# Загадката $\mathbb{S}^6$

Олег Мушкаров

Национален колоквиум по математика
15 декември 2021 г.

# Гладки структури

## Дефиниция

Гладка структура върху топологично пространство е максимален $C^\infty$-атлас.

## Основен въпрос

Колко гладки структури допуска едно топологично многообразие?

## Примери

- Всяко топологично многообразие от размерност $\leq 3$ допуска единствена гладка структура.
- В 1956 г. J. Milnor построява първия пример на екзотична гладка структура върху $\mathbb{S}^7$.
- В размерности $\geq 4$ има препятствия за съществуване на гладки структури

# Гладки структури върху $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}^n$

## Гладки структури върху $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ има единствена гладка структура при $n \neq 4$. (J. Stallings, 1962).
- Първи примери на екзотични гладки структури върху $\mathbb{R}^4$. (M. Freedman, 1982)
- Неизброимо много различни гладки структури върху $\mathbb{R}^4$. (C. Taubes,1987).

## Гладки структури върху $\mathbb{S}^n$

Нека $s(n)$ е броя на гладките структури върху сферата $\mathbb{S}^n$. Тогава $s(n) = 1; n = 1; 2; 3; 5; 6; s(4) =???; s(7) = 28; s(8) = 2; s(9) = 8; s(10) = 6; s(11) = 992; s(12) = 1; s(13) = 3; s(14) = 2; s(15) = 16256$. (Milnor-Kervaire, 1963)

# Комплексни структури

## Дефиниция

Комплексна структура върху топологично пространство е максимален холоморфен атлас.

## Примери на компактни комплексни многообразия

- Двумерната сфера $\mathbb{S}^2$ и по-общо всяка ориентирана 2-мерна повърхнина в $\mathbb{R}^3$.
- Комплексните торове $\mathbb{T}^n = \mathbb{C}^n/\Lambda$, където $\Lambda$ е решетка в $\mathbb{C}^n$, разглеждано като реално векторно пространство.
- Комплексните проективни пространства $\mathbb{CP}^n = \{$комплексните прави през началото на $\mathbb{C}^n\} = U(n+1)/U(n) \times U(1)$.

# Почти комплексни структури

## Основен въпрос

Кога едно гладко многообразие допуска комплексна структура?

## Дефиниция ( C. Ehresmann, 1947)

- $M$ - гладко многообразие, $TM$ - допирателното разслоение на $M$.
- $J : TM \longrightarrow TM$, $J^2 = -Id$.

## Примери

- Умножението с $i = \sqrt{-1}$ в холоморфните допирателни пространства на комплексно многообразие.
- Сферата $\mathbb{S}^6$ (C. Ehresmann, A. Kirchhoff, 1947) и по-общо всяка ориентирана хиперповърхнина в $\mathbb{R}^7$ (E. Calabi, 1958).

# Интегруеми почти комплексни многообразия

## Дефиниция

Една почти комплексна структура се нарича интегруема ако се дефинира от комплексна структура.

## Тензор на Nijenhuis

$$N_J(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY].$$

## Теорема(Newlander-Nirenberg, 1954)

Една почти комплексна структура $J$ е интегруема тогава и само тогава, когато $N_J = 0$.

# Почти комплексни сфери

## Класически резултати

- H. Hopf, 1947 : *Сферите* $\mathbb{S}^4$ *и* $\mathbb{S}^8$ *не допускат почти комплексни структури.*
- A. Kirchhoff, 1947 : *Конструкция на почти комплексната структура върху* $\mathbb{S}^6$ *с помощта на октонионите.*
- A. Kirchhoff, 1947 : *Ако* $\mathbb{S}^n$ *има п.к. структура, то* $\mathbb{S}^{n+1}$ *е паралелизуема.*
- Eckmann-Frohlicher, Ehresmann-Liberman, 1951 : *Почти комплексната структура върху* $\mathbb{S}^6$ *дефинирана с октонионите е неинтегруема.*
- Borel-Serre, 1953 : *Единствените сфери допускащи почти комплексни структури са* $\mathbb{S}^2$ *и* $\mathbb{S}^6$.

# Съществува ли комплексна $\mathbb{S}^6$?

## Въпрос ( H. Hopf, 1946, C. Ehresmann, 1947, F. Hirzebruch, 1954, P. Libermann, 1955)

Съществува ли комплексна структура върху $\mathbb{S}^6$?

## Грешни и непотвърдени доказателства

- Alfred Adler , *The second fundamental forms of* $\mathbb{S}^6$ *and* $\mathbb{CP}^n$, Amer. Journ. Math. 91, 657-670 (1969)
- Chuan-Chih Hsiung, *Nonexistence of a complex structure on the six-sphere*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, Taiwain 14 (1986), 231-247, Selected papers of Chuan-Chih Hsiung, World Scientific 2001.
- Gabor Etesi 2005-2008 - не съществува, 2008-2016 - съществува, Journ. Math. Phys. 56, 043508-1-043508-22 (2015), Erratum: Journ. Math. Phys. 56, 099901- 1 (2015).
- Michael F. Atiyah, *The Non-Existent Complex 6-Sphere*, 2016, arxiv.org/abs/1610. 09366

# Ортогонални комплексни структури

**Теорема (A. Blanchard, 1953, C. Le Brun, 1987)**

Не съществуват комплексни структури върху $\mathbb{S}^6$, които са ортогонални относно стандартната метрика.

**Обобщение (Davidov-Grantcharov-Mushkarov, 1994, Bor-Hernandez-Lamoneda, 1998, Kruglikov, 2017)**

Не съществуват комплексни структури върху $\mathbb{S}^6$, които са ортогонални относно метрики близки до стандартната.

**Достатъчно условие (Bor-Hernandez-Lamoneda, Kruglikov )**

Нека $g$ е Риманова метрика върху $\mathbb{S}^6$ и нека $\{\lambda_{\mathrm{min}} \leq \cdots \leq \lambda_{\mathrm{max}}\}$ е спектърът на нейния кривинен оператор. Ако $0 < \lambda_{\mathrm{min}} < \lambda_{\mathrm{max}} < 7/5\lambda_{\mathrm{min}}$ , то върху $\mathbb{S}^6$ не съществува комплексна структура, която е ортогонална относно $g$.

# Туисторни методи

## Туисторно разслоение

- $(M, g)$ - ориентирано Риманово многообразие от размерност $2n$.
- $\pi : Z \longrightarrow M$ - туисторното разслоение със слой $SO(2n)/U(n)$.
- $Z$ притежава Риманова метрика $h$, за която $\pi$ е Риманова субмерсия с тотално геодезични слоеве и почти комплексна структура $J_{ahs}$, която е ортогонална относно $h$. В размерност 4 тя е въведена от Atiyah-Hitchin-Singer, 1978.
- Структурата $J_{ahs}$ е интегруема т.с.т., когато $dimM = 4$ и метриката $g$ е автодуална или $dimM > 4$ и метриката $g$ е локално конформно плоска.

# Туисторни методи

### Теорема (Eells-Salamon-O'Brian-Rawnsley, 1985)

Една ортогонална почти комплексна структура $J$ върху Риманово многообразие $(M, g)$ е интегруема т.с.т, когато сечението $J : (M, J) \longrightarrow (Z, J_{ahs})$ на туисторното разслоение е холоморфно изображение. В този случай образът $J(M)$ лежи в нулевото множество на $N_{J_{ahs}}$.

### Теорема (F.Burstall-J. Rawnsley, 1990)

Нека $M$ е компактно Риманово симетрично пространство. Тогава всяка свързана компонента на нулевото множество на $N_{J_{ahs}}$ е флагово многообразие холоморфно вложено в $(Z, J_{ahs})$.

**Теорема (Burstall-Mushkarov-Grantcharov-Rawnsley, 1993)**

Всяко компактно вътрешно Риманово симетрично пространство с ортогонална комплексна структура е Ермитово симетрично и комплексната структура е инвариантна.

**Примери (C. Le Brun, D. Burns, F. Burstall)**

- $\mathbb{S}^{2n} = SO(2n+1)/SO(2n)$ , $\mathbb{CP}^n = U(n+1)/U(n) \times U(1)$
- $G_k(\mathbb{C}^{n+k}) = U(n+k)/U(n) \times U(k)$ , $Sp(n)/U(n)$.

# Приносът на S.-S. Chern

## Дефиниция

Келеровата форма на едно почти Ермитово многообразие $(M, g, J)$ е 2-формата $\Omega$ дефинирана с равенството $\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$.

## Теорема (S.-S. Chern, 2004, R. Brayant,2014 )

Не съществува комплексна структура върху $\mathbb{S}^6$, която е съвместима с Келеровата форма на нейната стандартна почти Ермитова структура.

## Въпрос

Вярна ли е теоремата на S.-S. Chern за 2-форми в околност на стандартната Келерова форма върху $\mathbb{S}^6$?


Shiing Shen Chern

# Хипотезата на S.-T. Yau

### Нерешени въпроси в геометрията-списъкът на S.-T. Yau

*Shing-Tung Yau, Open problems in geometry. In Differential geometry: partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990), volume 54 of Proc. Sympos. Pure Math., pages 1-28. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.*

### Хипотеза (S.-T. Yau,1993)

Всяко почти комплексно многообразие от размерност $\geq 6$ притежава комплексна структура.

### Забележка

Хипотезата на S.-T. Yau не е вярна в размерност 4. Първите примери на почти комплексни многообразия, които не допускат комплексни структури са построени от A. Van de Ven през 1966 г.