ$, тогава $\triangle ABP$ е равнобедрен ($AB = AP$), откъдето $\triangle ANP$ става равнобедрен с ъгъл 60°, т.е. равностранен. Но $\triangle AMP$ също е равнобедрен ($AP = PM$) с остри ъгли от по 40°. Също така $\triangle MNP$ е равнобедрен ($NP = MP$) и ъгълът при върха му е 40°. Тогава се намира, че търсеният $\sphericalangle AMN = 30^\circ$.

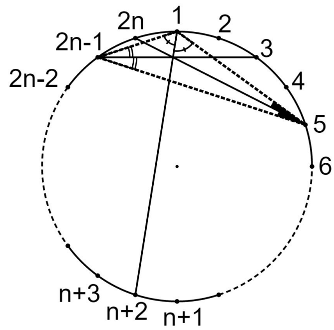
Друго възможно построение е на права през M, успоредна на основата AB, която пресича бедрото AC в точка P. Означаваме пресечната точка на AM и BP с Q. Тогава $\triangle ABQ$ и $\triangle MPQ$ са равностранни. Обаче $AB = AN$, $\triangle ANQ$ е равнобедрен и $\sphericalangle NQA = 80^\circ$. Но $\sphericalangle PQM = 60^\circ$, следователно $\sphericalangle NQP = 40^\circ$, откъдето $\triangle NPQ$ е равнобедрен. От еднаквостта на $\triangle MNP$ и $\triangle MNQ$ следва, че $\sphericalangle AMN = 30^\circ$.



Обобщение. Да разгледаме окръжността с център върха на триъгълника и радиус, равен на бедрото му. Имаме вписани ъгли, кратни на 10°, заради което разделяме окръжността на 18 равни дъги по 20°.

Тогава отново с помощта на синусовия вариант на Теоремата на Чева за $\triangle 3-9-11$ и вярното равенство $\dfrac{\sin 20}{\sin 40}\cdot\dfrac{\sin 70}{\sin 30}\cdot\dfrac{\sin 10}{\sin 10} = 1$ получаваме, че хордите $3-10$, $5-11$ и $9-18$ се пресичат в една точка (M). Аналогично, разглеждайки $\triangle 5-10-15$, получаваме, че хордите $1-10$, $5-11$ и $9-15$ се пресичат в една точка (N). Може да се използва и че точка N е център на вписаната окръжност в $\triangle 1-9-11$. Тогава търсеният $\sphericalangle AMN$ е равен 30°.

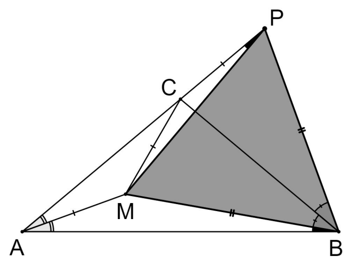
Разглеждайки изложените решения, можем да се замислим какви разновидности на тези задачи можем да създадем. В направата на всяка ще бъдат подходящо подбрани диагонали на правилен многоъгълник, минаващи през една точка. Първо ще докажем една лема, която е дадена като задача 6.114 на стр. 163 в книгата [2]. От тази лема ще се раждат нататъшните ни идеи за задачи.



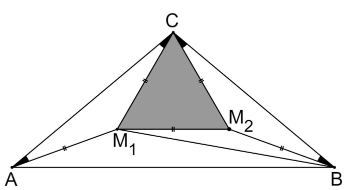
Лема. *В правилен $2n$-ъгълник диагоналите $1-(n+2)$, $3-(2n-1)$ и $5-2n$ се пресичат в една точка.*

Доказателство. Разглеждаме $\triangle 1-5-(2n-1)$. В него въпросните диагонали са ъглополовящи на ъглите му. Следователно се пресичат в една точка (центърът на вписаната му окръжност).

Задача 3. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ $(AC = BC)$ с $\sphericalangle C = 100^\circ$. Точка M от вътрешността му е такава, че $\sphericalangle MAB = 20^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 10^\circ$. Да се намери $\sphericalangle BCM$.

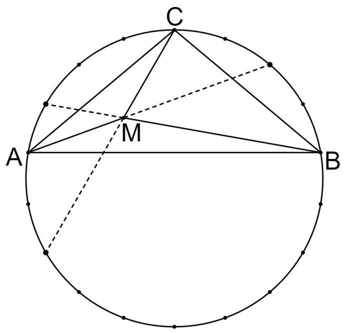


Решение. Ще разгледаме подход с допълнително построение, което води до поява на **равностранен триъгълник**. Нека точка $P \in AC^{\rightarrow}$ е такава, че $AP = AB$. От еднаквостта на $\triangle BAM$ и $\triangle PAM$ следва, че $BM = PM$, но $\sphericalangle MBP = 60^\circ$, откъдето $\triangle BMP$ е равностранен. Тогава BC е симетрала на PM, откъдето $CM = CP$ и достигаме до $\sphericalangle BCM = 80^\circ$.



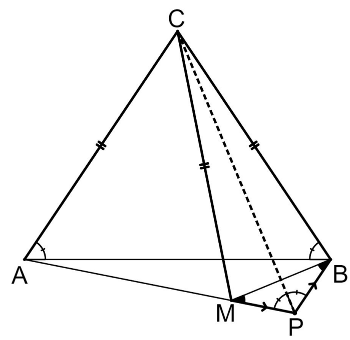
В тази задача можем отново да ползваме **единствеността** на **точка** M. Нека точка M_1 от вътрешността на триъгълника е такава, че $\sphericalangle BAM_1 = \sphericalangle CAM_1 = \sphericalangle ACM_1 = 20^\circ$. Ако докажем, че $\sphericalangle M_1BA = 10^\circ$, то M_1 и M съвпадат и търсеният $\sphericalangle BCM = 80^\circ$.

Нека M_2 е вътрешна за триъгълника точка, за която $\sphericalangle M_2CB = \sphericalangle M_2BC = 20^\circ$. Тогава $\triangle ACM_1 \cong \triangle BCM_2$ и се получава, че $\triangle CM_1M_2$ е равностранен. $\triangle BM_1M_2$ е равнобедрен с ъгъл 160°, откъдето намираме, че $\sphericalangle M_1BA = 10^\circ$, с което задачата е решена.

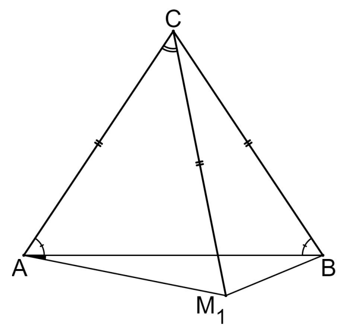


Възможно е задачата да се реши стандартно със **синусови теореми**, както и с разглеждане на **описаната** около $\triangle ABC$ **окръжност**, разделена на 18 равни дъги. Тогава с помощта на синусовия вариант на Теоремата на Чева се стига до извода, че три от диагоналите на правилния осемнадесетоъгълник се пресичат в една точка (M).

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$ с ъгли, за които е изпълнено $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 5 : 5 : 6$. Точка M е такава, че $3 \sphericalangle ABM = 6 \sphericalangle BAM = \sphericalangle ACB$, като точките C и M са в различни полуравнини спрямо правата AB. Намерете $\sphericalangle AMC$.

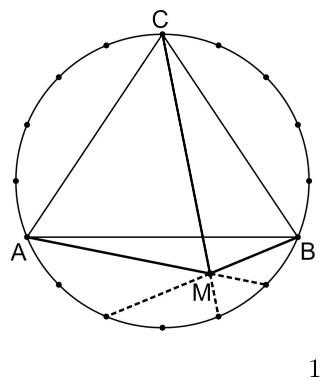


Решение. Означаваме големините на ъглите на триъгълника с $5x$, $5x$ и $6x$, съответно. Нека пресечната точка на правата AM и **правата**, която минава през B и е **успоредна** на AC, е P. Тогава $\sphericalangle MBP = 3x$ и $\sphericalangle BPM = 10x$. От $\triangle BPM$ намираме, че $\sphericalangle PMB = 3x$, т.е. $PM = PB$. $ACBP$ е равнобедрен трапец, тогава $\sphericalangle ABC = \sphericalangle APC = 5x$. Следователно PC е ъглополовяща на $\sphericalangle MPB$, откъдето $\triangle CPM \cong \triangle CPB$ и $CM = CB$. Оттук достигаме до $\sphericalangle AMC = 6x = 67{,}5^\circ$.



И в тази задача можем да използваме **единствеността на точка** M. Нека точка M_1 е външна за триъгълника и е такава, че $\sphericalangle M_1CA = 4x$ и $\sphericalangle M_1AB = x$. Ако докажем, че $\sphericalangle M_1BA = 2x$, то точките M_1 и M ще съвпадат и задачата на практика е решена. Разглеждайки $\triangle AM_1C$, намираме, че $\sphericalangle CM_1A = 6x$, откъдето $AC = CM_1$. Но $AC = BC$, следователно $\triangle BCM_1$ е равнобедрен. Тогава $\sphericalangle ABM_1 = 2x$ и точките M и M_1 съвпадат.

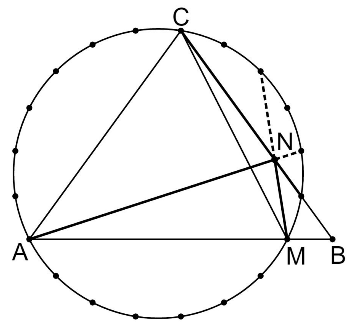
Можем да решим задачата и като разгледаме описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Тогава от доказаната **лема** следва, че хордите, определени от правите AM, BM и CM, са **диагонали** на правилен шестнадесетоъгълник, които се пресичат в една точка. Оттук достигаме до $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ACB$.



(Задача 4. може да бъде формулирана и така: Даден е $\triangle ABC$ с ъгли, за които е изпълнено $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 3 : 3 : 2$. Точките M и N, съответно от страните BC и AC, са такива, че $\sphericalangle BAM = \dfrac{2}{3} \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABN = \dfrac{5}{6} \sphericalangle ABC$. Да се намери $\sphericalangle AMN$.

Тук разглеждаме окръжността, описана около $\triangle ABN$, и я разделяме на 16 равни дъги.)

Задача 5. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) с $\sphericalangle C = 72^\circ$. Точките M и N, съответно от страните AB и BC, са такива, че $\sphericalangle ACM = 63^\circ$ и $\sphericalangle CAN = 36^\circ$. Да се намери $\sphericalangle CMN$.



Решение. Тук разглеждаме описаната около $\triangle AMC$ окръжност. В нея хордите, определени от правите AN, CN и MN, са диагонали на правилен двадесетоъгълник, които се пресичат в една точка, което отново следва от доказаната лема. По подобен начин, както в предишните задачи, достигаме до $\sphericalangle CMN = 18^\circ$.

Заключение. Авторът се надява, че читателят ще се заинтригува от подходите и самостоятелно ще разшири темата чрез съставяне на нови задачи или решаване на някои от изложените чрез други подходи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Алексиева. Равностранни триъгълници за ученици, кандидатстващи след 7 клас, Математика плюс, 1 (2002), 53–54 [A. I. Aleksieva. Ravnostranni triagalnitsi za uchenitsi, kandidatstvashti sled 7 klas, Matematika plyus, 1 (2002), 53–54].

[2] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии, Москва, МЦНМО, 2006 [V. V. Prasolov. Zadachi po planimetrii, Moskva, MTSNMO, 2006].