С МРЕЖА НА ЛОВ ЗА ИНВАРИАНТИ

Йордан Табов, Невена Събева

В бурното море на състезателните задачи има един тих залив, наречен *Инварианти*. Водата там е спокойна и който влезе в него, може да разчита, че ще намери неочаквано кратки и красиви решения.

Но входът в този залив е труден. За да преодолеем заобикалящите го плитчини, трябва да ни помогне... кой друг би могъл да ни помогне, освен Златната рибка?

Остава само да я хванем – с подходяща мрежа. Каква друга мрежа може да измисли един математик, освен целочислена?

За да стигнем дотам, ще направим едно кратко пътуване по вълните на споменатото море. И така, напускаме стандарта на учебния материал по математика и се отправяме към предизвикателствата на неизвестното – през вълните и водовъртежите на коварните до нерешимост „нестандартни“ задачи. Случаят рано или късно ще ни доведе близо до залива *Инварианти*, а съдбата ще стовари върху нас премеждие във вид на отчайваща на пръв поглед задача. Например като тази:

Задача 1. *На шахматна дъска Петър избира произволен квадрат* 2×2 *и едновременно променя цвета на четирите му полета (от бял в черен и обратно). Възможно ли е след няколко такива операции на дъската да остане само едно черно поле?*

Ситуацията изглежда много сложна. Всеки избор на квадрат 2×2 може да бъде осъществен по $7^2 = 49$ различни начина. Това прави практически необозрими всички възможности за развитие на процеса на оцветяване. Попадаме в изпитанието на приказния герой, комуто е заръчано за една нощ да намери игла в купа сено. Но когато задачата изглежда непосилна, ще подходим не със сила, а с мъдрост. „Утрото е по-мъдро от вечерта“; един свеж поглед към проблема може да доведе до решението му.

Ако отговорът на формулирания в условието на задачата въпрос е положителен, ще трябва да посочим една – **само една!** – редица от последователни избори на Петър, които, след съответните промени на цвета на полетата, ще направят цялата дъска, с изключение на точно едно поле, бяла.

Но ако отговорът е отрицателен? Тогава трябва някак да обхванем и преценим **всички** възможни редици от последователни избори на Петър. А те са много, извънредно много...

В този случай е за препоръчване да намерим подходящ **инвариант**.

И така, да разгледаме произволна редица от последователни избори на Петър, в резултат на която протича процес от промени на цветовете на полетата. В светлината на поставения в задачата въпрос е важно само как се променя броят на черните полета на дъската и по-точно, дали от 32 (в началото), този брой може да стане равен на 1. Нека означим с x броя на черните полета на дъската в даден момент. Ще разгледаме как се променя x при **един** избор на Петър. За броя на белите и черните полета в избрания от него квадрат 2×2 има пет възможности, съответстващи на петте реда в таблицата:

Черни	Бели	Нова стойност на x
4	0	$x-4$
3	1	$x-2$
2	2	x
1	3	$x+2$
0	4	$x+4$

Виждаме, че от състояние x черни полета процесът води до състояние с $x-4$, $x-2$, x, $x+2$ или $x+4$ черни полета. Сега вече може – и дори трябва! – да забележим, че при този преход x запазва четността си. С други думи, четността на броя x на черните полета е инвариантна при всеки – **какъв да е** – избор на Петър. И следователно е инвариантна за процеса от промени на цветовете на полетата при произволна редица от последователни избори на Петър. Този извод „по вълшебен начин“ решава задачата, защото е ясно, че от четното $x = 32$ не може да се получи нечетната стойност $x = 1$.

Както никое тихо пристанище не може за дълго да задържи истинските капитани, ние смело се отправяме към открито море в търсене на нови приключения. И ги намираме – следващата задача ни изпраща право в сърцето на бурята.

Задача 2. *На остров Камелот живеят 13 сиви, 15 кафяви и 17 розови хамелеона. Ако се срещнат два разноцветни хамелеона, те едновременно се оцветяват в третия цвят. Възможно ли е в някакъв момент всички хамелеони на острова да са едноцветни?*

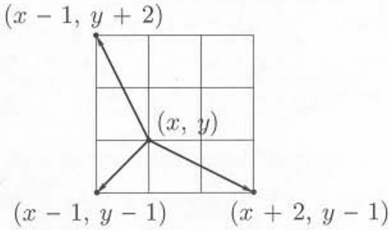
Натрупаният опит ни подсказва да проверим как се променя числеността на всеки цвят хамелеони в процеса на преоцветяване. Тъй като популацията е затворена (на острова), общият брой на хамелеоните се запазва. Затова състоянието се определя напълно от броя хамелеони от кои да е два цвята. Нека в даден момент сивите са x, а кафявите – y. Следващата среща ще промени двойката (x, y) по един от трите възможни начина, които са описани в таблицата:

Среща на	Нова стойност на (x, y)
сив и кафяв	$(x-1, y-1)$
сив и розов	$(x-1, y+2)$
розов и кафяв	$(x+2, y-1)$

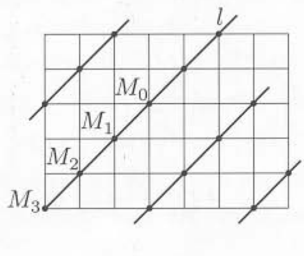
Забелязваме, че числеността на хамелеоните от всеки цвят или се увеличава с 2, или се намалява с 1; но за разлика от предишната задача, това наблюдение не подсказва никакъв инвариант. Как да продължим нататък?

Приказните герои често се отправят към далечни царства в търсене на помощ. Ние също ще погледнем към друга, далечна на пръв поглед област от математиката. За да уловим тъй нужната ни Златна рибка, ще хвърлим една... целочислена мрежа в координатната равнина!

Двойката (x, y), която описва моментното състояние M в процеса на преоцветяване, по естествен начин се интерпретира с точка M с координати (x, y). По този начин например началното състояние се описва от точката $M_0(13, 15)$. Правилата за преход към следваща точка, описваща състояние от процеса, са определени от таблицата и графично се представят по следния начин:



По същия начин, при нова среща на хамелеони, всяко от трите възможни състояния може да породи други три и т.н. Да отбележим точките, които могат да се достигнат за три срещи, и да потърсим закономерност в това начално развитие на **траекторията на процеса**.



И с невъоръжено око се забелязва, че точките се подреждат... върху успоредни прави! Уловихме ли нещо? За да „издърпаме мрежата“ и да проверим, е необходима известна математическа екипировка. Но дори и да не сте изучавали уравнение на права, лесно ще се убедите, че координатите на отбелязаните точки $M_1(12,14)$, $M_2(11,13)$, $M_3(10,11)$ от правата l през $M_0(13,15)$ удовлетворяват равенството $y-x=2$. Това равенство се нарича уравнение на l и е в сила за всяка точка от тази права. При вертикално пренасяне на l с 3, -3 и -6 единици получаваме другите отбелязани на чертежа прави. Затова техните уравнения са $y-x=2+3$, $y-x=2-3$ и $y-x=2-6$.

Логично е да предположим, че ако продължим редицата от преоцветявания, съответните точки ще се групират върху прави с подобни уравнения:

$$(A) \qquad y-x=2\pm 3k, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Както моряците не бързат да се доверят на прекрасните гледки, зад които може да стои измамната привидност на Фата Моргана, миражът на корабокрушенците, и ние строго ще проверим привлекателната си хипотеза. Видът на уравненията в (A) ни подсказва да разгледаме как се променя разликата $y-x$ след среща на два хамелеона:

Среща на	Нова стойност на $y-x$
сив и кафяв	$(y-1)-(x-1)=(y-x)$
сив и розов	$(y+2)-(x-1)=(y-x)+3$
розов и кафяв	$(y-1)-(x+2)=(y-x)-3$

Виждаме, че от точка (x,y) върху семейството успоредни прави (A) непосредствено следва отново точка върху (A). Следователно всички състояния на процеса на преоцветяване се описват с точки от (A). Това е търсеното инвариантно свойство. С негова помощ укротихме бурята, вятърът разпръсна облаците и пътят пред нас се проясни. Дали е възможно всички хамелеони на острова да станат едноцветни? Ако допуснем, че розовите хамелеони могат да асимилират кафявите и сивите, ще следва, че точката с координати $(0,0)$ лежи на траекторията на процеса. Тъй като равенството $0=2\pm 3k$ е невъзможно за цяло k, получаваме противоречие. По същия начин точките $(0,45)$ и $(45,0)$ не лежат върху (A) и значи на острова не могат да останат нито само сиви, нито само кафяви хамелеони.

След това далечно плаване, изпълнено с препятствия, някои ще си починат, а други ще пожелаят да изпитат своята сила в самостоятелно пътешествие. Предлагаме им, подобно на трите изпитания на приказния герой, следните три предизвикателства (и не пропускайте да си вземете целочислената мрежа!):

Задача 3. *Индианско племе притежава 24 кюлчета злато, 26 диаманта и 25 стъклени перли. При Кортес те могат да обменят кюлче злато и диамант за една стъклена перла, при Монтесума – кюлче злато и стъклено топче за един диамант, а при съседното племе – диамант и стъклено топче за едно кюлче злато. След няколко сделки останала само една вещ. Каква е тя?*

Задача 4. *Дадени са краен брой фигури – квадрати, триъгълници и кръгове. Избират се две от тях и се заменят с една по правилото:*

$$(\triangle, \bigcirc) \to \triangle \qquad (\square, \bigcirc) \to \bigcirc$$

$$(\bigcirc, \bigcirc) \to \bigcirc \qquad (\square, \square) \to \triangle$$

$$(\triangle, \triangle) \to \square \qquad (\triangle, \square) \to \bigcirc$$

Докажете, че вида на фигурата, която ще остане последна, не зависи от избора и реда на извършените замени.

Задача 5. *В страните Дилия и Далия паричните единици са дилери и далери съответно. В Дилия един дилер се разменя за 4 далера, а в Далия един далер се разменя за 4 дилера. Начинаещ финансист има 1 дилер и може свободно да минава границата и да обменя пари. Възможно ли е броят на дилерите да се изравни с броя на далерите?*

С това, разбира се, темата не е завършена – има и други подобни красиви задачи и идеи за решаването им. Кои от тях да добавим, за да стане една хубава и полезна колекция? Помогнете ни да ги съберем, изпратете ни вашите предложения на адрес: zlatnata.ribka@yahoo.com.