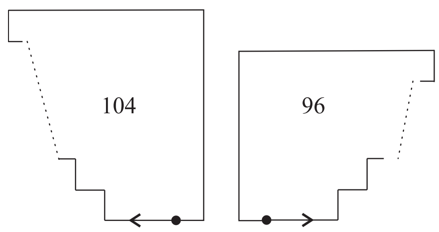
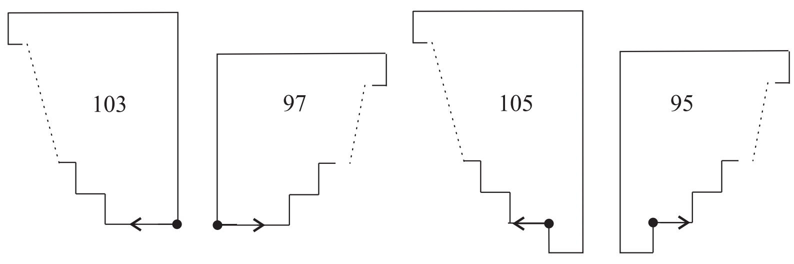
Няколко лесни интересни задачи

Задача 1. Всяка улица в един град е двупосочна, в посока или север - юг, или изток - запад. Шофьор пътувал из града по несамопресичащ се маршрут, направил 100 леви завоя и се върнал на мястото, от което тръгнал. Колко десни завоя е направил шофьорът?

Решение: Шофьорът се е разходил по контура на несамопресичащ се многоъгълник. Да допуснем първо, че началната точка не е връх на многоъгълника. Тогава шофьорът е направил общо едно завъртане (360°) около оста си. Всеки завой е на четвърт оборот (90°) наляво или надясно. Следователно сборът от завоите наляво се различава от сбора на завоите надясно с точно едно пълно завъртане, т.е. с 4 завоя. Това означава, че ако в маршрута има x леви завоя, десните завои са $x \pm 4$. Следователно шофьорът е направил 104 или 96 десни завоя (в първия случай пълното завъртане е в посока на часовниковата стрелка, а във втория – в обратна посока).



Случаят, когато шофьорът е тръгнал от връх на многоъгълника,се свежда към разгледания случай, като разликата е, че последният завой ”не се брои”. Ако този завой е десен, левите завои в маршрута са 100, а десните са $104 - 1 = 103$ или $96 - 1 = 95$. Когато последният завой е ляв, освен него трябва да има още 100 леви завоя. За 101 леви завоя в маршрута има $101 - 4 = 97$ или $101 + 4 = 105$ десни завоя.



Следователно десните завои са 95, 96, 97, 103, 104 или 105.

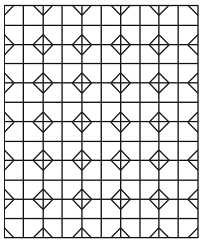
Задача 2. От лист на квадратчета е изрязан правоъгълник 10×12. Той е прегънат няколко пъти по линиите на квадратната мрежа, докато се получи квадрат 1×1. Колко части могат да се получат, ако този квадрат се разреже по отсечката, свързваща

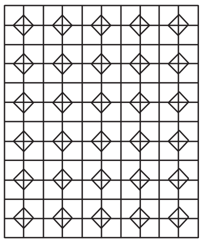
а) средите на две срещуположни страни;

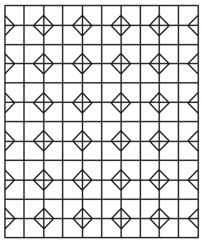
б) средите на две съседни страни.

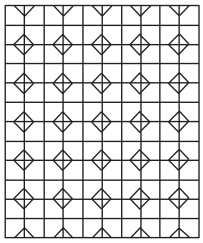
Решение: а) Нека разрязването е вертикално и във всички единични квадратчета построим вертикални отсечки, свързващи среди на срещуположни страни. При сгъване по линиите на квадратната мрежа тези отсечки се наслагват една върху друга. Следователно разрязването става по тези и само тези отсечки. При това се получават или $10 + 1 = 11$, или $12 + 1 = 13$ части.

б) Всяко единично квадратче е разрязано по една от четирите отсечки, свързващи среди на съседни страни. Ако изберем един от четирите начина за разрязване на кое да е квадратче, разрезите в останалите квадратчета са еднозначно определени. Броят на получените части е $6.7 + 1 = 43$ (фиг. 1), $5.6 + 1 = 31$ (фиг. 2), $6.6 + 1 = 37$ (фиг. 3) или $5.7 + 1 = 36$ (фиг. 4).


Фиг. 1


Фиг. 2


Фиг. 3


Фиг. 4

Задача 3. Даден е лист карирана хартия с размери 9×9. Колко най-много единични квадратчета може да се разрежат по двата диагонала, без листът да се разпадне на части?

Решение: Ще докажем, че могат да се разрежат най-много 21 квадратчета. Забелязваме, че:

1. две съседни квадратчета не могат да се разрежат едновременно, без листа да се разпадне;
2. гранични квадратчета не могат да се разрязват;
3. във вътрешен правоъгълник 3×4 могат да се разрежат най-много 5 квадратчета (проверете!).

"Вътрешната" част на дадения квадрат е квадрат с размери 7×7, който се състои от четири правоъгълника 3×4 и централното единично квадратче. Следователно разрязаните квадратчета са най-много $4.5+1 = 21$ (прибавено е централното квадратче, което не е включено в разглежданите правоъгълници). Пример за такова разрязване е следният:

	x		x		x		x	
		x				x		
	x		x		x		x	
				x				
	x		x		x		x	
		x				x		
	x		x		x		x	

Задача 4. Колко най-малко единични квадратчета трябва да се очертаят, за да се нарисува квадрат 25×25, разделен на 625 единични квадратчета?

Решение: За да се очертае границата на големия квадрат, трябва да се нарисуват $24.4 = 96$ гранични квадратчета. Разделяме вътрешния квадрат 23×23 на $\dfrac{23.3 - 1}{2} = 264$ на брой правоъгълника 2×1, като едно квадратче остава. Поне едно от двете квадратчета във всеки правоъгълник 2×1 трябва да се нарисува, за да е начертана разделящата ги отсечка. Следователно са очертани поне още 264 квадратчета; общо поне $96 + 264 = 360$.

Тези 360 квадратчета са достатъчни: като оцветим квадрата 23×23 шахматно и нарисуваме 264-те едноцветни квадратчета, останалите 265 квадратчета от другия цвят също ще са очертани.

Задача 5. Във всеки връх на куб е записано число. За един ход всяко число се заменя със средното аритметично на числата, които са записани в трите му съседни върха (замяната става едновременно). На десетия ход във всеки връх на куба се оказва отново числото, което е записано там в началото. Следва ли оттук, че всички числа са равни?

Решение: Възможно е записаните числа да са различни. Например, нека във върховете A, C, B_1, D_1 на куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ запишем 0, а във върховете B, D, A_1, C_1 запишем 1. След първия ход във върховете, в които е била записана 1, ще стои 0 и обратно, а след втория ход във всеки връх ще се окаже изходното число (а значи и след 10 хода също).