# Бернщайн-Гама функции и теория на вероятностите

Национален колоквиум по математика

Институт по Математика и Информатика, БАН

Младен Савов

26.01.2022

Случайна величина е изображението $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ във вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Случайна величина е изображението $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ във вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Не разполагаме с $\xi(\omega), \omega \in \Omega$, затова работим с

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in (a, b)\}\right) = \int_a^b \mathbb{P}\left(\xi \in dx\right).$$

Случайна величина е изображението $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ във вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Не разполагаме с $\xi(\omega), \omega \in \Omega$, затова работим с

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in (a, b)\}\right) = \int_a^b \mathbb{P}\left(\xi \in dx\right).$$

Мярката $\mathbb{P}\left(\xi \in dx\right), \mathbb{P}\left(\xi \in \mathbb{R}\right) = 1$, е разпределение на $\xi$ и дефинира очакванията

$$\mathbb{E}\left[f(\xi)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbb{P}\left(\xi \in dx\right).$$

- $\mathbb{P}(\xi = 0) = \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{1}{2}$ - бинарен равновероятен експеримент;
- $\mathbb{P}(\xi \in dx) = e^{-x} 1_{x>0} dx$ - безпаметност (експоненциално разпределение);
- $\mathbb{P}(\xi \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - най-често важното разпределение (нормално разпределение).

## Примери

- $\mathbb{P}(\xi = 0) = \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{1}{2}$ - бинарен равновероятен експеримент;
- $\mathbb{P}(\xi \in dx) = e^{-x}1_{x>0}dx$ - безпаметност (експоненциално разпределение);
- $\mathbb{P}(\xi \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ - най-често важното разпределение (нормално разпределение).

# Примери

- $\mathbb{P}(\xi = 0) = \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{1}{2}$ - бинарен равновероятен експеримент;
- $\mathbb{P}(\xi \in dx) = e^{-x} 1_{x>0} dx$ - безпаметност (експоненциално разпределение);
- $\mathbb{P}(\xi \in dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - най-често важното разпределение (нормално разпределение).

# Как изучаваме $\mathbb{P}(\xi \in dx)$?

Често използваме:

- трансформация на Фурие -

$$\mathcal{F}_\xi(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{i\lambda\xi}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\mathbb{P}(\xi \in dx);$$

- трансформация на Мелин -

$$\mathcal{M}_\xi(z) = \mathbb{E}\left[\xi^{z-1}\right] = \int_0^{\infty} x^{z-1}\mathbb{P}(\xi \in dx);$$

- трансформация на Лаплас -

$$L_\xi(z) = \mathbb{E}\left[e^{-z\xi}\right] = \int_0^{\infty} e^{-zx}\mathbb{P}(\xi \in dx).$$

# Как изучаваме $\mathbb{P}(\xi \in dx)$?

Често използваме:

- трансформация на Фурие -

$$\mathcal{F}_\xi(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{i\lambda\xi}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\mathbb{P}(\xi \in dx);$$

- трансформация на Мелин -

$$\mathcal{M}_\xi(z) = \mathbb{E}\left[\xi^{z-1}\right] = \int_0^{\infty} x^{z-1}\mathbb{P}(\xi \in dx);$$

- трансформация на Лаплас -

$$L_\xi(z) = \mathbb{E}\left[e^{-z\xi}\right] = \int_0^{\infty} e^{-zx}\mathbb{P}(\xi \in dx).$$

Често използваме:

- трансформация на Фурие -

$$\mathcal{F}_\xi(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{i\lambda\xi}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\mathbb{P}(\xi \in dx);$$

- трансформация на Мелин -

$$\mathcal{M}_\xi(z) = \mathbb{E}\left[\xi^{z-1}\right] = \int_{0}^{\infty} x^{z-1}\mathbb{P}(\xi \in dx);$$

- трансформация на Лаплас -

$$L_\xi(z) = \mathbb{E}\left[e^{-z\xi}\right] = \int_{0}^{\infty} e^{-zx}\mathbb{P}(\xi \in dx).$$

Често използваме:

- трансформация на Фурие -

$$\mathcal{F}_\xi(\lambda) = \mathbb{E}\left[e^{i\lambda\xi}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\mathbb{P}(\xi \in dx);$$

- трансформация на Мелин -

$$\mathcal{M}_\xi(z) = \mathbb{E}\left[\xi^{z-1}\right] = \int_0^{\infty} x^{z-1}\mathbb{P}(\xi \in dx);$$

- трансформация на Лаплас -

$$L_\xi(z) = \mathbb{E}\left[e^{-z\xi}\right] = \int_0^{\infty} e^{-zx}\mathbb{P}(\xi \in dx).$$

Гама функцията е единствено решение на

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1,$$

сред трансформациите на Мелин на случайни величини, т.е.

$$\Gamma(z) = \mathcal{M}_{\mathbf{e}}(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

$$\Gamma(n+1) = n! = Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\mathrm{o}(1)).$$

1

# Асимптотика на Стирлинг

$$\Gamma(n+1) = n! = Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\mathrm{o}\,(1)).$$

По-общо[1]

$$\Gamma(z) = \frac{C+\mathrm{o}\,(1)}{\sqrt{1+z}}e^{\int_{1\mapsto z}\log_0(\chi)d\chi}$$

и

$$|\Gamma(a+ib)| = \left|\frac{C+\mathrm{o}\,(1)}{\sqrt{1+a+ib}}\right|e^{\int_1^a \ln(|v|)dv}e^{-\int_0^b \arg(a+iv)dv}.$$

[1] $\Gamma(\chi+1) = \chi\Gamma(\chi)$

# Асимптотика на Стирлинг при фиксирано $\mathrm{Re}(z) = a > 0, z = a + ib$

$$\ln|\Gamma(a+ib)| = -\frac{\pi}{2}|b|(1 + o(1)).$$

$\phi$ е функция на Бернщайн $\iff$

$$\phi(z) = q + dz + \int_0^\infty (1 - e^{-zy})\mu(dy), \mathtt{Re}(z) \geq 0,$$

където $q, d \geq 0$ и $\int_0^\infty \min\{y, 1\}\mu(dy) < \infty$.

$$\phi'(z) = d + \int_0^\infty e^{-zy} y\mu(dy) = \int_0^\infty e^{-zy} \left( \underbrace{d\delta_0(dy) + y\mu(dy)}_{\text{мярка на Радон на } [0,\infty)} \right)$$

## Функции на Бернщайн - примери

- $\phi(z) = z$;
- $\phi(z) = z^{\alpha}, \alpha \in (0, 1)$;
- $\phi(z) = q + \log(1 + z)$.

За всяко $\phi$ уравнението

$$f(z+1) = \phi(z) f(z), \quad f(1) = 1, \mathtt{Re}(z) > 0,$$

2

За всяко $\phi$ уравнението

$$f(z+1) = \phi(z) f(z), \quad f(1) = 1, \mathrm{Re}(z) > 0,$$

има единствено решение от вида

$$W_\phi(z) = \mathbb{E}\left[Y^{z-1}\right] = \int_0^\infty y^{z-1} \mathbb{P}\left(Y \in dy\right),$$

наречено функция на Бернщайн-Гама[2].

[2] $\phi(z) = z \implies W_\phi(z) = \Gamma(z)$

$$W_\phi(z) = \frac{e^{-\gamma_\phi z}}{\phi(z)} \prod_{k\geq 1} \frac{\phi(k)}{\phi(k+z)} e^{-\frac{\phi'(k)}{\phi(k)} z}, \mathrm{Re}(z) > 0,$$

като регионът на аналитичност/мероморфност на $W_\phi$ зависи от:

- $\sup\{u \leq 0 : \phi(u) = 0\}$;
- $\inf\{a \leq 0 : \phi$ е аналитична на $\mathrm{Re}(z) > a\}$.

## Асимптотика на Стирлинг на $W_\phi$

Върху $\mathtt{Re}(z) > 0$

$$W_\phi(z) = e^{\int_{1\mapsto z} \log_0(\phi(\zeta))d\zeta} \times E_\phi(z).$$

Върху $\mathtt{Re}(z) > 0$

$$W_\phi(z) = e^{\int_{1\mapsto z} \log_0(\phi(\zeta))d\zeta} \times E_\phi(z).$$

По абсолютна стойност

$$\ln|W_\phi(a+ib)| = \left(\int_1^{a} \ln(\phi(v))dv - \int_0^{b} \arg\phi(a+iv)dv\right)(1+\mathrm{o}(1)).$$

Върху $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$W_\phi(z) = e^{\int_{1\mapsto z} \log_0(\phi(\zeta))d\zeta} \times E_\phi(z).$$

По абсолютна стойност

$$\ln|W_\phi(a+ib)| = \left(\int_1^a \ln(\phi(v))dv - \int_0^b \arg\phi(a+iv)dv\right)(1+\mathrm{o}(1)).$$

По абсолютна стойност при фиксирано $b$

$$\ln|W_\phi(a+ib)| = \int_1^a \ln(\phi(v))dv(1+\mathrm{o}(1)).$$

Върху $\mathrm{Re}(z) > 0$

$$W_\phi(z) = e^{\int_{1\mapsto z} \log_0(\phi(\zeta))d\zeta} \times E_\phi(z).$$

По абсолютна стойност

$$\ln|W_\phi(a+ib)| = \left(\int_1^a \ln(\phi(v))dv - \int_0^b \arg\phi(a+iv)dv\right)(1+\mathrm{o}(1)).$$

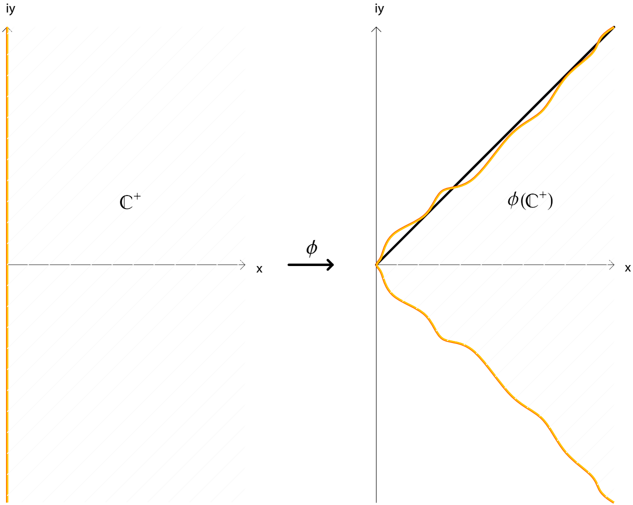
По абсолютна стойност при фиксирано $b$

$$\ln|W_\phi(a+ib)| = \int_1^a \ln(\phi(v))dv(1+\mathrm{o}(1)).$$

При фиксирано $a$

$$\ln|W_\phi(a+ib)| = -\frac{\int_0^b \arg\phi(a+iv)dv}{b} b(1+\mathrm{o}(1)).$$

## $\ln|W_\phi(iy)| \sim -\theta_{\text{средно}} \times |y|, \theta_{\text{средно}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\phi(z) = z^\alpha$ дава $\theta_{\text{средно}} = \frac{\pi}{2}\alpha$



Колекция от случайни величини $(X_t)_{t\geq 0}$, т.е. $X_t : \Omega \mapsto \mathbb{R}, t \geq 0$, се нарича стохастичен процес с начало $X_0$.

Марковски процес е стохастичен процес, чието бъдеще вероятностно се предопределя от настоящето.

Математически

$$\mathbb{E}_{X_0=x} f(X_{t+s}) = \mathbb{E}_{X_0=x} \mathbb{E}_{X_t} f(X_s).$$

Марковски процес е стохастичен процес, чието бъдеще вероятностно се предопределя от настоящето.

Математически

$$\mathbb{E}_{X_0=x} f(X_{t+s}) = \mathbb{E}_{X_0=x} \mathbb{E}_{X_t} f(X_s).$$

Ако $P_t f(x) = \mathbb{E}_{X_0=x} f(X_t)$, то

$$P_{t+s} f(x) = P_t P_s f(x) = P_s P_t f(x)$$

или очакванията на Марковския процес $(X_t)_{t \geq 0}$, са полугрупа $P = (P_t)_{t \geq 0}$ от оператори над $\mathbb{C}_0(\mathbb{R}), L^2(\cdot), \ldots$

Стационарност на Марковски процес е стабилизацията на разпределенията към стационарна мярка, т.е.

$$\mathbb{P}(X_t \in dx) \overset{\infty}{\approx} v(dx).$$

Стационарност на Марковски процес е стабилизацията на разпределенията към стационарна мярка, т.е.

$$\mathbb{P}\left(X_t \in dx\right) \overset{\infty}{\approx} v(dx).$$

На езика на полугрупите

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_{X_0=x} f(X_t) = \int f(y) v(dy) + \mathrm{o}\left(1\right) = \langle f, 1 \rangle_v \mathbf{1} + \mathrm{o}\left(1\right).$$

Нека $L^2(\mathbf{e}) = \{f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; \langle f, f\rangle_{\mathbf{e}} = \int_0^\infty f^2(x)e^{-x}dx < \infty\}$.

Нека $L^2(\mathbf{e}) = \{f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; \langle f, f\rangle_{\mathbf{e}} = \int_0^\infty f^2(x)e^{-x}dx < \infty\}$.

Полиномите на Лагер

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(x^n e^{-x})^{(n)}}{e^{-x}}, n \geq 0,$$

образуват ортонормиран базис в $L^2(\mathbf{e})$ и

$$f = \sum_{n\geq 0} \langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}} \mathcal{L}_n.$$

Съществува самоспрегната[3] полугрупа $Q = (Q_t)_{t\geq 0}$ в $L^2(\mathbf{e})$ :

[3] $\langle Q_t f, g\rangle_{\mathbf{e}} = \langle f, Q_t g\rangle_{\mathbf{e}}$

4

4

Съществува самоспрегната[3] полугрупа $Q = (Q_t)_{t\geq 0}$ в $L^2(\mathbf{e})$ :

$$Q_t \mathcal{L}_n = e^{-nt} \mathcal{L}_n;$$

3 $\langle Q_t f, g \rangle_{\mathbf{e}} = \langle f, Q_t g \rangle_{\mathbf{e}}$

4

4

Съществува самоспрегната[3] полугрупа $Q = (Q_t)_{t\geq 0}$ в $L^2(\mathbf{e})$ :

$$Q_t\mathcal{L}_n = e^{-nt}\mathcal{L}_n;$$
$$\langle Q_t f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}} = e^{-nt}\langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}};$$

3 $\langle Q_t f, g\rangle_{\mathbf{e}} = \langle f, Q_t g\rangle_{\mathbf{e}}$

4

4

Съществува самоспрегната[3] полугрупа $Q = (Q_t)_{t\geq 0}$ в $L^2(\mathbf{e})$ :

$$\begin{aligned} Q_t\mathcal{L}_n &= e^{-nt}\mathcal{L}_n; \\ \langle Q_t f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}} &= e^{-nt}\langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}}; \\ Q_t f &= \sum_{n\geq 0} e^{-nt}\langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}}\mathcal{L}_n; \, t > -\ln(\sin(\frac{\pi}{2})), \end{aligned}$$ [4]

[3] $\langle Q_t f, g\rangle_{\mathbf{e}} = \langle f, Q_t g\rangle_{\mathbf{e}}$

[4] $\ln|\Gamma(a+ib)| = -\frac{\pi}{2}|b| + o(|b|)$

[4] $\ln|\Gamma(a+ib)| = -\frac{\pi}{2}|b| + o(|b|)$

Съществува самоспрегнатата[3] полугрупа $Q = (Q_t)_{t\geq 0}$ в $L^2(\mathbf{e})$ :

$$\begin{aligned} Q_t\mathcal{L}_n &= e^{-nt}\mathcal{L}_n; \\ \langle Q_t f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}} &= e^{-nt}\langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}}; \\ Q_t f &= \sum_{n\geq 0} e^{-nt}\langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}}\mathcal{L}_n;\, t > -\ln(\sin(\frac{\pi}{2})),^{4} \\ Q_t f &= \langle f, 1\rangle_{\mathbf{e}}\mathbf{1} + \sum_{n\geq 1} e^{-nt}\langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}}\mathcal{L}_n. \end{aligned}$$

[3] $\langle Q_t f, g\rangle_{\mathbf{e}} = \langle f, Q_t g\rangle_{\mathbf{e}}$

[4] $\ln|\Gamma(a+ib)| = -\frac{\pi}{2}|b| + \mathrm{o}(|b|)$

[4] $\ln|\Gamma(a+ib)| = -\frac{\pi}{2}|b| + \mathrm{o}(|b|)$

$$Q_t f(x) = \mathbb{E}_{X_0=x}\left[f(X_t)\right],$$

където $X = (X_t)_{t\geq 0}$ е непрекъснат неотрицателен и стационарен Марковски процес със стационарна мярка $e^{-x}dx$.

[5] $(c^{-1}X_{ca_t})_{t\geq 0}, X_0 = cx$, е еквивалентен на $(X_t)_{t\geq 0}, X_0 = x, \forall c, x > 0$

$$Q_t f(x) = \mathbb{E}_{X_0=x}\left[f(X_t)\right],$$

където $X = (X_t)_{t \geq 0}$ е непрекъснат неотрицателен и стационарен Марковски процес със стационарна мярка $e^{-x}dx$.

$X$ е пространствено-времева трансформация на себеподобен[5], непрекъснат и неотрицателен Марковски процес.

[5] $(c^{-1}X_{c a_t})_{t\geq 0}, X_0 = cx$, е еквивалентен на $(X_t)_{t\geq 0}, X_0 = x, \forall c, x > 0$

Класът на себеподобни дясно-непрекъснати Марковски процеси предлага много по-богата структура. Означаваме[6] ги с $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ и поставяме

$$P = (P_t)_{t \geq 0},$$

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_{Y_0 = x} f(Y_t).$$

[6] работим със същата пространствено-времева трансформация, а не с оригиналния себеподобен процес

- $Y$ има стационарна мярка $\nu(x)dx, x > 0$.
- $\exists \phi$ такава, че

$$W_\phi(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\nu(x)dx, \mathrm{Re}(z) > 0,$$

- понеже $\Gamma(z)/W_\phi(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\iota(x)dx$, то

$$\exists \Lambda : L^2(\mathbf{e}) \mapsto L^2(\nu)^7 - \text{ линеен ограничен и необратим,}$$

такъв че

$$\Lambda f(x) = \int_0^\infty f(xy)\iota(y)dy$$

и е вярно преплитането

$$P_t\Lambda = \Lambda Q_t.$$

7

- $Y$ има стационарна мярка $\nu(x)dx, x > 0$.
- $\exists\phi$ такава, че

$$W_\phi(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\nu(x)dx, \mathtt{Re}(z) > 0,$$

- понеже $\Gamma(z)/W_\phi(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\iota(x)dx$, то

$$\exists\Lambda : L^2(\mathbf{e}) \mapsto L^2(\nu)^7 - \text{ линеен ограничен и необратим,}$$

такъв че

$$\Lambda f(x) = \int_0^\infty f(xy)\iota(y)dy$$

и е вярно преплитането

$$P_t\Lambda = \Lambda Q_t.$$

7

# Някои свойства на $Y$

- $Y$ има стационарна мярка $\nu(x)dx, x > 0$.
- $\exists\phi$ такава, че

$$W_\phi(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\nu(x)dx, \mathtt{Re}(z) > 0,$$

- понеже $\Gamma(z)/W_\phi(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\iota(x)dx$, то

$$\exists\Lambda : L^2(\mathbf{e}) \mapsto L^2(\nu)^7 - \text{ линеен ограничен и необратим,}$$

такъв че

$$\Lambda f(x) = \int_0^\infty f(xy)\iota(y)dy$$

и е вярно преплитането

$$P_t\Lambda = \Lambda Q_t.$$

[7] $L^2(\nu) = \{f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; \langle f, f\rangle_\nu = \int_0^\infty f^2(x)\nu(x)dx < \infty\}$

$(\Lambda\mathcal{L}_n)_{n\geq 0}$ са собствени функции, тъй като

$$P_t\Lambda\mathcal{L}_n = \Lambda Q_t\mathcal{L}_n = e^{-nt}\Lambda\mathcal{L}_n.$$

Пълнотата им следва от асимптотиката на $W_\phi(x)$, която влече детерминираност на моментите на $\nu(x)$.

За $g \in \Lambda L^2(\mathbf{e}) \subsetneq L^2(\nu)$

$$P_t g = P_t \Lambda f = \Lambda Q_t f$$

За $g \in \Lambda L^2(\mathbf{e}) \subsetneq L^2(\nu)$

$$\begin{aligned} P_t g &= P_t \Lambda f = \Lambda Q_t f \\ &= \Lambda \sum_{n\geq 0} e^{-nt} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}} \mathcal{L}_n \end{aligned}$$

За $g \in \Lambda L^2(\mathbf{e}) \subsetneq L^2(\nu)$

$$\begin{aligned} P_t g = P_t \Lambda f &= \Lambda Q_t f \\ &= \Lambda \sum_{n \geq 0} e^{-nt} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}} \mathcal{L}_n \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-nt} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}} \Lambda \mathcal{L}_n \end{aligned}$$

# Частично спектрално разлагане като следствие на $P_t\Lambda = \Lambda Q_t$

За $g \in \Lambda L^2(\mathbf{e}) \subsetneq L^2(\nu)$

$$
\begin{aligned}
P_t g = P_t\Lambda f = \Lambda Q_t f \\
&= \Lambda \sum_{n\geq 0} e^{-nt}\langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}}\mathcal{L}_n \\
&= \sum_{n\geq 0} e^{-nt}\langle f, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}}\Lambda\mathcal{L}_n \\
&= \sum_{n\geq 0} e^{-nt}\langle \Lambda^{-1} g, \mathcal{L}_n\rangle_{\mathbf{e}}\Lambda\mathcal{L}_n = \sum_{n\geq 0} e^{-nt}\langle g, (\Lambda^{-1})^{*}\mathcal{L}_n\rangle_{\nu}\Lambda\mathcal{L}_n.
\end{aligned}
$$

За $g \in \Lambda L^2(\mathbf{e}) \subsetneq L^2(\nu)$

$$\begin{aligned} P_t g = P_t \Lambda f &= \Lambda Q_t f \\ &= \Lambda \sum_{n\geq 0} e^{-nt} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}} \mathcal{L}_n \\ &= \sum_{n\geq 0} e^{-nt} \langle f, \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}} \Lambda \mathcal{L}_n \\ &= \sum_{n\geq 0} e^{-nt} \langle \Lambda^{-1} g, \mathcal{L}_n \rangle_{\mathbf{e}} \Lambda \mathcal{L}_n = \sum_{n\geq 0} e^{-nt} \langle g, (\Lambda^{-1})^* \mathcal{L}_n \rangle_{\nu} \Lambda \mathcal{L}_n. \end{aligned}$$

За кои $g \in L^2(\nu)$ и $t > 0$

$$P_t g = \sum_{n\geq 0} e^{-nt} \langle g, (\Lambda^{-1})^* \mathcal{L}_n \rangle_{\nu} \Lambda \mathcal{L}_n \,?$$

Доказва се, че в смисъл на разпределение

$$\nu_n(x) = \frac{(x^n \nu(x))^{(n)}}{\nu(x) n!}.$$

[8] $\ln \left| W_\phi(a+ib) \right| = -\theta_{\text{средно}} |b| + \mathrm{o}(|b|), \ \theta_{\text{средно}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Доказва се, че в смисъл на разпределение

$$\nu_n(x) = \frac{(x^n \nu(x))^{(n)}}{\nu(x) n!}.$$

Доказваме

- $\nu_n \in L^2(\nu)$,
- $||\nu_n||_\nu = \mathrm{O}\left(e^{(-\ln\sin(\theta_{\text{средно}}) + \mathrm{o}(1))n}\right)$[8],

благодарение на асимптотиката на Стирлинг на $W_\phi(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\nu(x)dx$, некласически Тауберови теореми, теория на себеразлагащите се случайни величини, принципи за максимума и други.

[8] $\ln\left|W_\phi(a+ib)\right| = -\theta_{\text{средно}}|b| + \mathrm{o}(|b|)$, $\theta_{\text{средно}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- $\forall f \in L^2(\nu)$ и $t > -\ln\sin(\theta_{\text{средно}})$;
- има случаи, при които $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ и $t > t(\theta_{\text{средно}})$.

- $\forall f \in L^2(\nu)$ и $t > -\ln\sin(\theta_{\text{средно}})$;
- има случаи, при които $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ и $t > t(\theta_{\text{средно}})$.

$$||P_t f - \langle f, 1\rangle_\nu \mathbf{1}||_\nu \leq h(t) \times \underbrace{e^{-t}}_{\text{спектрална празнина}},$$

като някои свойства на $h$ се определят от $W_\phi$[9].

[9] Patie, P and Savov, M. "Spectral expansions of non-self-adjoint generalized Laguerre semigroups", Memoirs of the American Mathematical Society, 183pages, 2021

Функциите на Бернщайн-Гама се появяват като основно или помощно средство в редица области на теоретичната и приложна стохастика.

Сред тях се включват:

- себеподобни Марковски процеси;
- финансова математика - Азиатски опции и полици;
- разклоняващи се процеси в случайни среди;
- случайни изображения и случайни фрагментации;
- математическа физика, биология и други.

[10] Patie, P. and Savov, M. "Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes", Electronic Journal of Probab., 101 pages, 2018

[11] Patie, P. and Savov, M. "A Wiener-Hopf Type Factorization for the Exponential Functional of Lévy Processes", Journal of the London Mathematical Society 86(3), 26 pages, 2012

[12] Minchev, M. and Savov, M. "Asymptotic of densities of exponential functionals of subordinators", 26 pages, 2022+

[13] Barker, A. and Savov, M. "Bivariate Bernstein-gamma functions and moments of exponential functionals of subordinators", Stochastic processes and their applications, 43 pages, 2021

Функциите на Бернщайн-Гама се появяват като основно или помощно средство в редица области на теоретичната и приложна стохастика.

Сред тях се включват:

- себеподобни Марковски процеси;
- финансова математика - Азиатски опции и полици;
- разклоняващи се процеси в случайни среди;
- случайни изображения и случайни фрагментации;
- математическа физика, биология и други.

[10] Patie, P. and Savov, M. "Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes", Electronic Journal of Probab., 101 pages, 2018

[11] Patie, P. and Savov, M. "A Wiener-Hopf Type Factorization for the Exponential Functional of Lévy Processes", Journal of the London Mathematical Society 86(3), 26 pages, 2012

[12] Minchev, M. and Savov, M. "Asymptotic of densities of exponential functionals of subordinators", 26 pages, 2022+

[13] Barker, A. and Savov, M. "Bivariate Bernstein-gamma functions and moments of exponential functionals of subordinators", Stochastic processes and their applications, 43 pages, 2021

Функциите на Бернщайн-Гама се появяват като основно или помощно средство в редица области на теоретичната и приложна стохастика.

Сред тях се включват:

- себеподобни Марковски процеси;
- финансова математика - Азиатски опции и полици;
- разклоняващи се процеси в случайни среди;
- случайни изображения и случайни фрагментации;
- математическа физика, биология и други.

[10] Patie, P. and Savov, M. "Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes", Electronic Journal of Probab., 101 pages, 2018

[11] Patie, P. and Savov, M. "A Wiener-Hopf Type Factorization for the Exponential Functional of Lévy Processes", Journal of the London Mathematical Society 86(3), 26 pages, 2012

[12] Minchev, M. and Savov, M. "Asymptotic of densities of exponential functionals of subordinators", 26 pages, 2022+

[13] Barker, A. and Savov, M. "Bivariate Bernstein-gamma functions and moments of exponential functionals of subordinators", Stochastic processes and their applications, 43 pages, 2021

Функциите на Бернщайн-Гама се появяват като основно или помощно средство в редица области на теоретичната и приложна стохастика.

Сред тях се включват:

- себеподобни Марковски процеси;
- финансова математика - Азиатски опции и полици;
- разклоняващи се процеси в случайни среди;
- случайни изображения и случайни фрагментации;
- математическа физика, биология и други.

[10] Patie, P. and Savov, M. "Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes", Electronic Journal of Probab., 101 pages, 2018

[11] Patie, P. and Savov, M. "A Wiener-Hopf Type Factorization for the Exponential Functional of Lévy Processes", Journal of the London Mathematical Society 86(3), 26 pages, 2012

[12] Minchev, M. and Savov, M. "Asymptotic of densities of exponential functionals of subordinators", 26 pages, 2022+

[13] Barker, A. and Savov, M. "Bivariate Bernstein-gamma functions and moments of exponential functionals of subordinators", Stochastic processes and their applications, 43 pages, 2021

Функциите на Бернщайн-Гама се появяват като основно или помощно средство в редица области на теоретичната и приложна стохастика.

Сред тях се включват:

- себеподобни Марковски процеси;
- финансова математика - Азиатски опции и полици;
- разклоняващи се процеси в случайни среди;
- случайни изображения и случайни фрагментации;
- математическа физика, биология и други.

[10] Patie, P. and Savov, M. "Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes", Electronic Journal of Probab., 101 pages, 2018

[11] Patie, P. and Savov, M. "A Wiener-Hopf Type Factorization for the Exponential Functional of Lévy Processes", Journal of the London Mathematical Society 86(3), 26 pages, 2012

[12] Minchev, M. and Savov, M. "Asymptotic of densities of exponential functionals of subordinators", 26 pages, 2022+

[13] Barker, A. and Savov, M. "Bivariate Bernstein-gamma functions and moments of exponential functionals of subordinators", Stochastic processes and their applications, 43 pages, 2021

Функциите на Бернщайн-Гама се появяват като основно или помощно средство в редица области на теоретичната и приложна стохастика.

Сред тях се включват:

- себеподобни Марковски процеси;
- финансова математика - Азиатски опции и полици;
- разклоняващи се процеси в случайни среди;
- случайни изображения и случайни фрагментации;
- математическа физика, биология и други.

[10] Patie, P. and Savov, M. "Bernstein-gamma functions and exponential functionals of Lévy processes", Electronic Journal of Probab., 101 pages, 2018

[11] Patie, P. and Savov, M. "A Wiener-Hopf Type Factorization for the Exponential Functional of Lévy Processes", Journal of the London Mathematical Society 86(3), 26 pages, 2012

[12] Minchev, M. and Savov, M. "Asymptotic of densities of exponential functionals of subordinators", 26 pages, 2022+

[13] Barker, A. and Savov, M. "Bivariate Bernstein-gamma functions and moments of exponential functionals of subordinators", Stochastic processes and their applications, 43 pages, 2021

Благодаря за вниманието!