

Как да направим математиката (по-)интересна?

Веселин Дренски
ИМИ – БАН, София
e-mail: drensky@math.bas.bg

Национален колковиум по математика
10 декември 2014

Обяснение на заглавието:

Ако математиката не е интересна, да стане интересна.

Ако е вече е интересна, да стане по-интересна.

Целта на доклада е

да покаже с конкретни примери, че редица важни математически факти могат да се формулират по начин, който ги прави по-интересни и по-разбираеми както за широката (включително нематематическа) аудитория, така и за професионалните преподаватели и изследователи-математици. Представените резултати включват математически фолклор и сериозни съвременни изследвания. Често такава по-достъпна формулировка прави резултатите не само по-нагледни, но и позволява намиране на неочаквани връзки между изглеждащи далече една от друга области на математиката.

Идея на доклада:

Вместо да решаваме задачи за басейни и тръби,



да решаваме:



Стадо слонове пие вода от езеро.

По същия начин да подходим към други, включително дълбоки математически резултати и проблеми.

През вековете отношението към математиката е било
твърде различно.

Сред интелектуалния елит на древна Гърция математиката
е била поставена в култ.

Прието е да се счита, че астрономията е единствената точна
наука, която има своя муза — Урания, музата на астрономията
и астрологията.



Урания

Урания е изобразявана с глобус и пергел в ръцете. Смята се, че тя е покровителка и на геометрията, а освен това се е грижила и за музиката, точните науки, измерванията, числата и нумерологията.

Има още една муза, свързана с математиката.

Полихимния е музата на религиозните химни и красноречието. В началото е била муза на танца, после на пантомимата, химните и сериозната поезия. Полихимния помагала да се запомни наученото. Изобразявана е като покрита с плащ девойка в замислена поза, със замечтано лице и свитък в ръка. Тя носи известност на писателите, чиито творби са си спечелили безсмъртна слава. Полихимния е позната и като муза на геометрията, съзерцанието и земеделието.



Полихимния

В периода 529 – 534 година от новата ера по заповед на император Юстиниан I се създава Corpus Iuris Civilis (Свод на гражданското право) – основополагаща колекция от трудове в областта на юриспруденцията. Глава 18, §2 на Книга 9 е озаглавена *“De maleficis et mathematicis et ceteris similibus”* (За злосторниците и математиците и други подобни на тях). В първия абзац се казва, че е по-лошо да умъртвиш човек с отрова, отколкото да го убиеш с меч. Това е малко шокиращ намек за геометрията, защото вторият абзац гласи *“Artem geometriae discere atque exerceri publice intersit. Ars autem mathematica damnabilis interdicta est.”*

Първото изречение означава: *“Изучаването и практикуването на изкуството на геометрията представлява публичен интерес.”* Преводът на второто изречение е *“Но прокълнатото изкуство математика е забранено.”* Единственото успокоение е, че по това време *“изкуството математика”* означава *“астрология”*.

От 1902 г. текстът *Artem geometriae discere atque exerceri publice interest* стои на печата на Немския математически съюз (основан през 1890 г.).



За сравнение, от 1923 г. печатът на Американското математическо дружество (основано през 1888 г.) показва гръцки храм заедно с прочутия надпис на Академията на Платон *“Никой, който не знае геометрия, не трябва да влиза тук.”*



Inscription over the door of
Plato's Academy:

ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσὶτω μοῦ τὴν στέγην

Ще продължим с три цитата:

Красота спасет мир.

Ф.М. Достоевский

Това е в знак на благодарност за поканата да изнеса този доклад към ръководителя на Колоквиума, който е тънък познавач на Достоевски.

Другите два цитата имат пряко отношение към темата и отразяват моето виждане към математиката.

There is no permanent place in the world
for ugly mathematics.

G.H. Hardy

You do not really understand something
unless you can explain it to your grandmother.

Albert Einstein

Следва цитат, който се отнася към алгебрата (но Есенин го е казал по друг повод):

Там, где вечно дремлет тайна,
Есть нездешние поля.

Сергей Есенин

и за да няма недоразумение кои са *нетукашните полета*

Раскинулось поле по модулю пять,
Вдали полиномы стояли.

от една позабравена песничка от Мехмата на МГУ

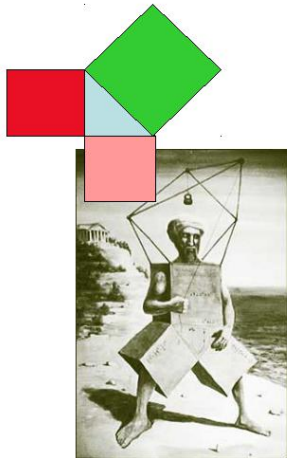
Гащите на Питагор

Навярно най-старата теорема, която може да се формулира по забавен и запомнящ се начин е Питагоровата теорема с нейното класическо доказателство, което се асоциира с “*гащите на Питагор*”:

Сумата от лицата на квадратите, построени върху катетите на правоъгълен триъгълник, е равна на лицето на квадрата, построен върху хипотенузата.

Піфагорові штани

Жартом названі теореми Піфагора, виникші в силу того, що раніше в шкільних підручниках ця теорема доказувалась через доказательство рівноправия суми площі квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, площі квадрата, побудованого на гіпотенузі цього трикутника. Побудовані на сторонах трикутника і розходящі в різні сторони квадрати нагадували школярам покрій чоловічих штанів, що породило наступний вірш: «Піфагорові штани — на всі сторони рівні».



Ето текстове от различни епохи и на различни езици.



Старогръцки

مجموع مربعي الضلعين المحيطين بها



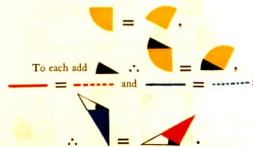
ليكن الزاوية ب آ ب من مثلث أ ب ج
 قائمة فاقول ان مربع ب ج يساوي مجموع
 مربعي أ ب و ب ج لانه نرسم في اضلاع
 مثلث أ ب ج مربعات ب د ه و أ ب ح
 أ ب ج من الشكل المتقدم ونخرج من نقطة أ
 خط آ ل موازيا لخط ب د بالشكل الواحد
 والثلاثين فلان زاوية أ ب د بالثلاثين
 بالشكل التاسع والعشرين وزاوية أ ب د
 اعظم من قائمة فزاوية ب آ ل اصغر منها
 خط آ ل يقطع خط ب ج اذا اخبرناه على استقامته في تلك الجهة
 الى غير النهاية فليقع خط ب ج على نقطة آ والبنية الى خط آ د على
 نقطة ل ونصل بين كل واحدة من نقطتي آ د آ ح ب ل بخط مستقيم
 فلان شكل واحد من زوايا ب آ ل و أ ب ح قائمة فخط آ ل خط
 مستقيم وكذلك أ ب آ ل بالشكل الرابع عشر ولان كل واحدة من زاويتي
 ح ب آ و ب آ ل قائمة فخط آ ل يوازي خط ب ج ولان كل واحدة من زاويتي
 أ ب ح و ب آ ل قائمة فخط آ ل يوازي خط ب ج والشكل الثامن والعشرين وإذا
 اخذنا زاوية أ ب ج مع كل واحدة من زاويتي ب ج د و ب ج ل يكون زاوية
 أ ب د كزاوية ح ب ج من مثلثي أ ب د و ب ج ل وضلع أ ب به كضلعي ب ج
 ب ج فبالشكل الرابع عشر مثلث أ ب د كمثلث ح ب ج لكن ب ج يساوي ب ل المتوازي
 الاضلاع ضعف مثلث أ ب د ومربع أ ج ضعف مثلث ح ب ج بالشكل
 الواحد والاربعين فربع أ ب كسط ب ل ولان شكل واحد من زاويتي
 ب ج د و ب ج ل قائمة فمخارطة زاوية أ ب ج مع كل واحدة منهما فتكون زاوية
 أ ب د قائمة متساويتين والاضلاع المحيطية بهما متساوية هي المتساوية
 فبالشكل الرابع عشر مثلث أ ب د كمثلث ب ج ل لكن مربع أ ج ضعف مثلث
 ب ج د و ب ج ل ضعف مثلث أ ب د والشكل الواحد والاربعين فربع
 أ ج كسط ب ل فالتصميم ثابت وذلك ما اردنا ان نبين
 ولهذا الشكل اختلاف وقوع فان مربع ب ج اما ان يقع في جهة القاعدة
 من زاوية ب آ ل او ينطبق على مثلث أ ب ج وعلى التقديرين فربع
 أ ج آ ل اما ان يقع غير منطبقين على مثلث أ ب ج او منطبقين عليه او
 يقع مربع أ ج متطابقا عليه ومربع أ ج غير منطبق او بالعكس وهذه
 ثمانية اوجه اما الاول فقد بيناه وله ثلثة اوضاع بحسب ضلعي أ ب
 بالتساوي والصغر والكبر وذلك ظاهر واما الثاني فبصالح آ ل اما ان يكون
 مساويا لصلع آ ل او اعظم او اصغر منه فنقطه آ ل اما ان ينطبق على



IN a right angled triangle
the square on the
hypotenuse is equal to
the sum of the squares of the sides, (—
and —).

On —, — and —
describe squares, (pr. 46.)

Draw || (pr. 31.)
also draw — and —.



Again, because — ||

Английски – 1847 г.

С Питагоровата теорема е свързан любопитен епизод във ФМИ (тогава ФММ) на СУ. В края на 60-те или началото на 70-те години на миналия век, преди лекция по алгебра на доц. Кирил Дочев в аудиторията има студенти по право. Когато доц. Дочев влиза, вижда на дъската надпис *Математиката е плебейски труд*. Тогава той казва:

Когато Питагор доказва своята теорема, той принася в дар на боговете триста бика. Оттогава говедата не обичат математика.

Има ефектно доказателство на Питагоровата теорема с линейна алгебра, но за целта трябва да се научим да умножаваме матрици.

Три семейства искат да отидат в заведение за бързо хранене и да си поръчат ядене съгласно таблицата.

					
Иванови	3	2	2	4	1
Петрови	2	3	1	2	3
Димитрови	4	5	3	6	2

Колко ще плати всяко семейство, ако отидат в McDonald's или в Kentucky Fried Chicken, ако цените са като в таблицата.

		
	3.99	3.29
	2.30	2.29
	5.20	4.99
	2.40	2.39
	0.99	1.29

																								
Ивановы	3	2	2	4	1					3.99	3.29									37.56	35.28			
Астровы	2	3	1	2	3					2.99	2.29									27.85	27.09			
Давантровы	4	5	3	6	2					5.20	4.99									59.44	56.50			
										2.40	2.39													
										0.99	1.29													

$$2 \times 3.29 + 3 \times 2.29 + 1 \times 4.99 + 2 \times 2.39 + 3 \times 1.29 = 27.09$$

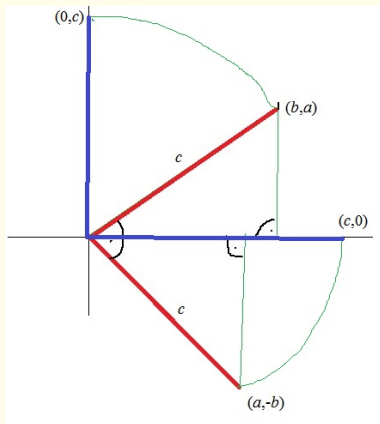
Доказателство на Питагоровата теорема с линейна алгебра

Нека a , b и c са дължините на катетите и хипотенузата в правоъгълния триъгълник $\triangle ABC$. В двумерното евклидово пространство разглеждаме линейни оператори $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с матрици

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

а $\mathcal{R}$ е ротацията на ъгъл $\beta = \angle B$ с матрица

$$R = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$



Очевидно е, че ако най-напред приложим оператора $\mathcal{F}$, а след това ротацията $\mathcal{R}$, ще получим оператора $\mathcal{G}$, т.е.

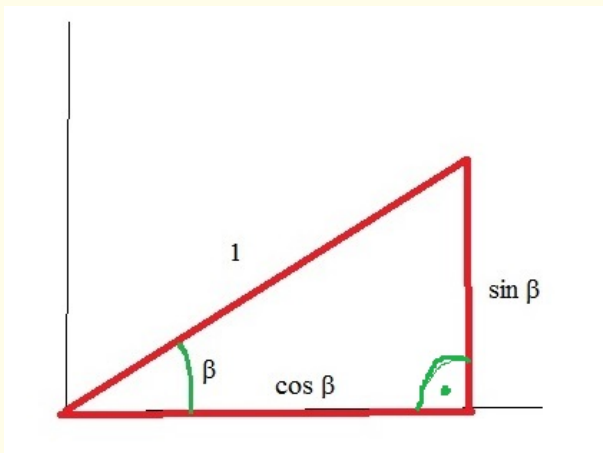
$$\mathcal{G} = \mathcal{R} \circ \mathcal{F}.$$

На матричен език това означава $G = RF$. Тъй като детерминантата на произведението на две квадратни матрици е равно на произведението от детерминантите на матриците, получаваме

$$\det(G) = \det(R) \det(F), \quad \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix},$$

$$c^2 = (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)(a^2 + b^2) = a^2 + b^2.$$

Не е ясно доколко “честно” е това доказателство на Питагоровата теорема, защото равенството $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ е еквивалентно на нея.



Един начин “да се измъкнем” е да използваме развитието в ред на тригонометричните и експоненциалната функции:

$$\cos z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z + i \sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} = e^{iz}, \quad \cos z - i \sin z = \sum_{n \geq 0} \frac{(-iz)^n}{n!} = e^{-iz},$$

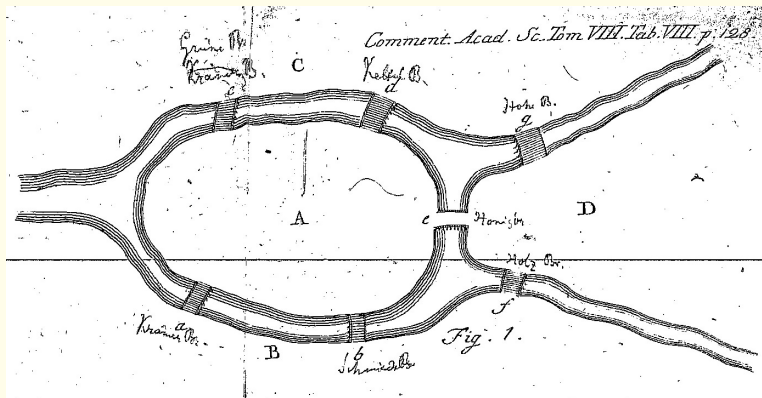
$$\cos^2 z + \sin^2 z = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = e^{iz} e^{-iz} = e^0 = 1.$$

Пак не е ясно доколко “честна” е тази добавка към доказателството, но поне се упражнявахме по линейна алгебра и анализ.

Начало на теория на графите

За начало на теорията на графите се приема известната статия на Ойлер за Кьонигсбергските мостове (която се счита и за първата статия по топология) “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” (“Решение на проблем, свързан с геометрията на местоположението”), представена пред Ст. Петербургската академия на науките на 26 август 1735 г. и публикувана в “Коментариите” на Академията през 1741 г. В нея Ойлер решава известната задача за Кьонигсбергските мостове.

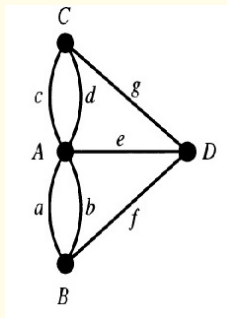
Твърди се, че в началото на XVIII век жителите на Кьонигсберг (днес Калининград) обичали да правят неделни разходки по града. През града минава реката Прегел (днес Преголя), която го разделя на четири части, съединени със седем моста, както е показано в оригиналната статия на Ойлер.



Задачата, която жителите на града са формулирали сами, е да се направи разходка, която минава през всичките седем моста точно по веднъж, ако е възможно, връщайки се в началната точка на разходката.

В съвременна формулировка решението на Ойлер изглежда така.

Построяваме граф, чийто върхове са частите на сушата, на които е разположен Кьонигсберг. На всеки мост съпоставяме ребро, което свързва съответните върхове.



(В действителност, Ойлер не говори за графи. В този си вид графите се появяват едва през втората половина на XIX век.)

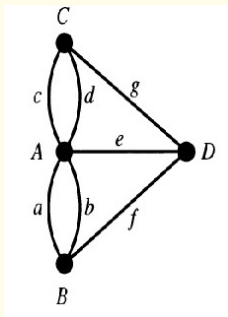
Теорема на Ойлер

За даден граф съществува път, който минава през всички ребра точно по веднъж тогава и само тогава, когато графът е свързан и броят на ребрата, които излизат от всеки връх (с изключение на най-много на два върха) е четно число.

Път с това свойство се нарича *Ойлеров път*.

В своята статия Ойлер доказва само необходимостта, а задоволително доказателство на достатъчността се появява едва през 1873 г. в публикувана посмъртно статия на Карл Хирхолцер (Carl Hierholzer).

Тъй като от всеки връх на графа с Кьонигсбергските мостове излизат нечетен брой ребра,



от теоремата следва, че в графа не съществува Ойлеров път, т.е. не е възможно да минем през всички мостове точно по веднъж.

Алгебри с полиномни тъждества

Алгебрите с полиномни тъждества (или PI-алгебрите) са важен клас от алгебри, който е достатъчно голям и съдържа всички комутативни и всички крайномерни алгебри. От друга страна, класът е “достатъчно малък”, за да има редица важни свойства, близки до тези на комутативните и крайномерните алгебри. PI-алгебрите се появяват в началото на XX век във връзка с изследванията по проективна геометрия, а в днешно време намират многобройни приложения в теорията на пръстените, теория на алгебрите с деление, комутативната и некомутиативната теория на инвариантите и др.

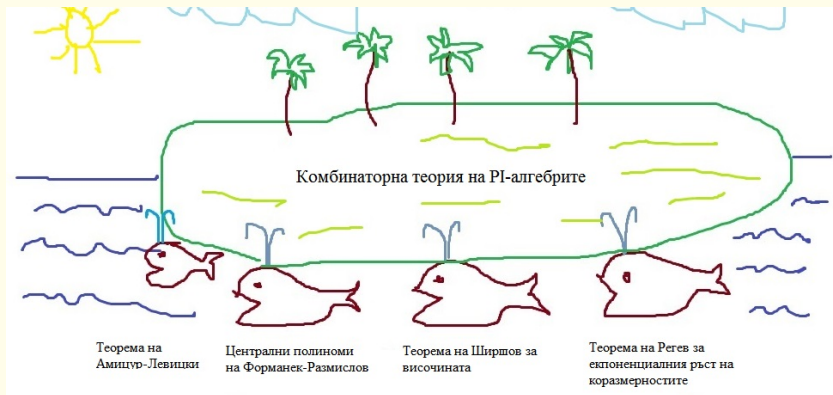
Комбинаторна теория на PI-алгебрите

В зависимост от методите на изследване и получените резултати теорията на PI-алгебрите има два основни дяла – структурна теория и комбинаторна теория, които често се преплитат.

Както древните са смятали, че Земята плува в Световния океан, носена от три кита, така и комбинаторната теория на PI-алгебрите се крепи на четири основни резултата, които са в основата на много други станали вече класически теореми:

- ▶ Теоремата на Амицур-Левицки (1950);
- ▶ Съществуването на централни полиноми за матричните алгебри – Форманек (1972), Размислов (1973);
- ▶ Теорема на Ширшов за височината (1957);
- ▶ Теорема на Регев за експоненциалния ръст на редицата от коразмерности (1972).

Всички тези резултати имат ефектни комбинаторни доказателства.



Теорема на Амицур-Левицки

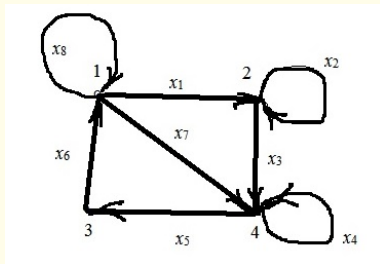
Матричната алгебра $M_n(R)$ от n -ти ред с елементи от произволен комутативен пръстен R удовлетворява стандартното твърдение от степен $2n$: Ако $x_1, \dots, x_{2n}$ са $2n$ матрици от $M_n(R)$, то

$$s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2n)} = 0.$$

(Сумирането се води по симетричната група S_{2n} от степен $2n$.)

Доказателство на Суон (R. Swan, 1963)

Достатъчно е да докажем теоремата, когато $x_1, \dots, x_{2n}$ са матрични единици и $R = \mathbb{Z}$. Нека $x_i = e_{p_i q_i}$, $i = 1, \dots, 2n$. Разглеждаме ориентиран граф с n върха $\{1, 2, \dots, n\}$ и с $2n$ ребра $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_{2n}, q_{2n})$.



$$x_1 = e_{12}, x_2 = e_{22}, x_3 = e_{24}, x_4 = e_{44},$$

$$x_5 = e_{43}, x_6 = e_{31}, x_7 = e_{14}, x_8 = e_{11}$$

Произведението

$$(-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2n)} = (-1)^\sigma e_{p_{\sigma(1)} q_{\sigma(1)}} \cdots e_{p_{\sigma(2n)} q_{\sigma(2n)}}$$

е равно на $(-1)^\sigma e_{p_{\sigma(1)} q_{\sigma(2n)}}$ ако $q_1 = p_2, q_2 = p_3, \dots, q_{2n-1} = p_{2n}$ и е 0 във всички останали случаи. С други думи единствените ненулеви стойности $\pm e_{p_{\sigma(1)} q_{\sigma(2n)}}$ се получават, когато

$$(p_{\sigma(1)}, q_{\sigma(1)}), (p_{\sigma(2)}, q_{\sigma(2)}), \dots, (p_{\sigma(2n)}, q_{\sigma(2n)})$$

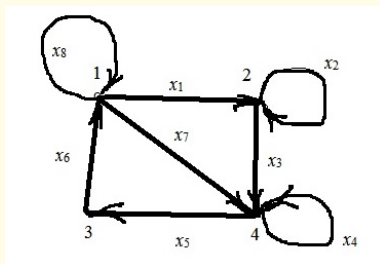
е Ойлеров път в графа, а знакът $\pm$ се определя от четността на субституцията σ .

Следователно

$$s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{p,q=1}^n a_{pq} e_{pq},$$

където a_{pq} е равно на разликата на броя на четните и нечетните Ойлерови пътища с начало p и край q .

Суон доказва, че *ако един ориентиран граф с n върха има $\geq 2n$ ребра, то броят на четните и нечетните Ойлерови пътища с фиксирани начало и край е един и същи*. В нашия случай това дава $a_{pq} = 0$, откъдето $s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = 0$.



Ойлерови пътища

$+$: $x_7 x_4 x_5 x_6 x_8 x_1 x_2 x_3$, $x_7 x_5 x_6 x_8 x_1 x_2 x_3 x_4$,

$+$: $x_8 x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 x_7 x_4$, $x_8 x_7 x_4 x_5 x_6 x_1 x_2 x_3$,

$-$: $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_8 x_7$, $x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 x_8 x_7 x_4$,

$-$: $x_8 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7$, $x_8 x_7 x_5 x_6 x_1 x_2 x_3 x_4$.

Проблем на Бърнсайд

През 1902 г. Бърнсайд поставя своя прочут проблем, който, заедно с проблема за класификацията на крайните прости групи, е една от главните движещи сили в теорията на групите на XX век. Има три варианта на проблема на Бърнсайд:

Нека G е крайно породена група такава, че всеки елемент на G е от краен ред.

- ▶ *Крайна ли е групата G ? (В тази форма на проблема не се иска редовете на елементите на G да бъдат ограничени отгоре.)*
- ▶ *Крайна ли е групата G , ако съществува естествено число k такова, че всеки елемент g в G удовлетворява уравнението $g^k = 1$?*
- ▶ *(Ограничен проблем на Бърнсайд) Ако крайната група G е породена от m елемента и удовлетворява условието $g^k = 1$ за всички $g \in G$, то съществува ли горна граница за реда на G , която зависи само от m и k ?*

Отрицателното решение на общия проблем на Бърнсайд е получено от Голод през 1964 г., използвайки конструкция на Голод и Шафаревич от теория на пръстените (включваща и аналитични методи с оценки на ръста на коефициентите на степенни редове). Впоследствие се появяват много други контрапримери, базиращи се на различни подходи. По-долу ще скицираме примера на Григорчук от 1980 г., който се формулира на езика на теория на графите.

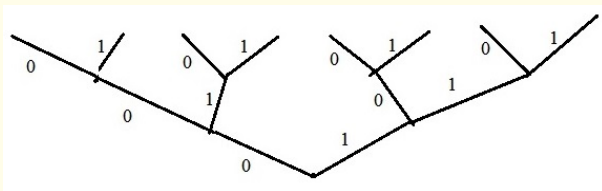
Първите контрапримери към втория вариант на проблема на Бърнсайд са дадени от Новиков и Адян през 1968 г. Те доказват, че за всяко достатъчно голямо нечетно число $k \geq 665$ има крайно породена група G , която е от безкраен ред и за която $g^k = 1$, $g \in G$. Впоследствие Олшански доразвива геометричната теория на групите, зададени с пораждащи и определящи съотношения (отново теория на графите!) и дава нови контрапримери. В частност, за прости $p > 10^{10}$ той конструира т.н. *Монстр на Тарски-Олшански*. Това е безкрайна група, в която всички нетривиални собствени подгрупи са циклични от ред p .

За много от малките стойности на k отговорът на втората версия на проблема на Бърнсайд е неизвестен. Например, все още не се знае дали всяка група с две пораждащи, която удовлетворява тъждеството $x^5 = 1$, е крайна.

Използвайки методи от теорията на алгебрите на Ли, удовлетворяващи тъждеството на Енгел, Кострикин доказва, че за просто p редът на крайните m -породени групи с експонента p е ограничен. Впоследствие Зелманов решава окончателно в положителна посока ограничения проблем на Бърнсайд. Освен алгебри на Ли, той използва и класификацията на крайните прости групи. За своето постижение Зелманов е награден с Филдсов медал през 1994 г.

Контрапример на Григорчук

Разглеждаме пълното безкрайно бинарно дърво с фиксиран корен в равнината. Безкрайните пътища, които започват от корена, могат да се идентифицират с безкрайните редици от 0 и 1. Ако се движим наляво, означаваме реброто с 0, а надясно – с 1.

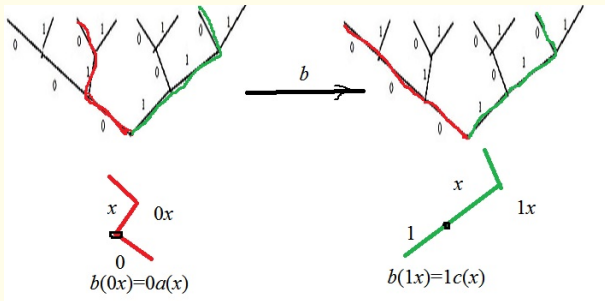


Автоморфизмите на дървото са взаимно-еднозначни изображения на върховете на дървото, които запазват корена и свойството “съседство” на върховете.

Останалите автоморфизми b, c, d се определят по правилата

$$b(0\beta) = c(0\beta) = 0a(\beta), d(0\beta) = 0\beta,$$

$$b(1\beta) = 1c(\beta), c(1\beta) = 1d(\beta), d(1\beta) = 1b(\beta).$$



Теорема

Групата G от автоморфизми на пълното безкрайно бинарно дърво T с фиксиран корен, породена от a, b, c, d е безкрайна, а всеки неин елемент е от ред степен на двойката.

Впоследствие тази конструкция е обобщена от Нараин Гупта и Саид Сидки за крайно породени безкрайни групи, чиито елементи са от ред степен на произволно просто p . Освен това се оказва, че групите на Григорчук и Гупта-Сидки могат да се реализират като групи на Альошин, който през 1972 г. дава контрапример към проблема на Бърнсайд на езика на теория на крайните автомати.

Други важни свойства на групата на Григорчук

Междинен ръст и проблем на Милнор

Функцията на ръста на една група, породена от $h_1, \dots, h_m$ се определя по правилото

$$g(n) = \text{брой на елементите от вида } h_{i_1}^{\pm 1} \cdots h_{i_k}^{\pm 1}, \quad k \leq n.$$

Повечето “хубави” групи имат полиномен или експоненциален ръст. През 1968 г. Милнор поставя проблема за съществуване на групи с междинен (между полиномен и експоненциален) ръст. През 1984 г. Григорчук показва, че *съществува континуално множество от групи с междинен ръст* и една от тези групи е групата, построена по-горе.

Фракталност

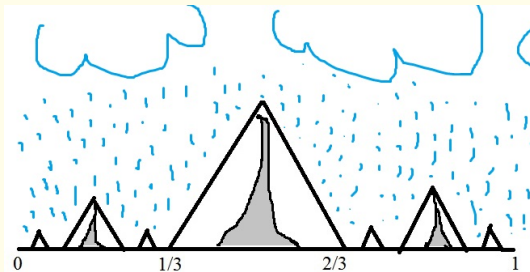
Подгрупата на групата на Григорчук, която изобразява двата клона на пълното бинарно дърво върху себе си, е изоморфна на самата група.

Нормални делители

Всички собствени нормални подгрупи на групата на Григорчук са от краен индекс.

Множество на мокрите точки и множество на Кантор

Единичната отсечка е разделена на три равни части и на средната част е построена палатка, която покрива отворения интервал $(1/3, 2/3)$. Левият и десният интервали $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ също са разделени на три части и върху средните са построени палатки, които покриват съответните отворени интервали. Този процес продължава до безкрайност. Започва да вали дъжд. Оказва се, че *“мокрите” точки от интервала $[0, 1]$ образуват тернарното множество на Кантор*, което има редица забележителни свойства.



Варианти на това множество се появяват неколkokратно в литературата, включително преди Кантор.

- ▶ Henry John Stephen Smith го открива през 1874 г. в своя статия, посветена на интегрирането на прекъснати функции.
- ▶ Paul du Bois-Reymond го споменава в забележка под линия в своята статия от 1880 г. върху доказателството на основната теорема на интегралното смятане.
- ▶ Множеството на Кантор е открито и от Vito Volterra през 1881 г. в статията му за поточно прекъснати функции.
- ▶ Кантор през 1883 г. само го споменава, като пример на по-общата идея за множества, които са съвършени, но не са никъде плътни.

Изучавайки това множество, Кантор и другите спомагат за полагането на основите на съвременната теоретико-множествена топология.

Ще се спрем на някои от свойствата на множеството на Кантор.

- ▶ *Множеството на Кантор е с мярка 0. Наистина, неговото допълнение до единичния интервал е с мярка*

$$2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^3 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1.$$

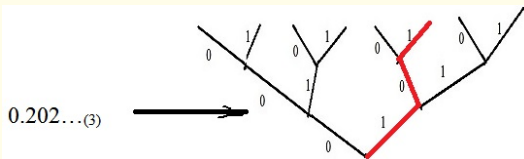
- ▶ *Множеството на Кантор се състои от всички числа в интервала $[0, 1]$, които в троична бройна система се записват като (безкрайни) дроби само с 0 и с 2. Например,*

$$\frac{1}{3} = 0.1_{(3)} = 0.0222\dots_{(3)}.$$

- *Множеството на Кантор е с мощността на континуума.*

Доказателство: Ще изобразим множеството на Кантор върху интервала $[0, 1]$, откъдето ще следва, че неговата мощност не е по-малка от тази на $[0, 1]$, т.е. е поне континуална. Но тя не може да бъде по-голяма, защото то е подмножество на този интервал. Всяко число $\alpha \in [0, 1]$ се представя като безкрайна двоична дроб $\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2 \dots_{(2)}$. (Това представяне не е еднозначно, например $0.1000 \dots_{(2)} = 0.0111 \dots_{(2)}$.) На елемента на Канторовото множество $\beta = 0.\beta_1\beta_2 \dots_{(3)}$ съпоставяме $\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2 \dots_{(2)} \in [0, 1]$ по правилото $\alpha_i = 0$, ако $\beta_i = 0$ и $\alpha_i = 1$, ако $\beta_i = 2$. Очевидно, че това изображение е върху $[0, 1]$.

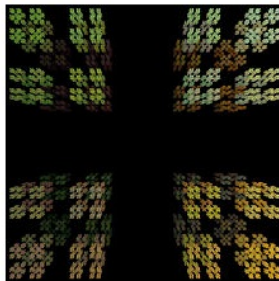
- Има естествено взаимно-еднозначно съответствие между множеството на Кантор и безкрайните пътища, започващи от корена, в пълното безкрайно бинарно дърво. За целта на елемента на Канторовото множество $\beta = 0.\beta_1\beta_2 \dots_{(3)}$ съпоставяме безкрайния път, който започва от корена и на всяка стъпка върви наляво, ако $\beta_i = 0$ и надясно, ако $\beta_i = 2$.



Множеството на Кантор има и многомерни варианти.



2D-множество на Кантор



куб на Кантор

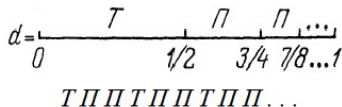
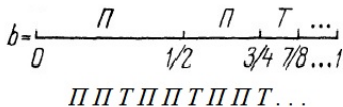
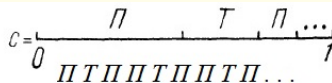
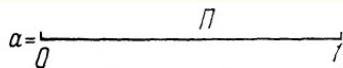
Обратно към групата на Григорчук

Ще отбележим, че оригиналната конструкция на групата на Григорчук G с пораждащи a, b, c, d е на език, близък до този за множеството на Кантор. Това е група от преобразувания на единичния интервал, която запазва мярката на Лебег и всички преобразувания се дефинират с точност до множество с мярка 0. (Действието на G не е дефинирано върху крайните двоични дробни.)

По-долу буквата T над интервала $\Delta = [\alpha, \beta]$ означава тъждественото преобразуване, а буквата Π означава, че сменяме местата на двете половинки на интервала:

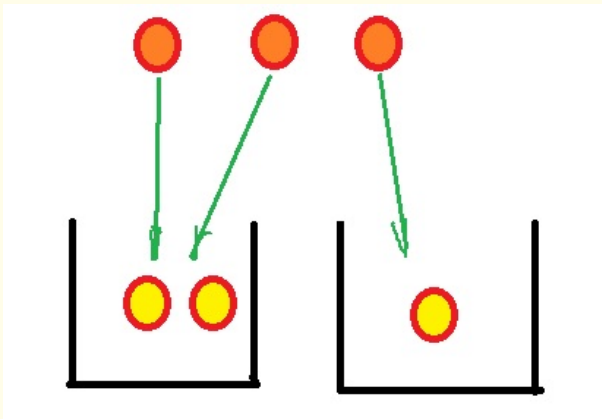
$\Pi: x \rightarrow x + (\beta - \alpha)/2$, ако $\alpha < x < (\alpha + \beta)/2$, $\Pi: x \rightarrow x - (\beta - \alpha)/2$, ако $(\alpha + \beta)/2 < x < \beta$.

Преобразуванията a, b, c, d са определени на фигурата по-долу. Под b, c и d са указани безкрайните периодични редици с период 3 от преобразуванията на съответните подинтервали.



Принцип на чекмеджетата или принцип на Дирихле

Нека m топки са поставени в n чекмеджета и $m > n$. Тогава поне в едно чекмедже ще има поне две топки.



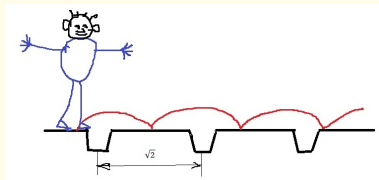
Първата формализация на този принцип е направена от немския математик Петер Густав Лъожон Дирихле (Peter Gustav Lejeune Dirichlet) през 1834 г., който го използва за получаване на дълбоки резултати в теорията на числата. Дирихле използва немския термин *Schubfachprinzip* – принцип на чекмеджетата. Това име се запазва и на редица други езици, включително на английски: *Pigeonhole Principle*. (Едно от значенията на думата *pigeonhole* е картотека или преграда за писма в писалище.)



Pigeonhole

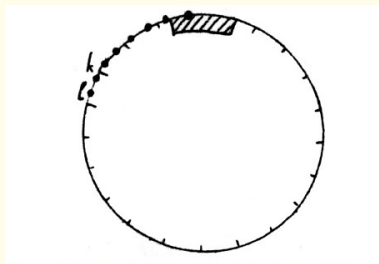
Задача

Върху реалната права са изкопани канавки с дължина d и на разстояние $\sqrt{2}$ една от друга. Един човек се движи по правата с крачка с дължина 1. Да се докаже, че човекът непременно ще стъпи в канавка.



Решение.

“Навиваме” реалната права върху окръжност с дължина $\sqrt{2}$, при което всички канавки ще попаднат една върху друга.



Тъй като $\sqrt{2}$ е ирационално число, то никои две стъпки на човека няма да съвпадат. Разделяме окръжността на n равни дъги, където n е толкова голямо, че дължината $\sqrt{2}/n$ на дъгичката е по-малка от дължината на канавката. Тъй като дъгичките са краен брой, а стъпките на човека са безбройно много, то непременно ще има две стъпки, които са в една и съща дъгичка. (На чертежа те са означени с k и l .) Нека $k > l$. Започвайки от стъпката с номер l , ние ще следим къде стъпва човекът в момента $l, l + (k - l), l + 2(k - l), \dots$. Нашата задача се свежда до следната: *Върху окръжността се движи човек със стъпка с дължина, по-малка от $\sqrt{2}/n$, а следователно и от d . Да се докаже, че той непременно ще падне в канавката. Но така формулирано, твърдението става очевидно.*

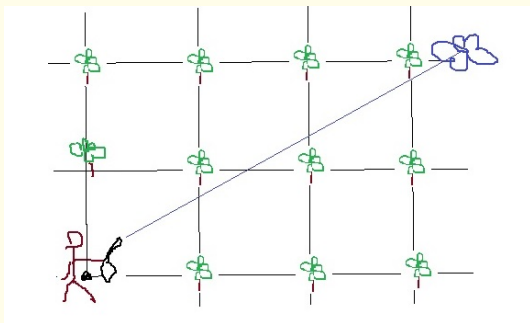
Всъщност ние доказахме:

Теорема на Кронекер (Kronecker)

За произволно ирационално число α множеството от числата $t\alpha + n$, където t е произволно цяло, а n произволно естествено число, е навсякъде гъсто.

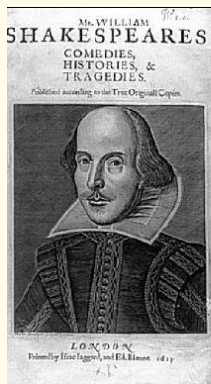
Задача.

В точките с цели координати в равнината, различни от началото на координатната система, са посадени дръвчета с един и същи диаметър. Стрелец се намира в началото на координатната система и стреля в произволна посока. Да се докаже, че той непременно ще улови дръвче.



Теорема за безбройно многото маймуни

Ако безбройно много маймуни пишат на пишущи машини, то някоя от тях ще напечата събраните съчинения на Шекспир.
Ранни версии на тази теорема се приписват на Аристотел.



През 2003 г. преподавателите и студентите от Университета в Плимут са решили да направят експеримент в Зоологическата градина на курортния крайбрежен град Пейнтън в Югозападна Англия. Те са поставили клавиатура в клетката на шест макака и са я свързали с компютър. В течение на месец маймуните са отпечатали пет страници с несвързан текст, в който не е имало нищо, приличащо на смислена дума, след което са счупили клавиатурата. В началото на експеримента в текста преобладавала буквата **S**, но след това започнали да се появяват и **A**, **J**, **L** и **M**.

От Зоологическата градина решили, че експериментът е неуспешен, но участниците са били на мнение, че той е дал и положителни резултати. *Експериментът е бил наблюдаван на живо на специална страница в Интернет, а накрая е била издадена и книжка "Notes Towards The Complete Works of Shakespeare".*

През 2011 г. американският програмист Jesse Anderson решил да провери на практика теоремата за безбройно многото маймуни. Той отделил 39 поеми на Шекспир и задействал “виртуална маймуна” – програма, която дава случайни редици от девет букви на английската азбука. Ако такава редица от букви се среща в произведенията на Шекспир, игнорирайки препинателните знаци и интервалите, тя се запазва. Ако не се среща, тя се отхвърля. За своите пресмятания програмистът използвал облачната платформа Amazon EC2. Той използвал система за разпределяне на пресмятанията Hadoop и домашен компютър управляван от Ubuntu. За малко повече от месец, от 21 август до 23 септември, виртуалните маймуни успели да напечатат поемата *A Lover's Complaint* (повече от 700 реда, над 2500 думи, около 11700 знака). Останалите 38 произведения били завършени на над 99 процента.

Задача

Една маймуна пише на пишуца машина със скорост един удар върху клавиш в секунда. Колко време трябва да работи, за да отпечата известната фраза “To be, or not to be” с вероятност $\geq 1/2$?

Съществуват различни ранни версии на монолога на Хамлет, но във всички тях фразата е една и съща.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺

За да “математизираме” задачата, ще считаме, че сме махнали клавишите за главни букви и обратен ход, а маймуната пише на безкрайна лента, вместо на лист хартия, за да не превърта валяка на машината за започване на нов ред. Осен това тя удря с еднаква вероятност всеки от 45-те клавиша (включително “дългия” клавиш за интервала). Същата задача можем да формулираме за пишуща машина с 26 клавиша, игнорирайки препинателните знаци и интервалите.

