Математическа индукция

Задача 1. По колко различни начина числото 2004 може да се представи като сбор на приблизително равни естествени числа? Две числа се наричат приблизително равни, ако разликата им е не повече от 1. Сборовете, които се различават само по реда на събираемите, се смятат за еднакви.

Решение: Ще докажем, че числото N може да се представи по N начина като сбор на приблизително равни събираеми.

Да отбележим, че във всяко представяне участват най-много две различни събираеми (от вида a и $a + 1$, съответно "малко" и "голямо").

Числото 1 има едно представяне: с едно събираемо 1. Нека твърдението е доказано за някое N. Като прибавим във всяко представяне на N единица към едно от по-малките събираеми (или към кое да е, ако всички са равни), получаваме представяне на числото $N + 1$. Ясно е, че от различни представяния на N се получават различни представяния на $N + 1$.

Обратно, ако във всяко представяне на $N + 1$ (освен представянето на $N + 1$ като сбор на единици) едно от по-големите събираеми се намали с 1 (или, ако събираемите са равни, кое да е от тях се намали с 1), се получава представяне на N. Отново, от различни представяния на $N+1$ се получават различни представяния на N.

Следователно броят на представянията на $N + 1$ е с 1 по-голям от броя на представянята на N и по индукция твърдението е доказано.

Задача 2. Разполагаме с много картончета, на всяко от които е записано естествено число от 1 до n. Сборът от записаните на всички картончета числа е равен на $k.n!$, където k е естествено число. Докажете, че картончетата могат да се разпределят в k групи така, че във всяка група сборът от записаните на картончетата числа да е равен на $n!$.

Решение: Ще приложим индукция по n. При $n = 1$ твърдението очевидно е изпълнено. Нека е вярно за $n - 1$ и нека разгледаме множество с елементи $1, 2, \ldots, n$, чиято сума е $k.n!$.

Първо да отделим картончетата, на които е записано числото n и всяко от тях да сложим в плик, надписан с 1. След това да разгледаме произволни n картончета измежду останалите. Известно е, че измежду записаните на тях числа можем да изберем няколко с кратен на n сбор. Тези няколко картончета със сума tn слагаме в плик, надписан с t. Тъй като броят на числата в плика не надхвърля n и всяко от тях е най-много $n-1$, то $t \leq n-1$. С оставащите картончета постъпваме по същия начин, докато накрая имаме $r < n$ на брой картончета. Тъй като сборът от числата, записани върху всички картончета, е кратен на n и сборовете във всеки плик са също кратни на n, то сборът от числата на тези r картончета е също кратен на n, т.е. равен на nq (ясно е, че $q < n$). Така и последните r картончета слагаме в плик и го надписваме с q.

Всички пликове са надписани с числата $1, 2, \ldots, n-1$ и сборът от записаните върху пликовете числа е $\dfrac{k.n!}{n} = k.(n-1)!$. От идукционното предположение следва, че пликовете можем да разпределим в k групи така, че сборът от числата върху пликовете във всяка група да бъде $(n-1)!$. Това означава, че сборът от записаните върху картончетата от пликовете във всяка от тези групи числа е $n!$, с което индукцията е завършена.

Задача 3. Компания театрали изкупила билетите от цял ред, като се разположила там по произволен начин. Оказало се, че никой не е седнал на мястото си. Разпоредителят има право да размества помежду им само двойки съседи, и то ако всеки от тях не седи на мястото си. Винаги ли е възможно разпоредителят да размести зрителите така, че всеки да седне на своето място?

Решение: Да номерираме зрителите по номерата на билетите им: $1, 2, \ldots, n$. Ако разпоредителят успее да постави n-тия зрител на мястото му, а всички останали да не седят по местата си, с индукция по броя на зрителите ще получим, че е желаното разпределение е възможно. При това е достатъчно да посочим начин, по който n-тия зрител може да се премести по-близо към мястото си (например, надясно), като отново всички седят не по местата си. Ясно е, че след краен брой такива премествания n-тия зрител ще седне на мястото си.

Седящият на място k зрител n не може да се измести на едно място надясно, само ако на място $k+1$ седи зрител k. Тогава ще опитаме първо да изместим зрител k на едно място надясно, а след това да преместим и n-тия зрител. Това няма да бъде възможно, само ако на място $k+2$ седи зрител $k+1$. Но тогава ще опитаме да преместим $k+1$-вия зрител надясно, после k-тия и накрая n-тия. Отново, това би било невъзможно, само ако на $k+3$-то място седи зрител $k+2$. Продължавайки с аналогични разсъждения, стигаме до единствената ситуация, при която n-тия зрител не може да бъде преместен надясно, без някой друг да си седне на мястото: на местата $k, k+1, k+2, \ldots, n$ седят съответно зрителите $n, k, k+1, \ldots, n-1$. В такъв случай, като разместим n-тия зрител с десния му съсед $n-k$ пъти, ще получим разположение, при което последните $n-k+1$ зрители са по местата си, като по този начин свеждаме задачата към по-малък брой зрители и използваме индукционното предположение.

Задача 4. В редица са поставени 23 кутии с топки, като за всяко естествено число n от 1 до 23 има кутия с точно n топки. С една операция може да се преместят в произволна кутия още толкова топки, колкото вече има в нея, взети от кутия с повече топки. Винаги ли е възможно с последователност от такива операции в първата кутия да остане 1 топка, във втората - две и т.н., в 23-тата кутия - 23 топки?

Решение: Твърдението е вярно за произволен брой кутии (не само 23). Доказателството е с индукция по броя на кутиите.

Тривиалната ситуация "една кутия с една топка" дава базата на индукцията.

Нека $n-1$ кутии могат да се подредят според изискванията на условието и имаме n кутии.

Забелязваме, че с последователно преместване на топките от първата кутия във втората, от втората в третата и така до k-тата, от разпределението $(k, k-1, k-2, \ldots, 3, 2, 1)$ получаваме $(1, k, k-1, \ldots, 3, 2)$ за всяко $k \geq 2$. Продължавайки циклично, от втората кутия удвояваме топките в третата, от третата в четвъртата и т.н., от k-тата в първата. Така стигаме до разположението $(2, 1, k, k-1, k-2, \ldots, 4, 3)$.

С няколко такива цикъла, кутията с k топки може да заеме мястото на кутията с $k-1$, $k-2$, $\ldots$, 1 топки. При това останалите кутии съдържат различен брой топки. Аналогично това е вярно за произволно първоначално разпределение.

Тогава, след като направим нужния брой циклични премествания за n-тата кутия и тя се окаже на последното n-то място, според индукционното предположение можем да подредим и останалите кутии с $1, 2, \ldots, n-1$ топки.

Задача 5. Карлсон има 1000 буркана със сладко. Бурканите не са задължително еднакви, но всеки от тях съдържа не повече от 1% от всичкото сладко. За закуска Карлсон може да изяде по едно и също количество сладко от кои да е 100 буркана. Докажете, че Карлсон може да закусва така, че за няколко дни да изяде всичкото сладко.

Решение: Ще докажем твърдението по индукция.

Да предположим, че Карлсон може да изяде всичкото сладко, ако вместо 100 и $\dfrac{1}{100}$ в условието имаме 99 и $\dfrac{1}{99}$ (общото количество буркани не е важно, същественото е, че те са достатъчно много, не по-малко от 100). Ще наричаме тези задачи съответно "задача-100" и "задача-99". Ще обясним как, след като е решил задача-99, Карлсон може да реши задача-100.

Карлсон мислено разделя бурканите със сладко на две части: най-големия (по количество на сладкото) и "всички останали". Да отбележим, че за "всички останали" буркани се изпълнява условието на задача-99 (в "останалите" буркани сладкото е не по-малко от $\frac{99}{100}$ от цялото сладко и във всеки от "останалите" буркани е не повече от $\frac{1}{100}$ от цялото сладко, т.е. не повече от $\frac{1}{100} : \frac{99}{100} = \frac{1}{99}$ от количеството сладко в "останалите" буркани).

Затова Карлсон може да действа така: да изяде от "останалите" буркани всичкото сладко по алгоритъма на "задача-99", като на всяка стъпка взема 99 буркана от "останалите" и добавя стотния буркан – "най-големият". За да свърши едновременно сладкото в "най-големия" буркан и във "всички останали", е необходимо в него да има точно 99 пъти по-малко сладко, отколкото във "всички останали" взети заедно (тъй като от него всеки път ще се изяжда 99 пъти по-малко, отколкото от "останалите"). Тоест е необходимо в най-големия буркан първоначално да е имало точно $\frac{1}{100}$ част от общото количество сладко.

Ако в най-големия буркан има по-малко от $\frac{1}{100}$ от общото количество сладко, Карлсон избира 100 непразни буркана от "всички останали" и изяжда от тях някакво количество сладко. При това частта сладко в най-големия буркан се увеличава. Ще покажем как трябва да действа той, за да направи тази част точно $\frac{1}{100}$. Ако количеството сладко в най-малкия буркан (от избраните сто) позволява да се изяде част от сладкото така, че частта на най-големия буркан да стане равна на $\frac{1}{100}$, той прави така. Иначе изяжда всичкото сладко от най-малкия буркан, намалявайки количеството на непразните буркани. Карлсон спира или когато постигне целта, или когато непразните буркани сред "всички останали" станат по-малко от 100. Но последният случай е невъзможен, тъй като частта на най-големия буркан е не по-малка от $\frac{1}{100}$, т.е. Карлсон е трябвало да спре по-рано.

За да завършим решението ще отбележим, че по начина, по който сведохме задача-100 към задача-99, може да я сведем сега към задача-98, нея – към задача-97, и т.н. А задача-1 е очевидна.