Метод на крайния елемент

Задача 1. В редица са записани няколко числа. Петър избира две съседни числа, лявото от които е по-малко от дясното, разменя им местата и едновременно с това ги умножава по 2. Докажете, че Петър може да направи само краен брой такива операции.

Решение: Нека числата са записани на картончета и подредени в редица. Ще докажем, че две картончета, които веднъж са си сменили местата, не могат да се върнат обратно. Ако допуснем противното и разгледаме двойката (A, B), която първа се е върнала, е ясно, че между двете размествания на A и B е имало поне една операция с A или B. Нека тя е с A. След нея картончето C, което се е сменило с A, попада между A и B. Повече то не се разменя с A (допуснахме, че първият обратен обмен е (A, B)). То не може и да остане между тях (иначе не биха могли да се разменят повторно). Следователно C се размества с B. Това означава, че на всяко разместване на A съответства разсместване на B, т.е. те са се удвоявали равен брой пъти и по този начин дясното остава по-голямо от лявото, т.е. повторна тяхна размяна е невъзможна.

Следователно общият брой операции не надхвърля броя на двойките числа, т.е. $\binom{n}{2}$.

Задача 2. Нека n е фиксирано просто число, по-голямо от 3. Един триъгълник ще наричме *приемлив*, ако градусната мярка на всеки негов ъгъл е от вида $\dfrac{180m}{n}$ за някое естествено число m. Отначало на масата има един приемлив триъгълник. Позволява се да се вземе триъгълник от масата и да се разреже на два приемливи триъгълника, нито един от които не е подобен на някой от тези на масата. Двата получени триъгълника също се поставят на масата. Докажете, че в момента, в който следващо разрязване е невъзможно, всеки приемлив триъгълник е подобен на някой от триъгълниците на масата.

Решение: Ако приемем ъгъла $\dfrac{180^\circ}{n}$ за 1, то сборът от ъглите на триъгълник ще бъде n. Ще описваме триъгълниците с тройки ъгли. Да разделим приемливите триъгълници на присъстващи (като части на масата) и отсъстващи.

Нека a е най-малкият ъгъл измежду ъглите на отсъстващите триъгълници. Избираме всички отсъстващи триъгълници с ъгъл a, отбелязваме в тях по един ъгъл a, а останалите им ъгли ще наречем допълнителни (някои допълнителни също могат да бъдат равни на a). Измежду допълнителните ъгли избираме ъгъл b – най-големия кратен на a (ако има такъв) или просто най-големия (ако няма кратни на a). Разглеждаме отсъстваща триъгълник (a, b, c).

Ще докажем, че триъгълник $(a, a+b, n-2a-b)$ присъства. Измежду допълнителните ъгли няма равен на $a+b$, тъй като в обратен случай бихме избрали него вместо b. Затова е достатъчно да покажем, че $n-2a-b > 0$. От избора на a следва, че $c \geq a$, оттук $n-2a-b = (a+b+c)-2a-b = c-a \geq 0$, като равенство е възможно само ако $c = a$. Но ако $c = a$, то измежду допълнителните ъгли има кратни на a, следователно и b е кратен на a, откъдето и простото n е кратно на a – противоречие.

Остана да разрежем присъстващия триъгълник $(a, a+b, n-2a-b)$ така, че ъгъл $a+b$ да се раздели на ъгли a и b и да се получат триъгълници $(b, a, ...)$ и $(a, n-2a-b, ...)$, т.е. отсъстващия (b, a, c) и $(a, n-2a-b, a+b)$, подобен на разрязания.

Задача 3. В безкрайна редица от естествени числа всяко следващо число X' се получава от предишното X чрез прибавяне към X на една от ненулевите цифри на X. Докажете, че задължително в тази редица ще се появи и четно число.

Решение: Да допуснем, че всеки член на редицата x_n е нечетен. В записа на x_1 участва поне една четна цифра, иначе x_2 ще е четно. Разглеждаме тази четна цифра k от записа на x_1, която стои в най-висок разряд (най-вляво). Тъй като редицата расте неограничено, съществува неин член x_m, при който k за първи път преминава в $k+1$. Ясно е, че цифрите с по-висок разряд остават непроменени, а цифрите вдясно, освен последната, са 0. Следователно всички ненулеви цифри на x_m са нечетни. Това означава, че x_{m+1} е четно число, противоречие.

Задача 4. Дадена е редица, първите два члена на която са 1 и 2 съответно, а всеки следващ член е най-малкото естествено число, което още не се е срещало в редицата и което не е взаимно просто с предишния член на редицата. Докажете, че всяко естествено число е член на тази редица.

Решение: Първо ще докажем, че съществува просто число p, което е делител на безброй много членове на редицата.

Да допуснем, че всяко просто число е делител на краен брой членове на редицата. Нека N е най-голямото четно число в редицата. Съществува число M от редицата, което няма по-малък от N прост делител (иначе всички прости делители на числата в редицата ще са по-малки от N, т.е. краен брой и следователно някое от по-малките от N прости числа ще дели безброй много членове на редицата). Ако най-малкият прост делител на

M е q, то $2q > q > N$ и следователно $2q$ не е член на редицата. От друга страна, според дефиницията на редицата следващият член след M е $2q$; противоречие.

Нека сега простото число p дели безкрайно много членове на редицата и нека q е друго просто число. За всяко естествено число n съществува член на редицата L такъв, че p/L и всеки от следващите членове е по-голям от pq^n. Тъй като pq^n и L не са взаимно прости и следващият след L член е по-голям от pq^n, то pq^n трябва да предхожда L в редицата. Получихме, че съществуват безброй много членове на редицата, кратни на q. Следователно всяко просто число дели безброй много членове на редицата.

Да предположим, че K е най-малкото естествено число, което не се среща в редицата и q е негов прост делител. Тъй като има безброй много членове на редицата, кратни на q, то съществува член P такъв, че q/P и всяко от числата $1, 2, \dots, K-1$ предхожда P в редицата. Тъй като P и K не са взаимно прости, то следващият след P член трябва да бъде K, което е противоречие.

Задача 5. Петър има таблица 5×5, попълнена с 25 различни числа. Петър избира най-голямото число в таблицата и зачертава реда и стълба, в които се намира то. След това избира най-голямото от останалите числа, зачертава реда и стълба в които се намира то и т.н. Иван има същата таблица и постъпва по подобен начин, но всеки път избира най-малкото число. Възможно ли е сборът на числата, избрани от Иван, да е по-голям от сбора на числата, избрани от Петър?

Решение: Да означим числата в реда на тяхното избиране: Петър избира b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, а Иван – m_0, m_1, m_2, m_3, m_4. Ще докажем, че ако $i + j < 5$, то $b_i \geq m_j$.

Индексът е равен на броя редове и броя стълбове, зачертани преди избора на съответното число. Например, при избора на b_1 са били зачертани един ред и един стълб, а при избора на m_3 – три реда и три стълба. Преди Петър да избере b_1 и Иван да избере m_3, общо са били зачертани най-много 4 реда и 4 стълба. Следователно поне едно число a е незачертано и в двата случая. Петър избира най-голямото от незачертаните числа, затова $b_1 \geq a$; Иван избира най-малкото от останалите, затова $m_3 \leq a$. Следователно $b_1 \geq m_3$. Аналогично доказваме, че $b_0 \geq m_4$, $b_2 \geq m_2$, $b_3 \geq m_1$ и $b_4 \geq m_0$, т.е. сборът на Петър е не по-малък от сбора на Иван.