Хипотеза на Суита

Николай Николов

27.02.2019 г.

Дефиниции

Нека D е област в $\mathbb{C}^n$, $z, w \in D$, и $X \in \mathbb{C}^n$.

Плюрикомплексната функция на Грийн и нейната инфинитезимална форма, метриката на Азукава, се дефинират като:

$$g_D(z, w) = \sup\{u(w) : u \in \mathrm{PSH}(D), u < 0, u(\zeta) < \log ||\zeta - z|| + C\},$$

$$A_D(z; X) = \limsup_{\lambda \to 0} \frac{\exp(g_D(z, z + \lambda X))}{|\lambda|}.$$

Нека $L_h^2(D)$ е Хилбертовото пространство на холоморфните функции с интегруем квадрат върху D. Да означим с K_D рестрикцията на ядрото на Бергман върху диагонала. Да припомним, че

$$K_D(z) = \sup\{|f(z)|^2 : f \in L_h^2(D), ||f||_{L^2(D)} \leq 1\}.$$

Хипотеза на Суита при $n = 1$ (1972)

$$(A_D)^2 \leq \pi K_D$$

Да отбележим, че $A_D(z)$ е логаритмичния капацитет на $\mathbb{C} \setminus D$ относно $z \in D$. Освен това, още Суита забелязва, че

$$\pi K_D = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log A_D.$$

Следователно хипотезата на Суита е еквивалентна на факта, че кривината на метриката $A_D|dz|$ е ограничена отгоре от -4.

$$(A_D)^2 \leq C\pi K_D$$

с $C = 750$ – Озава-Такегоши (1987); $C = 2$ – Блоцки (2007); $C = 1$ – Блоцки (2013).

Доказателство

Достатъчно е да се намери функция $f \in \mathcal{O}(D)$, за която $f(z) = 1$ и

$$||f||_{L^2(D)} \leq \sqrt{\pi}/A_D(z).$$

Това следва директно от оптималната версия на теоремата на Озава-Такегоши, която пък се оказва директно следствие от класическата оценка на Хьормандер за $\overline{\partial}$-задачата (1965).

Теорема. Нека G е псевдоизпъкнала област в $\mathbb{C}^n$, $H = G \cap \{z_n = 0\}$ и $0 \in D = G \cap \{z' = 0\}$. Тогава за всеки $f \in \mathcal{O}(H)$, и $\varphi \in \mathrm{PSH}(G)$ съществува холоморфно продължение F на f върху G такова, че

$$\int_G |F|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq \frac{\pi}{(A_D(0))^2} \int_H |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda'.$$

Кога се достига равенство? Обратно неравенство

Ако в неравенството на Суита равенство се достига в една точка, то се достига навсякъде. Това се случва тогава и само тогава, когато $D = G \setminus P$, където G е едносвързана област, а $P \subset G$ е затворено полярно множество (Донг-Вонг 2018).

Доказателството се основава на изследване на пълнотата на метриката на Бергман и на други свойства на хиперизпъкналите области.

От друга страна, слабо обратно неравенство на Суита е в сила за всяка крайно свързана област D (Н. 2015), т.е. съществува константа $c_D > 0$ така, че

$$(A_D)^2 \geq c_D . K_D$$

Примерът с венеца $E_r = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ показва, че константата не е универсална.

Хипотеза на Суита при $n > 1$

Изследвайки поднивата на g_D и и прилагайки методи, подобни на тези при класическата версия на хипотезата на Суита, Блоцки-Звонек (2015) доказват следния многомерен вариант на тази хипотеза:

$$K_D \geq 1/VA_D,$$

където D е псевдоизпъкнала област в $\mathbb{C}^n$, а $VA_D(z)$ е обемът на индикатрисата

$$IA_D(z) = \{X \in \mathbb{C}^n : A_D(z; X) \leq 1\}$$

Условието за псевдоизпъкналост е съществено. Наистина (Н. 2015), за всяка ограничена непсевдоизпъкнала област D в $\mathbb{C}^n$ с Дини гладка граница съществува редица $(z_j) \subset D$ така, че

$$\sup_j K_D(z_j) < \infty = \sup_j 1/VA_D(z_j).$$

Граничен вариант

Ако γ е изолирана нееднoточкова компонента на границата на област D в $\mathbb{C}$, то

$$\lim_{z \to \gamma} (A_D(z))^2 / K_D(z) = \pi.$$

От друга страна, γ е изолирана едноточкова компонента, то

$$K_D = K_{D \cup \gamma}, \; A_D = A_{D \cup \gamma}.$$

Ако D е строго псевдоизпъкнала област в $\mathbb{C}^n$, то

$$\lim_{z \to \partial D} K_D(z).VA_D(z) = 1.$$

Доказателството на равнинния вариант се основава на локализация и на теоремата на Риман, а на многомерния – на граничното поведение на на т. нар. squeezing function.

Обем на Каратеодори-Айзенман

За област D в $\mathbb{C}^n$ тази бихоломорфна инварианта се дефинира като

$$CE_D(z) = \sup\{|\det F'(z)|^2 : F \in \mathcal{O}(D, \Delta^n)\},$$

където $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Редица резултати водят към хипотезата, че

$$K_D \geq c_D . CE_D,$$

където c_D е константа.

Това неравенсто може да се разглежда и като аналог на известното неравенство

$$B_D \geq C_D,$$

където B_D / C_D е метриката на Бергман/Каратеодори.

Да припомним още, че $A_D \geq C_D$ и

$$C_D(z; X) = \sup\{|f'(z)X| : f \in \mathcal{O}(D, \Delta)\}.$$

Тогава $IA_D \subset IC_D$; в частност, $VA_D \leq VC_D$. Следователно за псевдоизпъкнали области хипотезата в началото би следвала от хипотезата на Суита и неравенство от вида

$$1/VC_D \geq c_D.CE_D.$$

Оказва се (Тома-Н. 2018), че за всяко n съществуват константи $C_n > c_n > 0$ така, че

$$C_n \geq VC_D.CE_D \geq c_n$$

за произволна област D в $\mathbb{C}^n$.

Доказателството се базира на равенството $C_D = C_{IC_D}$, на свойствата на т. нар. минимален базис на изпъкналата балансирана област IC_D и на подходяща интерпретация на CE_D в термините на C_D.