Инварианти и полуинварианти

Задача 1. Правилен $(2n+1)$-ъгълник е разрязан с помощта на непресичащи се във вътрешни точки диагонали на $2n-1$ триъгълника. Докажете, че поне три от тях са равнобедрени.

Решение: Страните на триъгълниците са страни или диагонали на многоъгълника. Триъгълници, образувани от две страни на многоъгълника и диагонал, ще наричаме *малки.* Ясно е, че има поне два малки триъгълника. (Триъгълниците са $2n-1$, а страните на многоъгълника са $2n+1$.)

Малките триъгълници са равнобедрени и ако има три такива, твърдението е доказано.

Да допуснем, че малките триъгълници са точно два. Ясно е, че всеки от останалите $2n-3$ триъгълници има за страна точно една страна на многоъгълника. Ако "изрежем"такъв триъгълник, многоъгълникът ще се разпадне на две части. Нека се движим от единия малък триъгълник към другия, преминавайки от триъгълник в триъгълник през тяхна обща страна. При всеки преход ще отбелязваме колко страни на многоъгълника има във всяка от двете части, на които триъгълника, в който сме стигнали, разделя многоъгълника. В началото тези числа са 2 и $2n-2$. При всеки преход първият брой се увеличава с 1, а вторият намалява с 1. В момента, когато се изравнят (и станат равни на n), ще се намираме в търсения трети равнобедрен триъгълник.

Задача 2. Върховете на 50-ъгълник разделят окръжност на 50 дъги, чиито дължини в някакъв ред са $1, 2, \ldots, 50$. Известно е, че дължините на всяка двойка срещуположни дъги (съответстващи на срещуположни страни на 50-ъгълника), се различават с 25. Докажете, че 50-ъгълникът има поне две успоредни страни.

Решение: Да означим противоположната дъга на дъгата A_1 с B_1. Лява сума на A_1 – $L(A_1)$ – ще наричаме сбора от дължините на дъгите, намиращи се между A_1 и B_1 при обхождане по посока на часовниковата стрелка, а дясна сума на A_1 – $R(A_1)$ – сбора от дължините на дъгите между A_1 и B_1 при обхождане по посока обратна на часовниковата стрелка. Ясно е, че при тази дефиниция $L(A_1) = R(B_1)$ и $R(A_1) = L(B_1)$.

Ако $L(A_k) = R(A_k)$, то съответстващите на A_k и B_k страни на многоъгълника са успоредни; следователно е достатъчно да докажем, че разликата $S(A_k) = L(A_k) - R(A_k)$ се анулира за някоя дъга A_k.

Първо ще отбележим, че $S(A_k)$ може да се запише като сбор на 24 разлики на дължини на срещуположни дъги. Всяка разлика е 25 или -25 и

$S(A_k) = p.25 - q.25$, където $p + q = 24$. Оттук $S(A_k) = 50p - 24.25 = 50(p - 12)$, т.е. $S(A_k)$ е кратна на 50.

Нека A_2 е съседната на A_1 дъга по посока на часовниковата стрелка. Тогава $L(A_2) = L(A_1) - A_2 + B_1$ и $R(A_2) = R(A_1) + A_1 - B_2$. Следователно $S(A_2)$ се различава от $S(A_1)$ с 0 или ± 50. По-нататък, движейки се по посока на часовниковата стрелка към B_1, всеки път ще получаваме за $S(A_k)$ кратно на 50 число, докато стигнем до $S(B_1) = -S(A_1)$. Следователно в някоя от дъгите A_k разликата $S(A_k)$ се анулира, което искахме да докажем.

Задача 3. По окръжност са записани няколко положителни числа, всяко от които е не по-голямо от 1. Докажете, че окръжността може да се раздели на три дъги така, че сборът от числата, записани на всяка дъга, да се различава от сбора на записаните на коя да е друга дъга числа с не повече от 1. (Ако на дъгата няма числа, сборът от записаните на нея числа се приема за 0.)

Решение: Условието на задачата е еквивалентно на това, че окръжността може да се раздели на три дъги така, че разликата между най-големия и най-малкия сбор да е по-малка от 1.

Разделяме окръжността на три произволни дъги A_0, B_0 и C_0 със сборове на записаните на тях числа съответно a, b и c, като $a \leq b \leq c$. По-нататък ще действаме по следния начин: ако $c - a > 1$, преместваме границата между дъгите A и C така, че точно едно число от дъгата C да премине на дъгата A. Нека това число е r. След тази операция получаваме нови дъги A_1, B_1 и C_1 със сборове $a + r$, b, $c - r$.

Да разгледаме тройките $S_1 = \{a, b, c\}$ и $S_2 = \{a + r, b, c - r\}$.

Ако $a = b < c$, тъй като $a < c - 1 \leq c - r$, то най-малкият сбор в S_2 $b(= a)$, т.е. равен е на най-малкия сбор в S_1. Най-големият сбор в S_2 е по-малък от най-големия сбор c в S_1, тъй като всяко от числата в S_2 е по-малко от c.

Ако $a < b \leq c$, от неравенствата $a + r \leq a + 1 < c$, $b \leq c$, $c - r < c$ следва, че всеки сбор в S_2 (а значи и най-големият) не надхвърля най-големия сбор c в S_1. От друга страна, $a < a + r$, $a < b$ и $a < c - 1 \leq c - r$, т.е. всеки сбор в S_2 (а значи и най-малкият) е по-голям от най-малкия сбор a в S_1.

И в двата случая разликата между най-големия и най-малкия сбор намалява при второто разделяне на окръжността. Следователно настъпва момент, когато тази разлика става по-малка от 1.

Задача 4. Остроъгълен триъгълник е разрязан по права на две части (не задължително триъгълни), след това една от тях отново е разрязана на две части и така нататък: на всяка стъпка някоя от наличните части се разрязва праволинейно на две части. Може ли след няколко стъпки да се окаже, че всички получени части са тъпоъгълни триъгълници?

Решение: Ще докажем, че ако в многоъгълника M има поне три нетъпи ъгъла (условие, което е изпълнено в началото), то след разрязване в една от получените части (означаваме ги с M_1 и M_2) отново ще има поне три нетъпи ъгъла.

Нека правата, по която разрязваме, пресича M в точките A и B. Точка A е връх на два ъгъла (по един в M_1 и M_2).

Ако A е връх на тъп ъгъл в M или лежи на страна на M, то поне един от получените два ъгъла е нетъп (тъй като сборът им не надхвърля $180°$); следователно броят на нетъпите ъгли се увеличава с поне още един.

Ако A е връх на нетъп ъгъл на M, и двата получени ъгъла с връх A са нетъпи, следователно броят на нетъпите ъгли отново се увеличава с един.

Аналогично разсъждаваме за точка B. Така броят на нетъпите ъгли общо в M_1 и M_2 е поне 5. По принципа на Дирихле следва, че в поне един от многоъгълниците има поне три нетъпи ъгъла. Следователно остроъгълен триъгълник не може да се разреже по посочения начин на тъпоъгълни триъгълници.

Задача 5. Билярдна маса има форма на многоъгълник (не задължително изпъкнал), всеки две съседни страни на който са перпендикулярни. Във всеки връх на масата има джоб. От връх A с вътрешен ъгъл $90°$ излита топка и се движи във вътрешността на многоъгълника, отразявайки се от страните му по закона: *ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване*. Докажете, че топката никога няма да се върне във върха A.

Решение: Нека топката излита под ъгъл α спрямо страната AB на многоъгълника. Тъй като вътрешният ъгъл при върха A е $90°$, то $\alpha \in (0^o, 90^o)$ (при $\alpha = 0^o$ или 90^o топката пада в джоба, намиращ се в съседен на A връх).

Понеже ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване, маршрутът на топката се състои от отсечки, които сключват ъгъл α или $180^o - \alpha$ с AB. Тъй като $\sphericalangle A = 90^o$, за да се върне в A, топката трябва да "влезе" в A под ъгъл α. Това означава, че в някоя точка от маршрута топката се отразява под ъгъл 180^o спрямо дотогавашната си траектория и започва да се връща. Това обаче е невъзможно, тъй като $\alpha \neq 0^o, 90^o$.