

Лица на геометрични фигури

§1. Основни свойства

1. Върху страната AB на триъгълника ABC е избрана произволна точка N . Да се докаже, че

$$S_{ANC} : S_{BNC} = AN : NB.$$

2. Нека N е точка от страната AB на $\triangle ABC$, а P е точка от BC , то

$$S_{BPN} = \frac{BN}{AB} \cdot \frac{BP}{BC} S_{ABC}.$$

3. Нека M, P, N са средите на страните AC, CB, BA на $\triangle ABC$. Да се докаже, че

$$S_{ANM} = S_{CPM} = S_{BNP} = S_{MNP} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

4. Нека M, P, N са средите на страните AC, CB, BA на $\triangle ABC$, а пресечната точка на медианите AP, BM, CN е означена с G . Да се докаже, че

$$S_{AGN} = S_{BGN} = S_{BGP} = S_{CGP} = S_{CGM} = S_{AGM} = \frac{1}{6} S_{ABC}.$$

5. Върху страната CD на успоредник $ABCD$ е избрана произволна точка E . Да се докаже, че

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

6. Във вътрешността на успоредник $ABCD$ е избрана произволна точка E . Да се докаже, че

$$S_{ABE} + S_{DCE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

7. Даден е трапец $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите O . Да се докаже, че

$$S_{AOD} = S_{BOC}.$$

§2. Задачи

1. Върху страните AB, BC, CA на $\triangle ABC$ са избрани точки P, Q, R така, че $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 1 : 2$. Ако $S_{ABC} = 1$, намерете лицето на $\triangle PQR$.
2. Пресечната точка на диагоналите на четириъгълника $ABCD$ е означена с O . Ако $S_{ABO} = 20$, $S_{BCO} = 15$ и $S_{CDO} = 12$, намерете S_{DAO} .
3. Точките P и Q са среди на основите AB и CD на трапеца $ABCD$. Ако M е произволна точка от правата PQ , да се докаже, че $S_{MBC} = S_{MDA}$.
4. Върху страната AB на успоредника $ABCD$ е избрана произволна точка K и е построен успоредник $DKCL$. Да се докаже, че $S_{ABL} = S_{ABCD}$.
5. Точките K и M са среди на страните AB и CD на четириъгълника $ABCD$. Да се докаже, че

$$S_{AKCM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

6. Точките L и M са среди на страните BC и CD на четириъгълника $ABCD$. Да се докаже, че

$$S_{ALCM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

7. Страните на правоъгълника $ABCD$ са разделени от точките P, Q, R, S в отношение $1 : 2$. Каква част от лицето на правоъгълника е лицето на успоредника $PQRS$?
8. Докажете, че за произволен четириъгълник $ABCD$ със среди на страните K, L, M, N е изпълнено равенството

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

9. Трапецът $ABCD$ е разделен от диагоналите си на четири триъгълника с лица S_1, S_2, S_3 и S_4 . Да се докаже, че ако $S_2 = 3S_1$, то $S_4 = 9S_1$.
10. Точките K, L, M и N са среди на страните AB, BC, CD и DA на четириъгълника $ABCD$. Отсечката KL пресича BN и BM съответно в точки Q и P . Да се докаже, че сборът от лицата на триъгълниците DNM и BPQ е равен на сбора от лицата на триъгълниците NKQ и MPL .