Графи

Задача 1. В една държава някои градове са свързани с директни автобусни маршрути. Известно е, че от всеки град може да се стигне до всеки друг (с евентуални прехвърляния). Иван си купил по един билет за всеки директен маршрут (т.е. може да пътува по всеки маршрут веднъж, независимо в коя посока). Петър купил по n билета за всеки маршрут. Иван и Петър отпътували от град A. Иван използвал всичките си билети, не купувал нови и накрая стигнал в град B. Петър известно време пътувал с купените от него билети и стигнал в град X, от който не може да продължи без да си купи нов билет. Докажете, че X е или A, или B.

Решение: По естествен начин съпоставяме на всеки град точка, а на всеки директен маршрут – отсечка, свързваща съответните точки. Получаваме граф, който Иван е обходил, тръгвайки от A и спирайки в B, като е минал по всяко ребро по веднъж. Тогава за всеки връх C, различен от A и B, е вярно, че:

- ребрата, по които Иван е влизал в C, са толкова на брой, колкото са ребрата, по които е излизал от C;
- по всяко ребро с край C Иван е минал точно един път.

Това означава, че от C излизат четен брой ребра. Като разсъждаваме по същия начин за краищата на маршрута, получаваме, че от A и B излизат по нечетен брой ребра.

Нека Петър се е оказал в град X, от който не може да продължи. Това означава, че е изпозвал всички билети за всички директни маршрути от X. Ако град X не е A или B, то от него излизат четен брой, например $2k$, ребра. Но тогава Петър е влизал и излизал от C точно $2kn$ пъти, т.е. четен брой пъти, редувайки влизане и излизане. Тъй като отначало Петър е влязъл в C, то последния път е излязъл от C. Получихме противоречие. Следователно Петър е спрял или в A, или в B, което трябваше да докажем.

Задача 2. В едно село всеки момък се познава с няколко моми, а две стари клюкарки знаят кой с кого се познава. Едната се похвалила, че може да сватоса всеки чернокос момък за мома, която той познава. Другата отговорила, че може да сватоса всяка русокоса мома за неин познат момък. Математик, който случайно чул техния разговор, казал: "Значи е възможно да се сватосат момите и момците така, че да са изпълнени и двете условия". Прав ли е той?

Решение: Ще докажем, че математикът е прав. Да сватосаме всеки чернокос момък за негова позната (както планира първата клюкарка) и всяка русокоса мома за неин познат (както планира втората). При това е възможно някой да е сватосан за две различни личности. Ще покажем как може да се поправи подобно объркване.

Нека на чернокосите момци съпоставим точки A_i, а на русокосите моми точки B_i, като всяко сватосване отбелязваме с отсечка (някои отсечки евентуално водят към тъмнокоси моми или русокоси момци). Тъй като всеки е включен в не повече от два проекто-брака, в получения граф от всеки връх излизат едно или две ребра. Граф, в който всеки връх има четност 1 или 2, се разпада на непресичащи се вериги. Ясно е, че всеки във веригата е сватосан за съседите си. Ако всички вериги са с дължина 2, т.е. от вида A_1B_1, то браковете не си противоречат. Да допуснем, че има верига с дължина не по-малка от 3 и да разгледаме следните случаи:

1. Ако веригата не е затворена и чернокосите момци и русокосите моми в нея са по равен брой, то тя е от вида $A_1B_1A_2B_2\dots A_nB_n$ или $B_1A_1\dots B_nA_n$. В този случай браковете $A_i - B_i$ удовлетворяват условието (пренебрегваме възможните бракове на записаните в краищата на веригата с русокоси момци или тъмнокоси моми).

2. Веригата не е затворена и чернокосите момци и русокосите моми не са по равен брой. Ако, например, момците са с един повече, веригата е от вида $A_1B_1A_2B_2\dots A_nB_nA_{n+1}$. В този случай или A_1, или A_{n+1} е сватосан за тъмнокоса мома (тъй като първата клюкарка сватосва всеки чернокос момък за различна мома, а момците във веригата са с един повече от русокоските). Нека A_{n+1} е сватосан за тъмнокосата мома C. Тогава браковете $A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$, $\dots$, $A_n - B_n$, $A_{n+1} - C$ удовлетворяват условието.

3. Веригата е затворена, т.е. е от вида $A_1B_1A_2B_2\dots A_nB_nA_1$. Тогава браковете $A_i - B_i$ удовлетворяват условието.

По този начин всяка верига се разпада на непротиворечащи си бракове.

Задача 3. Във всеки ред на таблица $(n-2)\times n$ $(n \geq 3)$ са записани в някакъв ред числата от 1 до n така, че във всеки стълб числата са различни. Докажете, че таблицата може да се допълни до квадрат $n \times n$ така, че във всеки ред и стълб да са записани числата от 1 до n.

Решение: В дадената таблица всяко от числата $1, 2, \dots, n$ е записано $n-2$ пъти (по един път във всеки ред). Нека под всеки стълб допишем двете липсващи в него числа. Така получаваме таблица $n \times n$, всеки стълб на която съдържа числата $1, 2, \ldots, n$. Това означава, че всяко от числата $1, 2, \ldots, n$ се среща в новата таблица n пъти, следователно е дописано точно два пъти.

Ще посочим алгоритъм за евентуално разместване на дописаните числа, така, че всеки от последните два реда да съдържа числата $1, 2, \ldots, n$.

Да запишем в редица числата $1, 2, \ldots, n$ и да свържем с отсечки тези от тях, които са дописани в един и същи стълб. Получаваме граф с n върха, всеки връх на който е с четност 2 (от всеки връх излизат две ребра). Следователно този граф е съставен от един или няколко цикъла, които можем да ориентираме в една и съща посока.

Тогава, ако реброто от графа, съответстващо на двойка дописани в един и същ стълб числа A и B, е ориентирано от A към B, поставяме A в горния, а B – в долния ред. Понеже във всяко число влиза стрелка и от всяко число излиза стрелка, то ще бъде по веднъж поставено във всеки от двата реда. Така получаваме търсеното разположение.

Задача 4. Изпъкнал N-ъгълник е разбит на триъгълници с помощта на непресичащи се във вътрешни точки диагонали. Триъгълниците са оцветени в черно и бяло така, че всеки два триъгълника с обща страна са разноцветни. За всяко N намерете максималната разлика между броя бели и черни триъгълници.

Решение: Да разгледаме граф, чиито върхове съответстват на триъгълниците от дадената триангулация и са оцветени като тях. Ребрата на графа свързват върхове, съответстващи на триъгълници с обща страна. Ясно е, че от всеки връх излизат най-много 3 ребра и разглежданият граф е дърво (свързан граф без цикли).

Нека броят на черните върхове е не по-малък от броя на белите. С $f(N)$ ще означаваме максималната разлика между броя черни и бели измежду N върха. Имаме $f(3) = 1, f(4) = 0, f(5) = 1$, като при всеки от тези случаи оптималният граф съдържа черен връх, от който излиза само едно ребро. Ако този черен връх свържем с нов бял връх, а белият – с два нови черни върха, ще получим граф от разглеждания вид, който има с 3 върха повече и разликата между броя черни и бели върхове при него е с 1 по-голяма. Следователно,

$$f(N+3) \geq f(N) + 1 \quad \text{при} \quad N \geq 3.$$

Оттук по индукция за всеки от случаите $N = 3k$, $N = 3k+1$ и $N = 3k+2$ получаваме, че за $k \geq 1$

$$f(3k) \geq k, \qquad f(3k+1) \geq k-1 \quad \text{и} \quad f(3k+2) \geq k.$$

Ще докажем, че тези оценки са точни.

- При $N = 3k$ броят на върховете е $3k-2$. Нека x от тях са бели; от тях излизат най-много $3x$ ребра. Остават $3k-2-x$ черни върха, свързани с поне $3k-2-x$ ребра към дървото. Освен това, x-те бели върха са свързани посредством черни; за връзка бял - черен - бял са необходими две ребра, излизащи от черен връх. Така x-те бели върха определят поне $x-1$ двойки от вида бял - черен - бял и изискват поне още $x-1$ ребра, излизащи от черни върхове. Следователно от черните върхове излизат поне $3k-2-x+(x-1) = 3k-3$ ребра. Тъй като броят на ребрата, излизащи от черни върхове, е равен на броя на ребрата, излизащи от бели върхове, то $3x \geq 3k-3$ или $x \geq k-1$. Седователно разликата между броя черни и бели върхове е $3k-2-x-x \leq 3k-2-2(k-1) = k$.

- При $N = 3k+1$ аналогично получаваме неравенството $3x \geq 3k-2$, т.е. $x \geq k$ и разликата е $3k-1-x-x \leq 3k-1-2k = k-1$.

- При $N = 3k+2$ имаме $3x \geq 3k-1$, т.е. $x \geq k$ и за търсената разлика имаме $3k-x-x \leq 3k-2k = k$.

Задача 5. Във вътрешността на квадрат са отбелязани няколко точки. Те са свързани помежду си и с върховете на квадрата чрез непресичащи се във вътрешни точки отсечки така, че квадратът се разделя на триъгълници. При това всяка от точките е е връх на триъгълник и не е вътрешна точка за страна на триъгълник. Възможно ли е при такава конфигурация от всяка от отбелязаните точки и от всеки връх на квадрата да излизат четен брой отсечки?

Решение: Да допуснем, че от всеки връх на квадрата и от всяка от отбелязаните точки излизат четен брой отсечки.

Построяваме граф, като на всеки триъгълник от триангулацията съпоставяме връх и свързваме с ребро върховете, съответстващи на съседни (с обща страна) триъгълници. Ясно е, че всяко ребро на този граф пресича една отсечка от триангулацията. Ще докажем, че в графа всеки цикъл пресича четен брой триангулиращи отсечки, т.е. всеки цикъл е с четна дължина.

За произволен цикъл да означим с $A_1, \ldots, A_k$ точките от триангулацията, които са във вътрешността му. Те са краища съответно на $2a_1, \ldots, 2a_k$ триангулиращи отсечки, от които съответно $b_1, \ldots, b_k$ не пресичат цикъла. Тогава в сбора $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ всяка отсечка е броена по два пъти (и двата и края са вътрешни за цикъла точки), т.е. този сбор е четен. Броят на отсечките от триангулацията, които пресичат цикъла, е равен на $2a_1 + \cdots + 2a_k - (b_1 + \cdots + b_k)$ и следователно също е четен.

Тогава върховете на графа могат да се оцветят в два цвята така, че всеки два свързани с ребро (съседни) върха да са разноцветни. Започваме оцветяването от произволен връх, след това оцветяваме всички негови съседни върхове в противоположния цвят и продължаваме с техните съседни. Ако при това се окаже, че даден връх трябва да оцветим в цвета на негов вече оцветен съсед, това ще означава, че в графа съществува цикъл с нечетна дължина, което е невъзможно.

Така получаваме двуцветно "шахматно" оцветяване на триангулирания квадрат. Тъй като от всеки връх на квадрата излизат четен брой ($2k$) отсечки, той е връх на нечетен брой ($2k - 1$) триъгълници. Следователно триъгълниците, включващи страна на квадрата, са едноцветни, например бели.

Нека броят на белите триъгълници е x, а броят на черните е y. Броят на страните на белите триъгълници е $3x$, а броят на страните на черните е $3y$. Но всяка отсечка, освен четирите страни на квадрата, е страна и на бял, и на черен триъгълник. Получаваме равенството $3x - 3y = 4$, което е невъзможно.