Толкова много квадрати

Невена Събева – Колева newewena@math.bas.bg

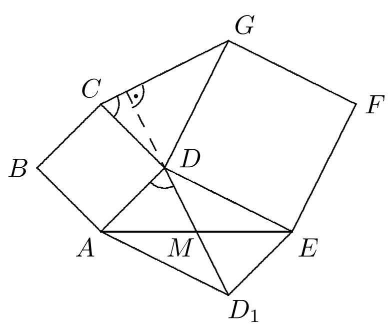
В тази лекция ще разгледаме съставени от квадрати геометрични конфигурации, някои от които изглеждат доста внушително. Но често ключът към големите проблеми е в малките неща. Така и тук с помощта на няколко лесни свойства ще разплетем „засуканите“ олимпийски задачи.

Част I. За начинаещи

Да припомним свойствата на конфигурация от два квадрата ($ABCD$ и $DEFG$) с общ връх.

$\boxed{1}$ Медианата DM в $\triangle AED$ е перпендикулярна на CG и два пъти по-малка от нея.

Доказателство. Ако построим успоредника AD_1ED, получаваме еднаквите триъгълници CDG и AD_1D. Тогава $CG = DD_1 = 2DM$ и $\sphericalangle ADD_1 = \sphericalangle DCG$, откъдето $CG \perp DM$.



$\boxed{2}$ Лицата на $\triangle AED$ и $\triangle CDG$ са равни.

Доказателство. Триъгълниците CDG и AD_1D са еднакви, а $S_{AD_1D}=\frac{1}{2}S_{AD_1ED}=S_{AED}$.

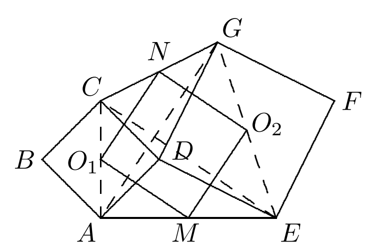
$\boxed{3}$ Отсечките AG и CE са равни и перпендикулярни.

Доказателство. Достатъчно е да забележим, че отсечката CE е образ на AG при ротация около D на ъгъл 90°.

Доказаните свойства имат някои интересни следствия.

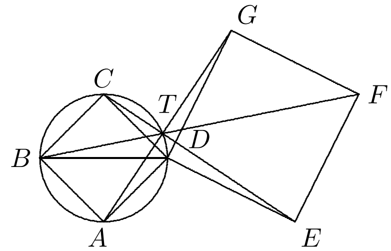
Следствие 1. Центровете на квадратите и средите на AE и CG са върхове на квадрат.

Решение. При означенията на чертежа, MO_1 и MO_2 са средни отсечки съответно в $\triangle AEC$ и $\triangle AEG$ и от $\boxed{3}$ следва, че MO_1 е перпендикулярна и равна на MO_2. Аналогично NO_1 е перпендикулярна и равна на NO_2, т.е. O_1MO_2N е квадрат.

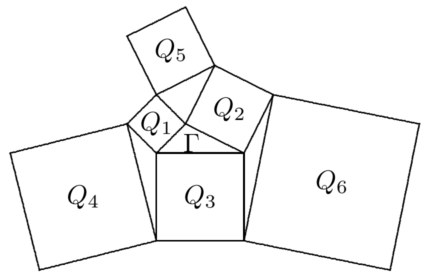


Следствие 2. Правите AG, CE и BF се пресичат в една точка.

Решение. Нека T е пресечната точка на AG и CE. От свойство $\boxed{3}$ имаме, че $\sphericalangle ATC = 90°$, следователно T лежи на описаната около квадрата $ABCD$ окръжност. Оттук получаваме, че BT е ъглополовяща на $\sphericalangle ATC$. Аналогично FT е ъглополовяща на $\sphericalangle ETG$, т.е. точките T, B и F лежат на една права.



Следствие 3. При означенията на чертежа, сборът от лицата на „външните“ квадрати Q_4, Q_5 и Q_6 е три пъти по-голям от сбора на лицата на „вътрешните“ квадрати Q_1, Q_2 и Q_3.

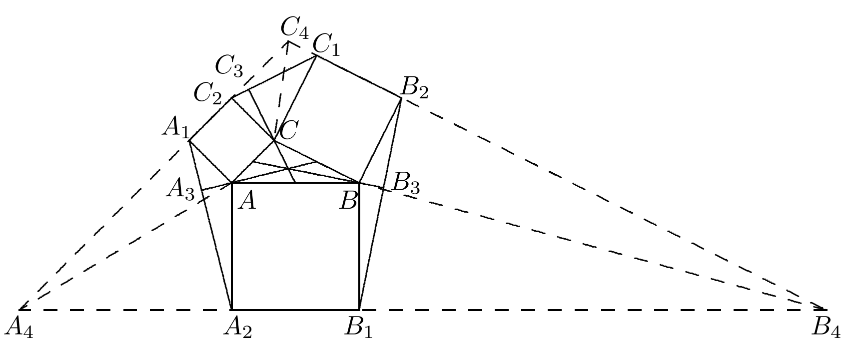


Решение. От свойство $\boxed{1}$ знаем, че страните на квадратите Q_4, Q_5 и Q_6 са два пъти по-големи от съответните медиани в триъгълника Γ.

Като означим страните на Γ с a, b и c и използваме формулата за медианата, получаваме

$$S_4 + S_5 + S_6 = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(S_1 + S_2 + S_3).$$

Следствие 4. На страните на $\triangle ABC$ външно са построени квадратите ABB_1A_2, BCC_1C_2 и CAA_1C_2. Тогава височините AA_3, BB_3 и CC_3 съответно в $\triangle AA_1A_2, \triangle BB_1B_2$ и $\triangle CC_1C_2$ се пресичат в една точка.



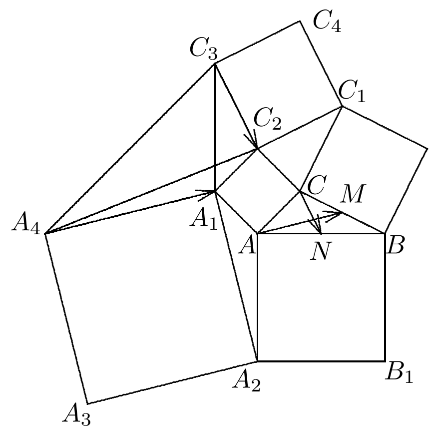
Решение. Достатъчно е да забележим, че според $\boxed{1}$ правите, определени от дадените височини, съдържат медианите на $\triangle ABC$.

С тази конфигурация е свързан още един факт: ако $A_1C_2 \cap A_2B_1 = A_4$, $A_2B_1 \cap B_2C_1 = B_4$ и $B_2C_1 \cap A_1C_2 = C_4$, то правите AA_4, BB_4 и CC_4 се пресичат в една точка. Това се доказва, например, с теоремата на Чева за триъгълника $A_4B_4C_4$, като се използва, че AA_4 разделя страната B_4C_4 в отношение $\dfrac{S_{AA_4C_4}}{S_{AA_4B_4}} = \dfrac{A_4C_4.b}{A_4B_4.c}$ и т.н.

Задача 1. (*Московска олимпиада, 2005 г.*) На страните на $\triangle ABC$ външно са построени квадратите ABB_1A_2, BCC_1C_2 и CAA_1C_2. На отсечките A_1A_2 и C_1C_2 външно за $\triangle AA_1A_2$ и $\triangle CC_1C_2$ са построени квадратите $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Да се докаже, че правата C_3A_4 е успоредна на AC.

Първо решение, с лица. От свойство $\boxed{2}$ имаме равенствата

$$\begin{aligned} S_{A_1A_4C_2} &= S_{AA_1A_2} = S_{ABC} \\ &= S_{CC_1C_2} = S_{AC_2C_3}. \end{aligned}$$



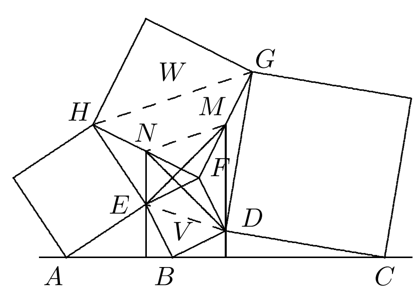
От $S_{A_1A_4C_2} = S_{AC_2C_3}$ следва, че правата C_3A_4 е успоредна на A_1C_2, т.е. на AC.

Второ решение, с вектори. Ако AM и CN са медиани в $\triangle ABC$, от свойство $\boxed{1}$ имаме равенствата $\overrightarrow{A_4A_1} = 2\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{C_3C_2} = 2\overrightarrow{CN}$. Тогава

$$\overrightarrow{A_4C_3} = \overrightarrow{A_4A_1} + \overrightarrow{A_1C_2} + \overrightarrow{C_2C_3} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 4\overrightarrow{AC}.$$

Оттук следва, че отсечката C_3A_4 е успоредна на AC и, нещо повече, е 4 пъти по-голяма от нея.

Задача 2. (*Сангаку*) В дадената конфигурация от четири квадрата, да се докаже, че страната на квадрата W е два пъти по-голяма от страната на квадрата V.



Решение. Ще използваме означенията на чертежа. Твърдението е еквивалентно на $HG = 2ED$, т.е. $NM = ED$, където N и M са средите съответно на HF и FG.

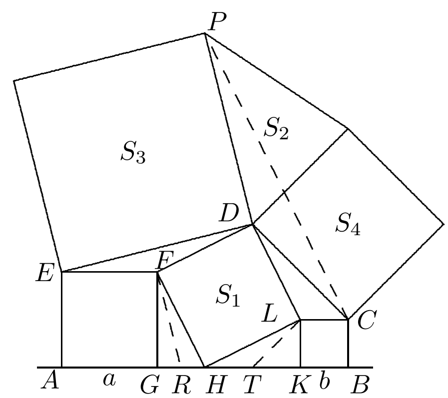
Но медианите EN и MD са перпендикулярни на правата AB (свойство $\boxed{1}$), следователно EN и MD са успоредни, т.е. $ENMD$ е трапец. Ако разгледаме квадрата V и квадрата с върхове N, F, M и центъра на W, от свойство $\boxed{3}$ получаваме, че $EM = DN$. Следователно $ENMD$ е равнобедрен трапец, т.е. $NM = ED$, което искахме да докажем.

Задача 3. (*Сангаку*) В дадената конфигурация от пет квадрата да се докаже, че:

а) $S_1 = S_2$;

б) отсечката PC е успоредна на DL и 3 пъти по-голяма от нея;

в) $S_3 + S_4 = 5S_1$.



Решение. а) Ще използваме означенията на чертежа. Триъгълниците FGH и HKL са еднакви и лицата им са равни на $\dfrac{ab}{2}$, където a и b са страните съответно на $AGFE$ и $KBCL$.

От свойство $\boxed{2}$ имаме, че $S_{EFD} = S_{FGH} = S_{HKL} = S_{DLC}$ и

$$S_2 = S_{EDC} = S_{ABCDE} - S_{ABCE} = a^2 + b^2 + 4.\frac{ab}{2} + S_1 - (a+b)^2 = S_1.$$

б) Нека FR е медиана в $\triangle FGH$; тогава $\overrightarrow{PD} = 2\,\overrightarrow{FR}$ от свойство $\boxed{1}$ и изразяваме:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{LC} = 2\,\overrightarrow{FR} + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{GH} = \\ &= (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FH}) + \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{GH} = 2\,\overrightarrow{DL} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = 3\,\overrightarrow{DL}\,.\end{aligned}$$

в) Ако LT е медиана в $\triangle HKL$, намираме

$$\begin{aligned}S_3 + S_4 &= ED^2 + DC^2 = 4FR^2 + 4LT^2 = \\ &= 4\left(a^2 + \frac{b^2}{4}\right) + 4\left(b^2 + \frac{a^2}{4}\right) = 5(a^2+b^2) = 5DF^2 = 5S_1.\end{aligned}$$

Задачите, които разгледахме дотук, могат да се решат с използване на ротация на ъгъл 90°. На свойствата на ротацията ще се спрем по-подробно в следващата част.

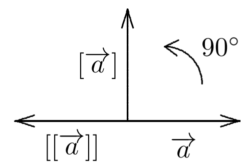
Част II. За напреднали

За даден вектор $\overrightarrow{a}$ с $[\overrightarrow{a}]$ ще означаваме образа на $\overrightarrow{a}$ при ротация на ъгъл 90° по посока обратна на часовата стрелка. В сила са следните свойства:

1. $[k\overrightarrow{a}] = k[\overrightarrow{a}]$

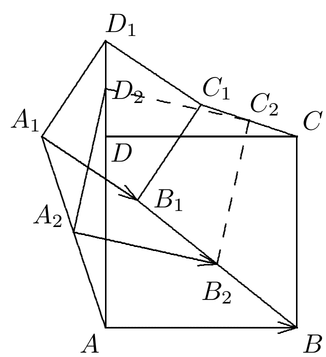
2. $[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}] = [\overrightarrow{a}] + [\overrightarrow{b}]$

3. $[[\overrightarrow{a}]] = -\overrightarrow{a}$



Да разгледаме едно обобщение на следствие 1. от първа част.

Задача 4. Дадени са положително ориентираните квадрати $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Ако A_2, B_2, C_2 и D_2 са средите съответно на AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, да се докаже, че $A_2B_2C_2D_2$ е квадрат.



Решение. Да означим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{b}$; тогава $\overrightarrow{AD} = [\overrightarrow{a}]$ и $\overrightarrow{A_1D_1} = [\overrightarrow{b}]$. Тъй като A_2 и B_2 са средите съответно на AA_1 и BB_1, то

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}.$$

Аналогично получаваме $\overrightarrow{A_2D_2} = \dfrac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_1D_1}}{2} = \dfrac{[\overrightarrow{a}] + [\overrightarrow{b}]}{2} = \dfrac{[\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}]}{2}$. Следователно $\overrightarrow{A_2D_2} = [\overrightarrow{A_2B_2}]$, което означава, че отсечките A_2D_2 и A_2B_2 са перпендикулярни и равни. Аналогично твърдение е вярно и за C_2D_2 и C_2B_2, т.е. $A_2B_2C_2D_2$ е квадрат.

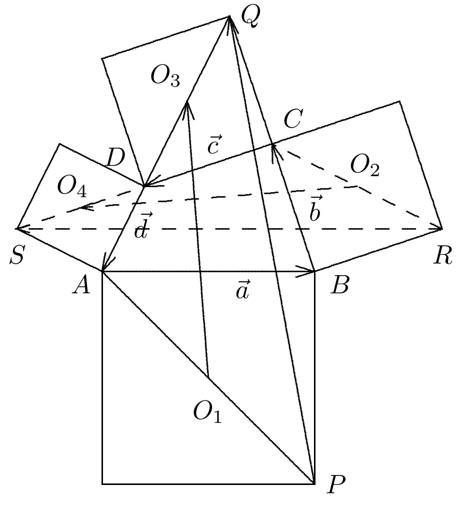
Забележка. Същото твърдение е в сила и когато точките A_2, B_2, C_2 и D_2 делят в едно и също отношение отсечките AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Задача 5. На страните AB, BC, CD и DA на четириъгълника $ABCD$ външно са построени квадрати с центрове съответно O_1, O_2, O_3 и O_4. Да се докаже, че отсечките O_1O_3 и O_2O_4 са перпендикулярни и равни.

Решение. Нека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{d}$. Да изразим $\overrightarrow{O_1O_3}$ и $\overrightarrow{O_2O_4}$, като използваме означенията на чертежа.

$$\overrightarrow{O_1O_3} = \frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{PQ}}{2} = \frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}}{2} = \frac{-\overrightarrow{d}+[\overrightarrow{a}]+\overrightarrow{b}-[\overrightarrow{c}]}{2};$$

$$\overrightarrow{O_2O_4} = \frac{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{RS}}{2} = \frac{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS}}{2} = \frac{\overrightarrow{c}+[\overrightarrow{b}]-\overrightarrow{a}-[\overrightarrow{d}]}{2}.$$



Да завъртим вектора $\overrightarrow{O_1O_3}$ на 90°:

$$[\overrightarrow{O_1O_3}] = \frac{-[\overrightarrow{d}]+[[\overrightarrow{a}]]+[\overrightarrow{b}]-[[\overrightarrow{c}]]}{2} = \frac{-[\overrightarrow{d}]-\overrightarrow{a}+[\overrightarrow{b}]+\overrightarrow{c}}{2} = \overrightarrow{O_2O_4}\ .$$

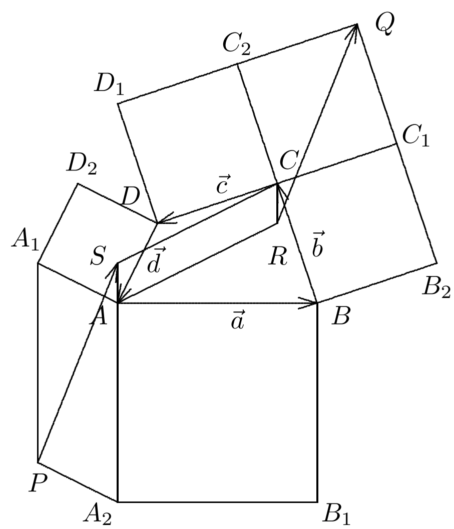
Следователно $\overrightarrow{O_2O_4}$ е образ на $\overrightarrow{O_1O_3}$ при ротация на 90°, т.е. отсечките O_1O_3 и O_2O_4 са перпендикулярни и равни.

Забележка. Тази задача може да се реши и с композиция от ротации.

Задача 6. (*Българско предложение за МОМ*) На страните на четириъгълника $ABCD$ външно са построени квадратите $ABB_1A_2, BCC_1B_2, CDD_1C_2$ и DAA_1D_2. Точките P и Q са такива, че AA_1PA_2 и CC_1QC_2 са успоредници. Нека R е произволна вътрешна точка за четириъгълника $ABCD$. Да се докаже, че успоредниците $PASC$ и $RPTQ$ имат два общи върха.

Решение. Ще докажем, че точките S и T съвпадат.

Нека отново означим $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{d}$ и изразим векторите $\overrightarrow{PS}$ и $\overrightarrow{RQ}$.

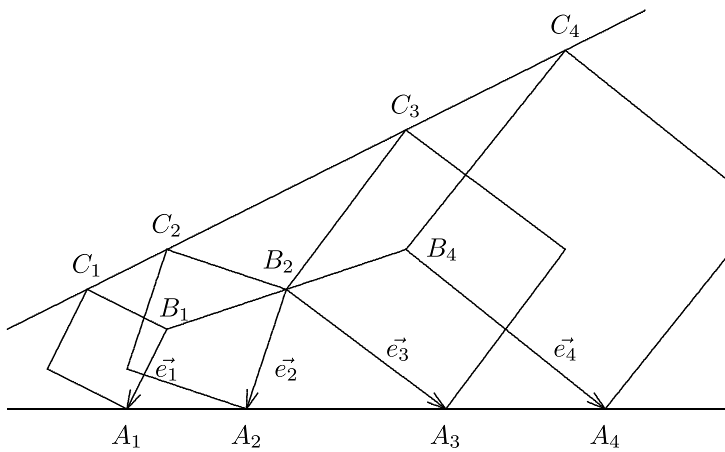


$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{A_2A} + \overrightarrow{AS} = [\overrightarrow{d}] + [\overrightarrow{a}] + \overrightarrow{RC},\\ \overrightarrow{RQ} &= \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1Q} = \overrightarrow{RC} - [\overrightarrow{b}] - [\overrightarrow{c}].\end{aligned}$$

Тяхната разлика е $\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{RQ} = [\overrightarrow{a}] + [\overrightarrow{b}] + [\overrightarrow{c}] + [\overrightarrow{d}] = [\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}] = \overrightarrow{0}$, откъдето следва, че $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PT}$, т.е. точките S и T съвпадат, което искахме да докажем.

Решението на следващата задача използва скаларно произведение на вектори. Да припомним, че скаларно произведение на ненулевите вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ се нарича числото $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. От определението следва, че $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$ и ако $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, то $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = 0$ (в частност $\overrightarrow{a}\,.[\overrightarrow{a}] = 0$).

Задача 7. (*Китайска математическа олимпиада, 2005 г.*) Дадени са четири квадрата $Q_i = A_iB_iC_iD_i$, $i = 1..4$.



(Върховете A_i, $i = 1..4$ са колинеарни; върховете C_i, $i = 1..4$ са колинеарни и върховете B_i, $i = 1..4$ също са са колинеарни, като $B_2 \equiv B_3$.)

Да се докаже, че ако $B_1B_2 = B_3B_4$, то сборът от лицата на квадратите със страни A_1A_2 и A_3A_4 е равен на сбора от лицата на квадратите със страни C_1C_2 и C_3C_4.

Решение. Да означим $\overrightarrow{B_iA_i} = \overrightarrow{e_i}$, $i = 1..4$. Можем да запишем равенствата:

$$\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{B_1B_2} - \overrightarrow{A_1A_2} \quad \Longrightarrow \quad [\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}] = [\overrightarrow{B_1B_2}] - [\overrightarrow{A_1A_2}],$$
$$[\overrightarrow{e_1}] - [\overrightarrow{e_2}] = \overrightarrow{B_1B_2} - \overrightarrow{C_1C_2} \quad \Longrightarrow \quad [\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}] = \overrightarrow{B_1B_2} - \overrightarrow{C_1C_2}\ .$$

Следователно

$$\overrightarrow{B_1B_2} - \overrightarrow{C_1C_2} = [\overrightarrow{B_1B_2}] - [\overrightarrow{A_1A_2}]. \tag{1}$$

За Q_3 и Q_4 аналогично имаме

$$\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{B_3B_4} - \overrightarrow{A_3A_4} \quad \Longrightarrow \quad [\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}] = [\overrightarrow{B_3B_4}] - [\overrightarrow{A_3A_4}],$$
$$[\overrightarrow{e_3}] - [\overrightarrow{e_4}] = \overrightarrow{C_3C_4} - \overrightarrow{B_3B_4} \quad \Longrightarrow \quad [\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}] = \overrightarrow{C_3C_4} - \overrightarrow{B_3B_4}\ .$$

Следователно $[\overrightarrow{B_3B_4}] - [\overrightarrow{A_3A_4}] = \overrightarrow{C_3C_4} - \overrightarrow{B_3B_4}$ и оттук с ротация на 90° получваме

$$-\overrightarrow{B_3B_4} + \overrightarrow{A_3A_4} = [\overrightarrow{C_3C_4}] - [\overrightarrow{B_3B_4}]. \tag{2}$$

Като съберем равенства (1) и (2) и вземем предвид, че векторите $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{B_3B_4}$ са равни, получваме

$$\overrightarrow{A_3A_4} + [\overrightarrow{A_1A_2}] = \overrightarrow{C_1C_2} + [\overrightarrow{C_3C_4}].$$

Като вдигнем на квадрат полученото векторно равенство и отчетем, че скаларното произведение на перпендикулярните вектори $\overrightarrow{A_3A_4}$ и $[\overrightarrow{A_1A_2}]$ (също $\overrightarrow{C_1C_2}$ и $[\overrightarrow{C_3C_4}]$) е равно на 0, стигаме до

$$A_3A_4^2 + A_1A_2^2 = C_1C_2^2 + C_3C_4^2,$$

откъдето следва твърдението на задачата.

Две задачи за самостоятелна работа

Задача 8. Външно за остроъгълния триъгълник ABC са построени квадратите $ABKH$, $BCED$ $CAGF$. Ако $CH \cap BG = M$ и $CK \cap AD = N$, да се докаже, че:

а) точките A, B, M и N лежат на една окръжност;

б) пресечната точка на AD и BG лежи на височината през C в $\triangle ABC$.

Задача 9. (*Игор Шаригин*) Външно за $\triangle ABC$ са построени квадратите $ABKH, BCDE, CAGF$ и външно за тях — успоредниците $BKPE$ и $CDQF$. Да се докаже, че триъгълникът APQ е правоъгълен и равнобедрен.