Една задача за разрязване

Задача 1. Докажете, че ако съществува правоъгълник, подобен на правоъгълника $a \times b$, който може да бъде нарязан на правоъгълници $c \times d$, то съществува правоъгълник, подобен на правоъгълника $c \times d$, който може да бъде нарязан на правоъгълници $a \times b$.

Решение: За удобство ще означим с A правоъгълниците $a \times b$, а с B правоъгълниците с размери $c \times d$. Нека P е правоъгълник, подобен на A, нарязан на правоъгълници B. Тогава неговите размери са $(pc+qd)\times(rc+sd)$, където p, q, r, s са неотрицателни цели числа.

Първи случай. Нека отношението на страните на B е рационално, т.е $c : d = m : n$, където m иі n са естествени числа. Тогава отношението на страните на P е $(pc + qd) : (rc + sd) = (p(c : d) + q) : (r(c : d) + s)$, също рационално. От подобието на P и A следва, че и отношението на страните на A е рационално: $a : b = k : l$, където k и l са естествени числа. Но тогава от kl еднакви на A правоъгълника може да се сглоби квадрат. (Като разположим в ред l такива правоъгълника, за да се получи правоъгълник с височина b и дължина la; под него – още един такъв ред и т.н. общо k реда; получаваме квдарат със страна $la = kb$.) От такива квадрати сглобяваме правоъгълник, подобен на B, като mn квадрата се разположат в n реда, съставени от по m квадрата.

Втори случай. Нека отношението на страните на B е ирационално. Ще докажем следното твърдение:

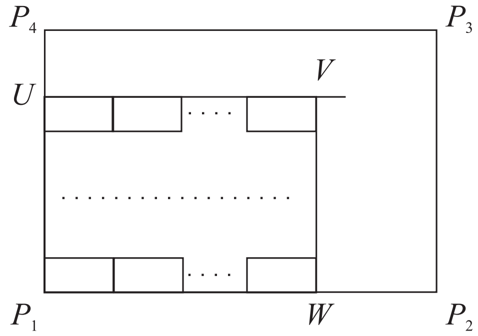
Всички правоъгълници, на които е нарязан правоъгълника P, са еднакво ориентирани (т.е. всички техни по-големи страни са успоредни).

Да отбележим, че ако дадено число се пресдставя във вида $zc+td$, където z и t са цели числа, то z и t са еднозначно определени. Това е така, защото ако $zc+td = z'c+t'd$, където z' и t' са цели числа, то $(z-z')c = (t-t')d$, и при $z \neq z'$ отношението $c : d$ ще бъде рационално, противоречие; следователно $z = z'$ и тогава и $t = t'$.

Нека P има върхове P_1, P_2, P_3, P_4 (виж чертежа). Нека от този ъгъл $_1$ е изрязан правоъгълник, чиято по-дълга страна е хоризонтална. Разглеждаме най-големия правоъглник от вида P_1UVW, който е нарязан на правоъгълници, всички по-дълги страни на които са хоризонтални (U лежи на P_1P_2, а W на P_1P_4).

Да допуснем, че точка V е вътрешна за P. Разглеждаме правоъгълниците от разрязването (извън P_1UVW), прилежащи към страната UV. Техните по-дълги страни не са всичките хоризонтални, защото иначе правоъгълникът

$PUVW$ не е най-големият. Аналогично не са хоризонтални всички по-дълги страни на правоъгълниците извън P_1UVW, прилежащи към VW.



Ако допуснем, че правоъгълниците от разрязването извън P_1UVW, прилежащи към UV, не излизат вдясно след страната UV, ще получим, че дължината на UV се представя по два начина във вида $zc + td$ с цели z и t, противоречие. Следователно тези правоъгълници излизат вдясно. Но тогава правоъгълниците извън P_1UVW, прилежащи към VW, не излизат нагоре от страната VW, т.е. дължината на VW по два начина се представя във вида $zc + td$ с цели z и t, противоречие.

Случаят, когато точката V лежи на границата на правоъгълника P, но не съвпада с P_3, по аналогичен начин води до противоречие.

Следователно V съвпада с P_3, с което твърдението е доказано.

Но тогава отношението на страните на A е равно на $(zc) : (td)$, където z и t са цели числа. Нека $(zc) : (td) = a : b$. Тогава $(ta) : (zb) = c : d$ и можем да получим правоъгълник, подобен на B, разполагайки еднакви с A правоъгълници в редове така, че техните равни на a страни да бъдат хоризонтални, като във всеки ред има по t правоъгълника, а редовете са общо z.