На шахматната дъска

Задача 1. Иван поставя на шахматна дъска топове по следния начин: избира произволно поле за първия, а всеки следващ топ атакува нечетен брой от поставените до този момент топове. (Топовете се атакуват хоризонтално и вертикално и то само ако между тях няма други фигури.) Колко най-много топа може да постави Иван на дъската?

Решение: Не е възможно да се поставят топове във всички ъглови полета на дъската, тъй като последният поставен ще застрашава два топа, което противоречи на правилата. Следователно топовете са най-много 63.

Ето пример за поставяне на 63 топа:

2	28	35	42	49	56	63	3
16	27	34	41	48	55	62	10
17	26	33	40	47	54	61	11
18	25	32	39	46	53	60	12
19	24	31	38	45	52	59	13
20	23	30	37	44	51	58	14
21	22	29	36	43	50	57	15
1	4	5	6	7	8	9	

Задача 2. Първоначално във всяко поле на шахматна дъска е поставен топ. За всеки ход може да се свали от дъската топ, който заплашва нечетен брой топове. Колко най-много топа могат да се свалят от дъската? (Два топа се заплашват, ако се намират в един и същи ред или стълб на дъската и между тях няма други топове.)

Решение: Ще докажем, че могат да се свалят най-много 59 топа.

Първо да отбележим, че нито един от топовете в ъгловите полета не може да се свали. Да допуснем, че първо е свален "ъгловият" топ от $a1$. В момента преди свалянето си той е заплашвал два топа: някой от намиращите се на линия a (там е поне $a8$) и някой от намиращите се на линия 1 (там е поне $h1$). Противоречие.

Ако на дъската са само ъгловите топове, то няма поле, което се заплашва от нечетен брой топове. Следователно не можем да оставим само четирите ъглови топа (иначе последният свален топ ще е заплашвал 0 или 2 топа).

Следователно на дъската ще останат поне 5 топа. Ето как последователно могат да се свалят останалите 59 топа (полетата са номерирани в реда на сваляне на топовете):

$\oplus$	48	47	46	44	41	37	$\oplus$
27	49	50	45	43	40	36	32
26	21	51	52	42	39	35	31
25	20	15	53	54	38	34	30
24	19	14	10	55	56	33	29
23	18	13	9	6	57	58	28
22	17	12	8	5	3	59	$\oplus$
$\oplus$	16	11	7	4	2	1	$\oplus$

Задача 3. Колко най-много коня могат да се поставят на шахматна дъска 8×8 така, че всеки от тях да застрашава най-много седем други коня?

Решение: Ще докажем, че максималният брой коне е 60. Например, ако поставим коне във всички полета на дъската, освен в четирите полета на централния квадрат 2×2, всеки кон застрашава не повече от 7 други коня.

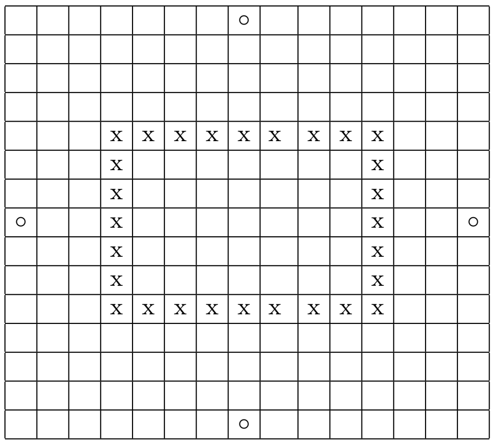
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○			○	○	○
○	○	○			○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○	○	○

Да разгледаме централния квадрат 4×4. Ако в него се поставят 12 или по-малко коня, то общият брой на конете ще бъде не повече от 60.

Нека в централния квадрат 4×4 са поставени не по-малко от 13 коня. Всеки от тях застрашава 8 полета на дъската, едно от които трябва да е празно. Всяко такова празно поле се застрашава от не повече от 4 коня от централния квадрат. Следователно празните полета са не по-малко от $13 : 4 = 3{,}25$, т.е. от 4 и конете са не повече от 60.

Задача 4. Колко най-малко полета на дъска 15×15 трябва да се оцветят, за да може със сигурност да се твърди, че поставен на произволно поле офицер заплашва поне две оцветени полета? (Офицерът заплашва всички полета от пресичащите се в неговото поле диагонали.)

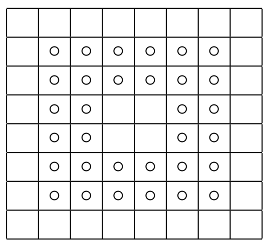
Решение: В показания пример оцветените полета са означени с x. С $\circ$ са означени полетата, от които офицерите заплашват два ъгъла на образувания от оцветените полета правоъгълник. Един от диагоналите през всяко от останалите полета пресича два пъти правоъгълника и следователно поставен там офицер заплашва поне две оцветени полета.



Ще докажем, че по-малък брой оцветени полета не е достатъчен. Офицер, който е поставен в някое от 56-те полета по границата на дъската, заплашва поне две оцветени полета. Тъй като всяко поле се заплашва от най-много четири офицера по границата, оцветените полета са най-малко $\dfrac{56.2}{4} = 28$.

Задача 5. В някои от полетата на дъска 8×8 са поставени пулове. Ако пул се намира в поле x, а полетата y и z са съседни на x по диагонал и са в едно и също диагонално направление с x, то този пул се смята за застрашен, когато в едно от полетата y и z има пул, а другото е празно. Колко най-много пула могат да се разположат на дъска 8×8 така, че всеки пул да е застрашен?

Решение: На дъската могат да се поставят 32 застрашени пула, както е показано на чертежа. Ще докажем, че не е възможно да се поставят повече от 32 застрашени пула. Ясно е, че пуловете са разположени само в централния квадрат 6×6, тъй като пул в поле по границата на дъската не може да е застрашен. Да разделим квадрата 6×6 на четири квадрата 3×3.



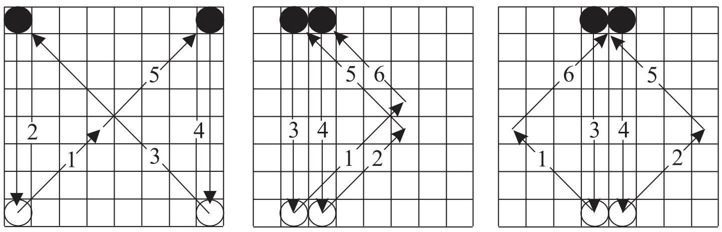
Във всеки от тези квадрати 3×3 поне едно поле е празно, тъй като в обратен случай поставеният в централното поле пул няма да е застрашен.

Следователно поне четири полета в квадрата 6×6 са празни. Това означава, че могат да се поставят най-много $36 - 4 = 32$ застрашени пула.

Задача 6. На първия ред на шахматна дъска са поставени 8 неразличими черни царици, а на последния ред са поставени осем неразличими бели царици. Колко най-малко хода са необходими, за да си разменят местата белите и черните царици? Ходовете на белите и черните царици се редуват, като при всеки ход се премества точно една царица. (Цариците се придвижват на произволен брой полета в хоризонтално, вертикално или диагонално направление, като нямат право да прескачат други фигури по пътя си.)

Решение: Ще докажем, че белите и черните царици могат да си разменят местата най-малко с 23 хода.

Тази от четирите царици в ъгловите полета на дъската, която първа напусне мястото си, ще трябва да направи минимум два хода. Следователно ъгловите царици трябва да направят общо поне $1.2 + 3.1 = 5$ хода (фиг. 1).



Фиг. 1 Фиг. 2 Фиг. 3

Останалите царици разделяме на двойки срещуположни (стоящи в един и същ стълб). Тази от две срещуположни царици, която напусне мястото си първа, трябва да направи поне два хода, докато попадне на новото си място; така общо за двете срещуположни царици са необходими минимум $1.2 + 1 = 3$ хода (фиг. 2 и фиг. 3).

За шестте двойки са необходими $6.3 = 18$ хода; общо ходовете са 23.

Задача 7. Фигура се мести на 8 или 9 полета в хоризонтално или вертикално направление по дъска 15×15, като във всяко поле може да се постави най-много по един път. Колко най-много полета може да обходи фигурата?

Решение: Да номерираме редовете от горе на долу и стълбовете от ляво на дясно. На всяко поле съпоставяме координати (i, j), $i, j = 1, \ldots, 15$.

Ако фигурата тръгне от поле $(9, 7)$ и се движи по следните правила:

1. от поле в горната половина на дъската се премества или с 8 полета надясно, или с 9 полета наляво, ако поне една от тези операции е

възможна (тъй като $9 + 8 > 15$, не са възможни и двете); иначе се премества с 9 полета надолу;

2. от поле в долната половина на дъската се премества, ако е възможно, или с 9 полета надясно, или с 8 полета наляво; иначе се премества с 8 полета нагоре;

тя ще обходи всички полета на дъската, освен тези от вида $(i, 8)$ и $(8, j)$ (образуващи ”кръст”), т.е. общо 196 полета. Това е максималният брой обходени полета, защото ако фигурата мине през поле от ”кръста”, то и предишния, и следващия ход е на ”кръста”, т.е. обхождането ще включва най-много 29-те полета на ”кръста”.

Задача 8. По шахматна дъска се движи "куц” топ, като с един ход преминава на съседно поле в хоризонтално или вертикално направление. Всеки маршрут на ”куцият” топ минава точно по веднъж през всяко поле на дъската. Нека A е ъглово поле на шахматна дъска, а B е съседното му по диагонал поле. Докажете, че маршрутите на "куцият” топ с начало A са повече от маршрутите му с начало B.

Решение: На всеки маршрут на куция топ с начало B ще съпоставим маршрут с начало A (като на различни маршрути съпоставяме различни). Това ще означава, че маршрутите от A са не по-малко от маршрутите от B. За да докажем, че маршрутите от A са повече, ще посочим маршрут с начало A, който не е съпоставен на нито един маршрут с начало B.

При стандартно шахматно оцветяване полетата A и B са едноцветни, а по пътя на куция топ се редуват бели и черни полета. Следователно няма маршрут с начало B и край A (или обратно). Тогава всеки маршрут с начало B минава през A по пътя YAZ или по пътя ZAY:

Y	B	
A	Z	

Разглеждаме съответствието:

$$B\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(1)}YAZ\underbrace{\ldots}_{(2)} \longrightarrow AY\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{обратно на } (1)}BZ\underbrace{\ldots}_{(2)};$$

$$B\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(1)}ZAY\underbrace{\ldots}_{(2)} \longrightarrow AZ\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{обратно на } (1)}BY\underbrace{\ldots}_{(2)}.$$

При това съответствие на всеки маршрут от B се съпоставя различен маршрут от A. Остава да забележим, че по този начин на нито един маршрут с начало B не се съпоставя маршрут с начало A и край Y или Z, какъвто лесно може да се построи (проверете!).

Задача 9. Полетата на шахматна дъска са номерирани с числата от 1 до 64 така, че съседните полета са номерирани с поредни числа. Колко най-малко е сборът на числата, номериращи полетата по един от диагоналите? (Съседни наричаме полета, които имат обща страна.)

Решение: Нека означим числата по диагонала с $a_1, a_2, \ldots, a_8$, като индексите показват реда на появяването им на диагонала. Тъй като в съседни полета се записват последователни числа, на всички едноцветни полета са записани числа с еднаква четност. Нека нечетните числа са записани в бели полета, а четните - в черни. Тогава $a_1 \geq 1, a_2 \geq 3, a_3 \geq 5, \ldots, a_7 \geq 13$.

В момента на номериране на последното диагонално поле, всички полета в едната от двете половини, на които диагоналът разделя дъската, трябва да са вече запълнени. Тогава, тъй като диагоналът е бял, броят на вече номерираните бели полета е поне 20 (12 в тази половина и 8 по диагонала). Следователно a_8 е най-малко 20-тото нечетно число, т.е. $a_8 \geq 39$ и сборът от числата по диагонала е поне $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 39 = 88$.

1							
2	3	4					
27	26	5					
28	25	6	7	8			
29	24	19	18	9			
30	23	20	17	10	11	12	
31	22	21	16	15	14	13	$\vdots$
32	33	34	35	36	37	38	39

Задача 10. Полетата на шахматна дъска са номерирани по следния начин. Полето в горния ляв ъгъл е номер 1; съседните му отдясно и отдолу полета са номер 2 и 3 съответно, трите полета от следващия диагонал са номер 4, 5 и 6 и т.н. Всеки диагонал се номерира от най-горното си дясно поле към най-долното си ляво поле. Предпоследният диагонал съдържа полета с номера 62 и 63, а полето в долния десен ъгъл е номер 64. Петър слага 8

камъчета в 8 полета на шахматната дъска така, че във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче. След това той премества всяко камъче в поле с по-голям номер, отколко номера на полето, в което е било поставено първоначално. Възможно ли е отново във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче?

Решение: Ще докажем, че не е възможно след преместването във всеки ред и всеки стълб да има точно едно камъче. Нека на всяко камъче съпоставим неговите координати на шахматната дъска: камъчето в n-тия броен отляво надясно стълб и в m-тия броен отгоре надолу ред има координати (n, m).

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	4	7	11			
2	3	5	8	12				
3	6	9	13					
4	10	14						
5	15							55
6							56	59
7						57	60	62
8					58	61	63	64

Тъй като във всеки стълб има точно едно камъче, сборът от първите координати на всички камъчета е равен на $1+2+\cdots+8$. Аналогично, сборът от вторите координати на всички камъчета също е равен на $1+2+\cdots+8$; общият сбор от координатите им е $2(1+2+\cdots+8)$.

Да допуснем, че след преместването във всеки стълб и във всеки ред има по едно камъче. Това означава, че общият сбор от координатите на камъчетата ще бъде равен на $2(1+2+\cdots+8)$. При преместване на камъче в поле с по-голям номер то или се придвижва надолу по своя диагонал, или преминава в един от следващите (надясно) диагонали. Ако остане на своя диагонал, сборът от координатите на камъчето не се променя, но ако се премести в някой от намиращите се надясно диагонали, сборът от координатите му ще се увеличи. Следователно за да не се промени общият сбор на координатите на камъчетата, трябва всяко камъче да се премести надолу по своя диагонал. Това обаче е невъзможно, защото камъчето в най-долния ред не може да увеличи номера си, оставайки на своя диагонал. Противоречие.