Емил Колев, Невена Събева

МАТЕМАТИКА ЗА НАПРЕДНАЛИ

ШКОЛА ПО МАТЕМАТИКА

ЗА 5., 6., 7. КЛАС

УНИМАТ СМБ
2016 г.

Настоящият сборник включва материали от курса *Математика за напреднали* за ученици от 5. до 8. клас, проведен през 2016 г.

В първата част на сборника се представят някои класически методи и идеи за решаване на състезателни задачи – инварианти, математическа индукция, краен елемент, лица. Втората част включва по-трудни задачи от олимпиади, за чието решаване е необходимо комбиниране и творческо прилагане на различни идеи.

Сборникът е предназначен за ученици (при подготовката им за участие в математически състезания), за учители (в работата им с изявени ученици), както и за всички любители на математиката.

София, 2016 г.

Съдържание

Предговор

В този сборник са илюстрирани основните методи за решаване на задачи от състезания и олимпиади за ученици от 5. - 7. клас. Включените задачи са с различна трудност. За решаването на по-лесните от тях са достатъчни стандартните училищни знания, елементарна логика и аритметични пресмятания.

За решаване на трудните задачи, където основните идеи не са на “повърхността„, трябва различен подход. На първо място е необходимо търпение при натрупване на факти и откриване на свойства, които могат да доведат до решение. *Преломният момент* е намирането на основната идея. За нейното успешно прилагане е необходимо въвеждането на подходящи означения и правилна последователност на работа.

На пръв поглед разнообразието от задачи е огромно. На практика част от задачите могат бързо да бъдат класифицирани към определена област, например принцип на Дирихле, инварианти, принцип на крайния елемент, игри. Доброто познаване на основните подходи гарантира на *опитните състезатели* бързо откриване на основната идея.

Някои от задачите имат изследователски характер. При тях ориентирането в условието и откриването на важните свойства отнема повече време. Това изисква търпение и упоритост.

Включени са задачи от състезания и олимпиади на различни страни – България, Русия, Италия, Хърватия, Сърбия, Словения.

КОМБИНАТОРИКА

Задача 1. Имаме две купчинки с a и b бонбона. Двама, редувайки се, изяждат произволен брой бонбони, но само от едната купчина. Който изяде последния бонбон, печели. Кой има печеливша стратегия?

Решение. Да означим първия с A, а втория – с B. Ако в двете купчини има равен брой бонбони, B има печеливша стратегия. Той трябва да играе симетрично на първия, т.е. ако A е изял x бонбона от едната купчина, B изяжда същия брой бонбони x от другата. Ако в двете купчинки има различен брой бонбони, с първия си ход A изравнява бонбоните, след което прилага симетричната стратегия.

Задача 2. Има две купчинки с a и b бонбона. Двама, играят следната игра. Редувайки се, всеки изяжда едната купчинка, а другата разделя на две (не непременно равни) части. Който не може да играе според това правило, губи. Кой има печеливша стратегия в зависимост от a и b?

Решение. Ще докажем, че ако едната от двете купчинки е с четен брой бонбони, то първият има печеливша сртатегия. Нека a е четно число. Първият изяжда купчинката с b бонбона и разделя другата купчинка на две: едната с един бонбон и другата с $a - 1$ бонбона. Вторият задължително трябва да изяде купчинката с един бонбон и да раздели другата купчинка на две. Тъй като $a-1$ е нечетно число, то едната от тези две купчинки е с четен брой бонбони, а другата с нечетен брой. Тогава първия изяжда купчинака с нечетен брой бонбони и разделя другата на две части, едната с един бонбон и т.н.

По този начин първия винаги ще има ход и втория ще загуби.

Задача 3. а) Нека имаме два вида монети от 2 ст. и 5 ст. Какви суми можем да образуваме, като можем да използваме най-много две монети?

б) Най-малко колко вида монети ни трябват, за да можем да представим всяко число от 1 до 20 включително с 1 или 2 монети?

Решение. а) Сумите са 2, 4, 5, 7 и 10 стотинки.

б) Нека имаме 5 монети $a < b < c < d < e$. Като използваме две от тези монети можем да получим следните 20 суми: a, b, c, d, e, $2a, 2b, 2c, 2d, 2e$ и $a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, b+e, c+d, c+e$ и

$d + e$. Следователно, ако това са точно числата от 1 до 20 между тях не трябва има повтарящи се.

Ясно е, че $a = 1$, защото иначе не можем да получим 1. Числото 2 се получава като $1 + 1$. Следващото число е $b = 3$, с помощта на което се получават $3, 3 + 1 = 4$ и $2.3 = 6$. Следващото число, което не може да се получи е 5 и следователно $c = 5$. Тогава 6 се получава по два начина $1 + 5 = 2.3$ и някой от останалите сборове не може да се получи.

С монети от $1, 3, 5, 7, 9$ и 10 можем да получим всички числа от 1 до 20. Следователно са необходими поне 6 вида монети.

Задача 4. Разполагаме с няколко тежести и с везни. Колко най-малко и какви тежести са необходими, за да можем с едно премерване на везните да отмерим произволно число килограми захар от 1 до 13 килограма?

Решение. Ако имаме само две тежести a и b, като $a < b$, с тях можем да измерим тегла a, b, $a + b$ и $b - a$. Следователно две тежести не са достатъчни за измерване на всички килограми от 1 до 13. Да изберем тежести 1, 3 и 9. Ясно е, че можем да отмерим 1, 3 и 9 килограма. Останалите килограми можем да премерим по показаните начини:

$$2 = 3 - 1, \quad 4 = 3 + 1, \quad 5 = 9 - 3 - 1, \quad 6 = 9 - 3, \quad 7 = 9 - 3 + 1,$$

$$8 = 9 - 1, \quad 10 = 9 + 1, \quad 11 = 9 + 3 - 1, \quad 12 = 9 + 3, \quad 13 = 9 + 3 + 1.$$

Забележка. За всяко n можем да изберем n тежести (това са $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{n-1}$) с които да отмерим произволен брой килограми от 1 до $\dfrac{3^n + 1}{2}$.

Задача 5. Дадени са n естествени числа. Известно е, че сборът на всеки две от тях е равен на сбора на няколко (може и едно) от останалите числа. Колко най-малко може да бъде n?

Решение. Да допуснем, че съществуват 5 числа $a < b < c < d < e$ с исканото свойство. Сборът на двете най-големи числа $d+e$ е равен на сбора на поне три от останалите числа. Следователно $d+e = a+b+c$. Сборът на двете най-малки числа $a+b$ е равен на някое от останалите числа. Следователно $a+b = c$, $a+b = d$ или $a+b = e$. В първия случай получаваме $d + e = 2c$, във втория $e = c$ и в третия – $d = c$. Тъй като

$e > d > c$ нито едно от тези равенства не е вярно. Следователно $n \geq 6$. Директно се проверява, че сборът на всеки две числа от $3, 4, 5, 6, 7, 8$ е равен на сбора на няколко от останалите, което означава, че $n = 6$.

Задача 6. Кои числа не могат да се представят като сбор на няколко последователни естествени числа?

Решение. Ще докажем, че само степените на чисото 2 не могат да се представят като сбор на няколко последователни естествени числа. Да допуснем, че съществува степен на числото 2, която може да се представи по този начин. Това означава, че:

$$2^n = a + (a+1) + \cdots + (a+b),$$

където a и b са естествени числа. Тъй като

$$a + (a+1) + \cdots + (a+b) = (b+1)a + 1 + 2 + \cdots + b =$$

$$= (b+1)a + \frac{(b+1)(b+2)}{2} = \frac{(b+1)(2a+b+2)}{2},$$

то $2^{n+1} = (b+1)(2a+b+1)$. Числата $b+1$ и $2a+b+2$ са по-големи от 1 и са с различна четност. Това означава, че числото 2^{n+1} има нечетен делител, по-голям от 1, което е противоречие.

Остава да докажем, че всички числа, които не са степени на двойката могат да се представят като сбор на няколко последователни естествени числа. За целта ще покажем, че ако едно естествено число p се представя като сбор на последователни естествени числа, то числото $2p$ също се представя по такъв начин. Нека $p = (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+k)$. Ако k е четно число, то:

$$2p = (a-k) + (a-k+1) + \cdots + (a+2k)$$

и ако $a - k < 0$ можем да съкратим всички отрицателни членове с противоположните им положителниа. По този начин остава сбор на последователни естествени числа. Ако $k = 2s+1$ е нечетно, то

$$2p = (b+1) + (b+2) + \cdots + (b+k)$$

за $b = 2a + s + 1$. Остава да забележим, че всяко число, което не е степен на двойката има нечетен делител, а всяко нечетно число $2t+1$ се представя като сбор на две последователни числа $t + (t+1)$.

Задача 7. От четири човека са образувани 9 различни комисии, като всяка комисия може да бъде от 1, 2, 3 или 4 човека. Да се докаже, че има две комисии, които нямат общ човек.

Решение. Общо има 15 комисии: A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD и $ABCD$. Да разгледаме 8 кутии с надписи

1. A, BCD	2. B, ACD	3. C, ABD	4. D, ABC
5. AB, CD	6. AC, BD	7. AD, BD	8. $ABCD$

и да поставим всяка комисия в кутията, която има нейния надпис. Тъй като имаме 8 кутии, а 9 комисии, ще имами кутия, в която ще има две комисии. Тези две комисии нямат общ човек.

Задача 8. Дадени са 21 различни естествени числа в интервала от 1 до 100 включително. Да се докаже, че могат да се изберат четири числа a, b, c и d, за които да е вярно равенството $a+b=c+d$.

Решение. Сборът на две различни естествени числа, всяко от които в интервала от 1 до 100 е число в интервала $[3,199]$.

Да разгледаме кутии с номера $3,4,\dots,199$. Ако сбора на две от дадените числа е равен на x, поставяме тази двойка числа в кутията с номер x. Тъй като имаме $\dfrac{21.20}{2}=210$ различни двойки числа, а кутиите са 197, то има кутия с поне две двойки в нея. Нека това са двойките (a,b) и (c,d). Тогава $a+b=c+d$ и ако $a=c$ или $a=d$, то двойките не са различни.

Задача 9. През 50 последователни дни ученик решил 79 задачи, като всеки ден решавал поне една задача. Да се докаже, че има няколко последователни дни, през които той е решил точно 20 задачи.

Решение. Нека първия ден ученикът е решил a_1 задачи, първия и втория ден a_2 задачи, и т.н. през първите i дни е решил a_i задачи. От условието следва, че

$$1\le a_1<a_2<\cdots<a_{50}=79.$$

Да разгледаме числата

$$a_1,a_2,\dots,a_{50},a_1+20,a_2+20,\dots a_{50}+20=99.$$

Това са 100 числа, всяко от които е в интервала $[1, 99]$. От принципа на Дирихле следва, че има две равни числа. Тъй като $a_i \neq a_j$, то единствената възможност е да имаме $a_i + 20 = a_j$. Това означава, че през дните от $i+1$-ия до j-ия ден ученикът е решил точно 20 задачи.

Задача 10. Квадрат 6×6 е покрит с домина (плочки 1×2). Да се докаже, че квадратът може да се раздели на два правоъгълника с права, която не пресича нито едно домино.

Решение. Да допуснем, че има права l, която пресича точно едно домино D. Правата l разделя правоъгълника на две части, във всяка от които доминото D покрива по едно квадратче. Това означава, че във всяка от двете части непокритите клетки са нечетен брой, т.е. те не могат да се покрият с домина. Следователно, ако една права пресича едно домино, то тя пресича поне още едно домино. Ако допуснем, че няма права, която да не пресича домино, то всички прави трябва да пресичат поне $10.2 = 20$ домина. Но домината са 18, противоречие.

Задача 11. Във формата на квадрат със страна 5 са наредени 36 точки. Колко най-малко прави са необходими за да разделим равнината на области, всяка от които съдържа не повече от една от дадените точки?

Решение. С 5 хоризонтални и 5 вертикални прави можем да разделим квадрата така, че във всяка област да има точно една точка.

Да разгледаме само точките по контура на квадрата. Всяка от 20-те отсечки трябва да се пресича от поне права (в противен случай двете точки ще бъдат в една и съща област). Следователно са необходими поне 20 пресечни точки. Всяка права пресича контура в най-много две точки. Следователно са необходими поне 10 прави.

Задача 12. Върховете на правилен 12-ъгълник са оцветени в два цвята: 6 черни и 6 бели. Да се докаже, че има два еднакви четириъгълника, единия с бели върхове, а другия с черни.

Решение. Да разгледаме втори 12-ъгълник, еднакъв с дадения и нека първоначално двата многоъгълника са разположени един над друг. Да завъртим 12 пъти горния 12-ъгълник на 30°. След всяко завъртане записваме броя на върховете от горния 12-ъгълник, които са с различен цвят със съответните точки от долния. Общо са записани 12 числа. Тъй като всяка черна (съответно бяла) точка от горния 12-

ъгълник преминава през всяка бяла (съответно черна) точка от долния 12-ъгълник, то сбора на всички записани числа е 36. Тъй като последното записано число е 0 (тогава точките на двата 12-ъгълника съвпадат) и $\frac{36}{11} > 3$, то има число от записаните, което е поне 4. Това означава, че има два четириъгълника, които са еднакви.

Задача 13. На масата са поставени 100 часовника със стрелки, всеки от които не изостава и не избързва и е избрана точка P. Да се докаже, че има момент време в което сборът на разстоянията от P до центровете на часовниците е по-малък от сборът на разстоянията от P до върховете на часовите стрелки.

Решение. Да разгледаме два момента, в които часовата стрелка заема срещуположни положения и точка P не лежи на правите, образувани от стрелките на всички часовници в тези два момента. Да означим с O центъра на един часовник, а с X и Y краищата на часовата стрелка в тези два момента. Тогава PO е медиана в триъгълника PXY и следователно $PX + PY > 2PO$. Като приложим същите разсъждения за останалите часовници получаваме:

$$PX_1+PX_2+\cdots+PX_{100}+PY_1+PY_2+\cdots+PY_{100} > 2(PO_1+\cdots+PO_{100}).$$

Това означава, че или

$$PX_1 + PX_2 + \cdots + PX_{100} > PO_1 + PO_2 + \cdots + PO_{100}, \text{ или}$$
$$PY_1 + PY_2 + \cdots + PY_{100} > PO_1 + PO_2 + \cdots + PO_{100}.$$

Задача 14. Десетцифрено число се нарича *хубаво*, ако се записва само с 1, 2 и 3 и всеки две съседни цифри се различават с 1.

а) Да се намери броя на хубавите числа;

б) Да се докаже, че сборът на всички хубави числа се дели на 1408.

Решение. а) Всяко хубаво число може да се запише като $\overline{2a2b2c2d2e}$ или като $\overline{a2b2c2d2e2}$, където всяко от числата a, b, c, d, e може да бъде 1 или 3. Числата и от двата вида са по $2^5 = 32$ и следователно всички хубави числа са 64.

б) На всяко хубаво число $\overline{a_1a_2\dots a_{10}}$ да съпоставим числото

$$\overline{(4-a_1)(4-a_2)\dots(4-a_{10})}.$$

По този начин всички хубави числа се разбиват на двойки, като сборът на числата във всяка двойка е $a = 4444444444$. Следователно сборът навсички хубави числа е

$$\begin{aligned} 32a &= 32.4444444444 = 128.1111111111 = \\ &= 128.11.101010101 = 1408.101010101 \end{aligned}$$

и се дели на 1408.

Задача 15. 50 ученици (25 момчета и 25 момичета) седят около кръгла маса. Да се докаже, че винаги има ученик, от двете страни на който седят момичета.

Решение. Да допуснем, че няма ученик, от двете страни на който седят момичета. Да разгледаме групите от последователно седящи момчета или момичета. Всяка такава група има поне две момчета (защото в противен случай има момче, от двете страни на което седят момичета) и не повече от две момичета. (защото в противен случай има момиче, от двете страни на което седят момичета). Тъй като момичетата са 25 и са разделени на групи по 1 или 2, то има поне 13 групи от съседни момичета. Между тях трябва да има поне 13 групи от съседни момчета. Но във всяка група от съседни момчета има поне 2 момчета, което означава, че техния брой е поне 26, противоречие.

Следователно има ученик, от двете страни на който седят момичета.

Задача 16. В клас има 30 ученици, които седят на 15 чина така, че точно половината от всички момичета седят с момчета. Да се докаже, че не е възможно да седнат така, че точно половината от всички момчета да седят с момичета.

Решение. Нека x е броя на момичетата в класа. От условието следва, че x е четно число и нека $x = 2t$. Тогава t от момичетата седят с момчета на един чин. Останалите t момичета трябва да са седнали заедно по двойки. Следователно t е четно число, т.е. x се дели на 4. Ако допуснем, че че е възможно да седнат така, че точно половината от всички момчета да седят с момичета, то ще получим, че и броят на момчетата е четно число. Тогава общият брой ученици също се дели на 3, което е противоречие.

Задача 17. Две числа са обратни едно на друго, ако едното се получава от другото с цифри, записани в обратен ред. Дадено е петцифрено число A без нули, с различни цифри и първа цифра по-голяма от 5. От A се изважда обратното число на A и се получава петцифрено число B. Числото B се събира с обратното си и се получава число C. Да се намерят всички възможности за числото C.

Решение. Нека даденото число е $A = \overline{abcde}$. Тогава обратното число на A е $P = \overline{edcba}$. Тъй като $A - P$ е питцифрено число, то $a > e$. Ще разгледаме две възможности за b и d:

1. Нека $d > b$. Тогава

$$A - P = \overline{(a-e-1)(10+b-d)0(d-b-1)(10+e-a)}$$

и след събиране на това число с обратното му, получаваме $C = 99099$.

2. Нека $d \leq b$. Тогава

$$A - P = \overline{(a-e)(b-d)9(8+d-b)(10+e-a)}$$

и след събиране на това число с обратното му, получаваме
$C = 109890$.

Следователно $C = 99099$ или $C = 109890$.

Задача 18. На безкрайна шахматна дъска са отбелязани няколко клетки. Във всяка клетка е записано по едно число, което показва колко най-малко хода на коня са необходими за да се стигне от дадената клетка до някоя от отбелязаните. Да се докаже, че във всеки правоъгълник 1×5 без отбелязани клетки има две равни числа.

Решение. Да разгледаме правоъгълник 1×5 и нека A и B са две негови клетки. Лесно се проверява, че от A може да се стигне до B с най-много три хода на коня. Това означава, че числата, записани в A и B се различават с не повече от 3.

Следователно разликата между най-голямото и най-малкото от петте числа не надминава 3. Това означава, че две от тези числа са равни.

Задача 19. На безкрайна шахматна дъска са отбелязани няколко клетки. Във всяка клетка е записано по едно число, което показва колко най-малко хода на коня са необходими, за да се стигне от дадената клетка до някоя от отбелязаните. Да се докаже, че във всеки правоъгълник 2×3 без отбелязани клетки има най-много 4 различни числа.

Решение. Нека A и B са две клетки от правоъгълник 2×3. Директно се проверява, че от A до B може да се стигне с най-много 3 хода. Това означава, че разликата на произволни две от числата в този правоъгълник се различават най-много с 3. Ако a е най-малкото от записаните числа, то най-голямото е $a + 3$, откъдето следва твърдението на задачата.

Задача 20. Буквите a, b, c, d, e, f са цифрите $1, 2, 3, 4, 5, 6$ в някакъв ред. Ако

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f},$$

да се определи на коя буква коя цифра съответства.

Упътване. Задачата има две решения:

$$\frac{2}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3}.$$

Задача 21. Изпъкнал n-ъгълник е разделен на триъгълници чрез построяване на част от диагоналите му. Колко диагонала са построени и колко са получените триъгълници?

Решение. Сборът от ъглите на всички получени триъгълници е равен на сбора от ъглите на дадения n-ъгълник. Тъй като сборът от ъглите на n-ъгълник е $(n-2).180^\circ$, то триъгълниците са $n - 2$.

Общо страните на тези $n - 2$ триъгълника са $3(n - 2) = 3n - 6$. Ако означим броя на диагоналите с x, то

$$2x + n = 3n - 6$$

(защото всеки диагонал е броен по два пъти, а всяка страна на n-ъгълника е броена по един път). Оттук $x = n - 3$.

Задача 22. Колко са различните редици с дължина n, които са съставени само от 0 и 1? Колко са редиците, в които се срещат четен брой единици?

Решение. За всеки член на редицата има две възможности – да е 0 или 1. Следователно всички редици са 2^n.

Да разгледаме множеството на всички редици с дължина $n-1$ и множеството на всички редици с дължина n и четен брой единици.

От произволна редица с дължина $n-1$ можем да получим редица с дължина n като прибавим един символ (0, ако редицата с дължина $n-1$ има четен брой единици и 1, ако тя има нечетен брой единици). Обратно, ако от редица с дължина n и четен брой единици изтрием последния символ ще получим редица с дължина $n-1$. Следователно броя на търсените редици е равен на броя на редиците с дължина $n-1$, т.е. на 2^{n-1}.

Задача 23. Върху окръжност са избрани 15 точки. Колко са начупените линии, които минават през всички точки и не се пресичат?

Решение. Да изберем произволна точка A и да преброим начупените линии с даденото свойство, които започват от A. Тъй като начупената линия не се пресича, то A можеда се свърже само с някоя от двете си съседни точки. Това означава, че за първата отсечка имаме две възможности. Аналогично за всяка следваща отсечка (без последната) имаме по две възможности. Следователно броят на начупените линии с начало A е 2^{n-2}. Същото разсъждение е вярно за всяка от останалите точки. Общо имаме $n.2^{n-2}$ начупени линии. Остава да забележим, че всяка начупена линия се брои по два пъти (по веднъж от всеки от двата си края). Следователно търсения брой е $n.2^{n-3}$. При $n = 15$ получаваме 15.2^{12}.

Задача 24. Дадени са 5 естествени числа и от тях са образувани всички сборове по двойки. Колко най-много последователни числа може да има измежду тези сборове?

Решение. Нека числата са a, b, c, d, e. Всички сборове по двойки са 10. Да допуснем, че тези 10 сбора може да са 10 последователни числа. Сборът на 10 последователни естествени числа, първото от които е x е $10x + 45$, т.е. е нечетно число. Сборът на всички двойки е равен на

$$4(a + b + c + d),$$

което е четно число. Следователно не можем да получим 10 последователни числа. С числата $2, 4, 5, 6, 8$ могат да се получат девет последователни числа $6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$.

ТЪРСЕНЕ НА ФАЛШИВА МОНЕТА

Задача 25. Дадени са 3^n монети една от които е фалшива и е по-лека (или по-тежка) от останалите. Как с везни с n претегляния да намерим фалшивата монета?

Решение. Разделяме на три групи от по 3^{n-1} монети и претегляме две от тях. Във всички случаи определяме, че фалшивата монета е измежду 3^{n-1} монети. Продължаваме по същия начин, като при всяко претегляне разделяме монетите на три и претегляме две от групите. След n-тото претегляне ще намери фалшивата монета.

Задача 26. Дадени са 4 монети, една от които е фалшива (не знаем дали е по-лека или по-тежка от истинска монета). Как с две претегляния да я намерим?

Решение. Нека монетите са a, b, c, d.

Претегляме a и b и ако имаме равенство, претегляме a с c. Ако $a = c$, то фалшивата е d, а ако $a \neq c$, то фалшивата е c.

Ако a и b не са равни, отново претегляме a и c. Ако $a = c$, то фалшивата е b, а ако $a \neq c$, то фалшивата е a.

Задача 27. Дадени са 5 монети, една от които е фалшива (не знаем дали е по-лека или по-тежка от истинска монета). Ако разполагаме с още една истинска монета, можем ли да намерим фалшивата с две претегляния?

Решение. Да означим монетите с a, b, c, d, e, а истинската монета с x. Първо претегляме a, b с c, x. Ако са равни, претегляме x с d и ако $x = d$ фалшивата е e, а ако $x \neq d$, то фалшивата е d.

Ако $a, b \neq c, x$, то претегляме a и b. Ако $a = b$ фалшивата е c, а ако $a \neq b$, то фалшивата е една от тях. От претеглянето на a, b с c, x знаем дали фалшивата е по-лека или по-тежка. Тогава от $a < b$ или $a > b$ лесно определяме коя е фалшивата.

Задача 28. Дадени са 13 монети, една от които е фалшива (не знаем дали е по-лека или по-тежка от истинска монета). Как с три претегляния да я намерим?

Решение. Първо претегляме a, b, c, d и e, f, g, h. Ако са с равни тегла, всички са истински, а фалшивата е между останалите 5 монети. Сега прилагаме предишната задача.

Ако са с различни тегла (нека без ограничение $a, b, c, d > e, f, g, h$), претегляме a, b, e, f и c, g, x, y, където x и y са две истински монети.

Ако $a, b, e, f = c, g, x, y$, то фалшивата е между d и h и с едно претегляне я намираме.

Ако $a, b, e, f \neq c, g, x, y$, нека $a, b, e, f > c, g, x, y$ (другият случай се разглежда аналогично). Сега фалшивата е една от a, b или g. Като претеглим a и b, намираме фалшивата.

Задача 29. Дадени са 14 монети, една от които е фалшива (не знаем дали е по-лека или по-тежка от истинска монета). Ако разполагаме с още една истинска монета, можем ли да намерим фалшивата с три претегляния?

Решение. Първо претегляме a, b, c, d, e и f, g, h, i, x, където x е истинската монета. Ако $a, b, c, d, e = f, g, h, i, x$, прилагаме задачата за намиране на фалшива монета от 5 с една допълнителна истинска.

Ако $a, b, c, d, e > f, g, h, i, x$, то второто претегляне е a, b, c, f, g, h с 6 истински монети (това са петте монети, които не са участвали при първото теглене и монетата x). Ако a, b, c, f, g, h е по-тежка, то фалшивата е a, b или c, а ако a, b, c, f, g, h е по-лека, то фалшивата е f, g или h. С едно претегляне сега лесно намираме фалшивата.

Задача 30. Дадени са 3^n монети, разделени в две купчинки A и B. Известно е, че има една фалшива монета. Ако фалшивата монета е в купчинка A, тя е по-лека, а ако е в купчинка B тя е по-тежка. Може ли с n претегляния да намерим фалшивата монета?

Задача 31. Дадени са $\dfrac{3^n - 1}{2}$ монети, една от които е фалшива, но не знаем дали е по-лека или по-тежка от истинските. Как с n претегляния с везни да намерим фалшивата монета?

Задача 32. Дадени са $\dfrac{3^n + 1}{2}$ монети, една от които е фалшива, но не знаем дали е по-лека или по-тежка от истинските. Ако имаме още една истинска монета как с n претегляния с везни да намерим фалшивата монета?

* * *

Задача 33. Търсене на принцесата. Няколко стаи са разположени в редица, като между всеки две съседни стаи има коридор. В една от стаите има принцеса. Всяка сутрин принцът (който не знае в коя стая е принцесата) проверява в една от стаите за принцесата. Всяка вечер принцесата се премества в съседна стая. Да се докаже, че принцът може да намери принцесата.

Решение. Нека стаите са $1, 2, \ldots, n$. Директно се проверява, че ако принцът провери последователно в стаи $2, 3, \ldots n-1, n-1, n-2, \ldots, 2$, той ще намери принцесата.

Задача 34. Задача с кабели. През тунел са прекарани 100 кабела. От едната страна на тунела те са номерирани с числата от 1 до 100, а от другата страна нямат номера. Един ход се състои от следните две стъпки:

1. Работник, намиращ се от страната на номерираните кабели свързва някои от тях по двойки и съобщава на работник от другата страна кои двойки е свързал.

2. Работникът от неномерираната страна може да провери между кои двойки кабели има връзка.

За колко най-малко хода работникът от неномерираната страна може да постави правилните номера на всички кабели?

Решение. За два хода! На първия ход се свързват кабели

$$1 \longleftrightarrow 2, 3 \longleftrightarrow 4, \ldots, 97 \longleftrightarrow 98,$$

а на втория ход

$$2 \longleftrightarrow 3, 4 \longleftrightarrow 5, \ldots, 98 \longleftrightarrow 99.$$

При това 1 е единствения кабел, който е бил използван при първия ход, но не при втория. По същия начин 99 е единствения кабел, който е бил използван при втория ход, но не при първия. Кабел 100 не е бил използван и при двата хода. Следователно знаем кабели 1, 99 и 100. Оттук лесно намираме кабел 2 (който е свързан с 1 на първия ход), кабел 3 (който е свързан с 2 на втория ход) и т.н. до намиране на кабел 98.

Задача 35. В няколко (поне 4) кутии са поставени няколко (поне 4) топки. За един ход имаме право да вземем две топки от две различни кутии и да ги поставим в трета (различна от първите две) кутия. Можем ли да съберем всички топки в една кутия?

Решение. За 4 топки в 4 кутии директно се проверява, че можем да съберем всички топки в една кутия. Да допуснем, че твърдението е вярно за n топки. Да разгледаме $n+1$ топки. Забравяме временно за една от топките, а останалите събираме в една кутия. Тогава в кутиите имаме съответно $n, 1, 0, 0$ топки. Оттук получаваме $n-1, 0, 2, 0$ и след това:

$$n-1, 0, 2, 0 \to n-2, 2, 1, 0 \to n-3, 2, 0, 2 \to n-1, 1, 0, 1 \to n+1, 0, 0, 0.$$

Задача 36. На олимпиада по математика 49 ученика решавали 3 задачи. Всяка задача се оценява с 0 до 7 точки. Да се докаже, че има двама участници A и B за които по всяка задача A има не по-малко точки от B.

Решение. Да разгледаме резултатите по първите две задачи. Измежду 49-те двойки няма еднакви, защото тогава независимо от резултата по третата задача ще има двама с исканото свойство. От всеки две двойки от множеството

$$\{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (1,7), (2,7), (3,7),$$
$$(4,7), (5,7), (6,7), (7,7), \}$$

едната мажорира другата. Ако има 9 двойки от това множество, то има двама с равни резултати по третата задача и условието е изпълнено. Следователно от тези 15 двойки поне $15 - 8 = 7$ не се срещат като резултати на първите две задачи. Аналогично от множеството

$$\{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6),$$
$$(5,6), (6,6), (7,6)\}$$

поне $13 - 8 = 5$ двойки не се срещат като резултат. Аналогично от множеството

$$\{(2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (7,5)\}$$

поне $11 - 8 = 3$ двойки не се срещат като резултат. Аналогично от множеството

$$\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),(7,4)\}$$

поне $9 - 8 = 1$ двойка не се среща като резултат. Следователно поне $7 + 5 + 3 + 1 = 16$ двойки не се срещат, т.е. учениците са най-много $64 - 16 = 48$, противоречие.

Задача 37. Задача в парламента. В един парламент от 1675 човека всеки ударил плесница на един човек от останалите. Каква най-голяма комисия може да се направи (независимо по какъв начин са удряни плесниците) така, че в нея да няма двама, единият от които да е ударен от другия?

Решение. Да изберем от всички 1675 човека 558 тройки. Нека във всяка тройка A, B, C да имаме: A да е ударил B, B да е ударил C и C дае ударил A. От такава тройка в комисията не може да има повече от един човек. Следователно най-много хората в комисията могат да бъдат $558 + 1 = 559$. Това означава, че търсеният брой е не по-голям от 559.

Ще докажем, че винаги можем да направим комисия от 559 човека. Да изберем човекя, който е удрян най-малко пъти. Тъй като броят на ударените плесници е равен на броя на хората, то има човек X, който е бил ударен 0 или 1 път. Нека X е бил ударен от Y и X да е ударил Z. Поставяме X в комисията, Y и Z премахваме от групата. От останалата група никой не е удрян от X нито пък е удряб X. Повтаряме същите разсъждения за останалата група и т.н. Получаваме, че всеки път поставяме един човек в комисията и премахваме двама от групата. По този начин ще стигнем до комисия от 558 човека, като един човек ще остане и можем да го поставим в комисията.

Задача 38. Да се намерят всички трицифрени числа със следното свойство: Както и да заменим някоя от цифрите на числото с друга цифра, така че да се получи трицифрено число, то новото число не се дели на 7.

Решение. Нека числото $\overline{abc}$ има исканото свойство. Да допуснем, че $\overline{abc}$ не се дели на 7. Каквато и да е цифрата c, съществуват 7 последователни цифри $x, x+1, \ldots, x+6$, една от които е c. Тогава едно от числата $\overline{abx}, \overline{ab(x+1)}, \ldots, \overline{ab(x+6)}$ ще се дели на 7 и това не е числото $\overline{abc}$. Това означава, че цифрата c може да се замени с друга цифра и полученото число да се дели на 7, противоречие. Следователно числото $\overline{abc}$ се дели на 7.

Ако $c = 0, 1$ или 2, то $c + 7$ е цифра и числото $\overline{ab(c+7)}$ се дели на 7, противоречие.

Ако $c = 9, 8$ или 7, то $c - 7$ е цифра и числото $\overline{ab(c-7)}$ се дели на 7, противоречие.

Аналогично, ако $b = 0, 1, 2, 7, 8, 9$ (тогава числото $\overline{a(b+7)c}$ или $\overline{a(b-7)c}$ се дели на 7) или ако $a = 1, 2, 8, 9$ получаваме противоречие.

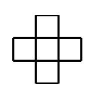
Следователно търсените числа са всички числа $\overline{abc}$, които се делят на 7 и $a = 3, 4, 5, 6, 7$, $b = 3, 4, 5, 6$ и $c = 3, 4, 5, 6$.

Задача 39. Съкровището на седемте джуджета. Седемте джуджета имат съкровище, което се намира зад 10 врати и всяка врата има по 3 катинара. Всеки два катинара са различни. Всяко джудже има ключове за някои от катинарите, като всеки 4 джуджета могат да стигнат до съкровището. Да се докаже, че някои три джуджета също могат да стигнат до съкровището.

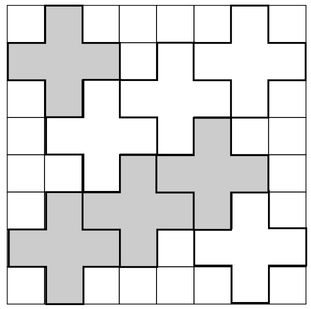
Решение. Да допуснем, че няма три джуджета, които могат да стигнат до съкровището. Това означава, че за всеки три джуджета има катинар, който те не могат да отворят. Тройките джуджета са

$$\frac{7.6.5}{1.2.3} = 35,$$

а катинарите са 30. Това означава, че има две различни тройки джуджета, които не могат да отключат един и същи катинар. Но в две различни тройки общо има поне 4 джуджета и те няма да могат да отключат този катинар, което е противоречие с условието. Следователно ича тройка джуджета, които могат да отключат всички катинари.

Задача 40. Колко най-много плочки от 5 квадратчета  могат да се поставят върху шахматна дъска 8×8 без припокриване?

Решение. Ъгловите квадратчета не могат да се покрият с плочки от дадения вид. От най-долния ред могат да се покрият най-много 2 квадратчета. Същото е вярно е за най-горния ред и за двата крайни стълба. Следователно непокрити са поне $4 + 4.(6 - 2) = 20$ квадратчета. Останалите са $64 - 20 = 44$ и е ясно, че не могат да се поставят 9 плочки от дадения вид. Лесно се построява пример с 8 плочки.



Задача 41. На дъската са написани числата $1, 2, \ldots, 20$. За един ход избираме две числа, които се различават с поне 2, увеличаваме по-малкото с 1 и намаляваме по-голямото с 1. Колко най-много хода могат да се направят?

Решение. Крайната позиция съдържа числа с разлика 0 или 1, като сборът на тези числа е равен на сбора на първоначалните числа, т.е. на

$$1 + 2 + \cdots + 20 = \frac{20.21}{2} = 210.$$

Лесно се вижда, че това е възможно само при десет числа 10 и десет числа 11. Тъй като

$$a^2 + b^2 - (a-1)^2 - (b+1)^2 = 2(a - b - 1) \geq 2,$$

то след всеки ход сборът от квадратите на всички написани числа намалява с поне 2 (точно с 2 когато разликата на числата е $a-b = 2$). В началото сборът от квадратите на всички числа е:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2 = \frac{20.21.41}{6} = 2870,$$

а в края $10.10^2 + 10.11^2 = 2210$. Следователно можем да направим най-много $\dfrac{2870 - 2210}{2} = 330$ хода. Лесно се дава пример, при който всеки ход е върху числа с разлика 2.

Упражнение

Задача 1. а) Може ли правоъгълник 2016×1200 да бъде разрязан на ивици (правоъгълник $1 \times k$) с различни дължини?

б) За кои m и n правоъгълник $m \times n$ може да бъде разрязан на ивици с различни дължини?

Задача 2. Във върховете на правилен 12-ъгълник са записани нули и единици. За един ход се избира една страна и се променят цифрите (от 0 на 1 и от 1 на 0) в двата съседни върха. Да се намерят всички начални разположения на 0 и 1, от които може да се достигне до само една единица.

Задача 3. В състезание участват 2 човека. Залогът за първия е $1 : a$, а за втория $1 : b$ (това означава, че ако за първия се заложат x лева и той победи, печалбата ще бъда $x.a$ лева). Можем ли да заложим така, че да спечелим независимо кой е победител, ако:

а) $a = 3, b = 4$, $a = 2, b = 3$.

б) При какво условие за a и b можем да заложим така, че да спечелим независимо кой е победител?

в) Ако имаме 100 лева и можем да заложим така, че да спечелим независимо кой е победител, каква печалба можем да си осигурим?

Задача 4. С числата от 1 до 16 попълнете магическия квадрат:

14	11	5	
	8		
12		3	

(Всяко число се среща един път и сборът на числата във всеки ред, всеки стълб и двата диагонала са равни.)

Задача 5. Комплект от домино съдържа 28 домина

0×0	0×1	0×2	0×3	0×4	0×5	0×6
1×1	1×2	1×3	1×4	1×5	1×6	2×2
2×3	2×4	2×5	2×6	3×3	3×4	3×5
3×6	4×4	4×5	4×6	5×5	5×6	6×6

Домината $1:2$, $2:3$, $3:5$ и $5:1$ могат да бъдат подредени в квадрат по следния начин:

1	2	2
1	X	3
5	5	3

Всяко множество от 4 домина с това свойство се нарича *интересно*.

а) Да се докаже, че в интересно множество не може да има две домина от вида $a : a$.

б) Да се намери броя на всички интересни множества.

Задача 6. Колко са естествените числа n със следното свойство: Числото n се записва с k нечетни цифри и числото $5n$ също се записва с k нечетни цифри.

Задача 7. Върху всяка стена на куб е записано по едно естествено число. Имаме право да увеличаваме две от числата, ако те са върху съседни стени. Да се докаже, че числата могат да се направят равни тогава и само тогава, когато сборът на всички първоначални числа е четно число.

Задача 8. Иван написал естествено число n, което се дели на последната си цифра. След делението се оказало, че новото число също се дели на последната си цифра и т.н. След 100 деления се получило за първи път числото 1. Да се намерят всички възможни стойности на n.

Задача 9. а) Да се докаже, че от произволни 2016 естествени числа могат да се изберат няколко (може и 1), чиито сбор се дели на 2016.

б) Да се намерят всички множества от 2015 естествени числа, всяко от който е по-малко от 2016 и няма сбор на няколко число, който да се дели на 2016.

Задача 10. Да се докаже, че измежду всеки 15 съставни числа, от интервала $[1, 2016]$ има две, които не са взаимно прости.

Задача 11. Да се докаже, че ако $n \geq 4$ и $\left[\dfrac{2^n}{n}\right]$ е степен на 2, то и n е степен на 2.

Задача 12. Да се намери най-малкото естествено число n, за което както и да оцветим естествените числа от 1 до n в два цвята винаги има три едноцветни числа a, b, c, за които $a + b = 2c$.

Задача 13. В класа на Иван има 30 ученици. Всеки от неговите съученици има точно 5 общи приятели с Иван. Да се докаже, че в този клас има ученик с нечетен брой приятели.

Задача 14. Дадени са 2015 числа (не непремнно различни). За всяко число се записва броят на числата, които са по-големи от него и броят на числата, които са по-малки от него. Може ли да се получи така, че за всяко число двете записани числа са с различна четност.

Задача 15. В турнир по шах участвали 98 състезатели. При всеки кръг те се разделят по двойки, като победеният отпада, а победителят продължава в следващия кръг. Ако срещата завърши наравно и двамата продължават в следващия кръг. Ако броят на участниците в даден кръг е нечетно число един от тях почива и се класира за следващия кръг без да играе. Победителят в турнира бил определен за 7 кръга. Колко най-много може да са били почиващите в целия турнир?

Задача 16. Колко са решенията на $a+b+c = 15$ в естествени числа?

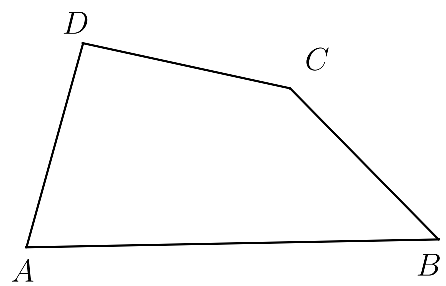
ТРИБЕДРЕНИК

Четириъгълник $ABCD$, за който

$$BC = CD = DA \text{ и}$$

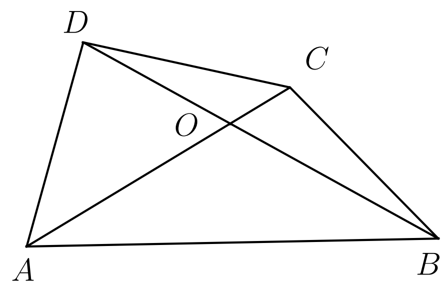
$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 120^\circ,$$

се нарича **трибедреник.**



Задача 1. Да се докаже, че в трибедреник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите O имаме $\sphericalangle AOB = 120^\circ$.

Решение. Нека $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACD = x$ и $\sphericalangle BDC = y$. От равенството $BC = CD = DA$ следва, че $\sphericalangle CAD = x$ и $\sphericalangle CBD = y$, откъдето $\sphericalangle BAC = \alpha - x$ и $\sphericalangle ABD = \beta - y$.



Тъй като триъгълниците ABO и CDO имат един равен ъгъл, то сборовете на другите два ъгъла са равни. Следователно

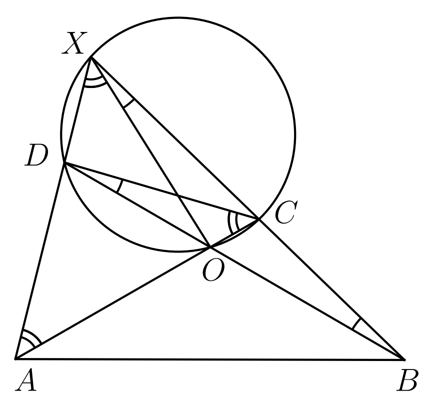
$$\alpha - x + \beta - y = x + y,$$

откъдето $2(x + y) = \alpha + \beta = 120^\circ$. Сега от триъгълника CDO намираме $\sphericalangle COD = 180^\circ - (x + y) = 120^\circ$.

Задача 2. Да се докаже, че в трибедреник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите O имаме $AO = BO$.

Решение. Нека лъчите $AD^{\to}$ и $BC^{\to}$ се пресичат в точка X. От равенството $\alpha + \beta = 120^\circ$ следва, че

$$\sphericalangle AXB = 60^\circ.$$



Сега от равенството $\sphericalangle COD + \sphericalangle CXD = 180^\circ$ получаваме, че $CXDO$ е вписан четириъгълник. Тогава

$$\sphericalangle BXO = \sphericalangle CDO = \sphericalangle CBD \text{ и } \sphericalangle AXO = \sphericalangle DCO = \sphericalangle CAD,$$

откъдето намираме, че $\triangle BOX$ и $\triangle AOX$ са равнобедрени. Следователно $BO = XO = AO$. Получаваме, че точката O е центърът на описаната окръжност за $\triangle ABX$.

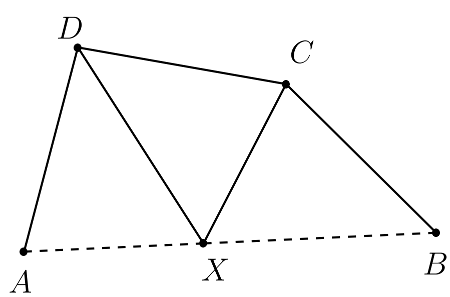
Задача 3. Да се докаже, че в трибедреник $ABCD$ ъглополовящите на $\sphericalangle ADC$ и $\sphericalangle BCD$ се пресичат върху отсечката AB.

Решение. Нека ъглополовящите на двата ъгъла се пресичат в точка X. От равенството

$$\sphericalangle C + \sphericalangle D = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

следва, че $\sphericalangle XDC + \sphericalangle XCD = 120^\circ$, откъдето намираме

$$\sphericalangle CXD = 60^\circ.$$



От друга страна, за триъгълниците BCX и DCX имаме

$$BC = CD,\ \sphericalangle BCX = \sphericalangle DCX,\ CX \text{ е обща.}$$

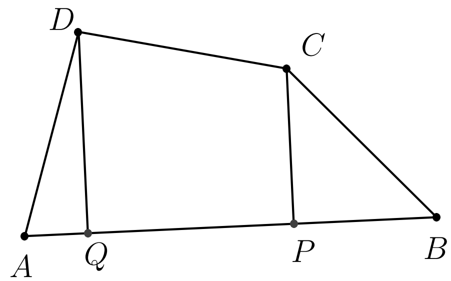
Следователно двата триъгълника са еднакви. Аналогично $\triangle ADX \cong \triangle CDX$. Тогава

$$\sphericalangle BXC = \sphericalangle CXD = \sphericalangle DXA = 60^\circ.$$

Това означава, че точките A, X и B лежат на една права.

Получихме, че $\sphericalangle C = 2\alpha$ и $\sphericalangle D = 2\beta$.

Задача 4. В трибедреник $ABCD$ са построени перпендикуляри $CP \perp AB$ и $DQ \perp AB$. Да се докаже, че $AQ + BP = QP$.

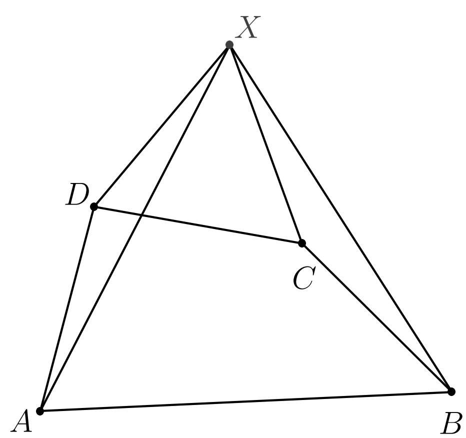


Решение. Нека DX и CX са ъглополовящите на ъглите при D и C. Знаем, че X е върху отсечката AB и $\sphericalangle QXD = \sphericalangle PXC = 60^\circ$, $DX = BX$, $CX = AX$. От $\triangle QXD$ следва, че $QX = \frac{1}{2}DX = \frac{1}{2}BX$. Аналогично $PX = \frac{1}{2}CX = \frac{1}{2}AX$. Следователно

$$PQ = QX + PX = \frac{1}{2}(BX + CX) = \frac{1}{2}AB,$$

отъдето намираме $AQ + BP = \frac{1}{2}AB$.

Задача 5. Да се докаже, че ако $ABCD$ е трибедреник и триъгълникът CDX е равностранен (X е външна за $ABCD$), то триъгълникът ABX също е равностранен.



Решение. Триъгълниците ADX и BCX са еднакви, защото

$$AD = BC,\ DX = CX \text{ и } \sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX$$

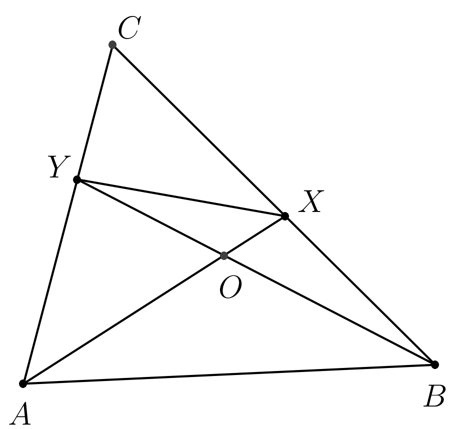
(последното равенство следва от $\sphericalangle ADX = \sphericalangle D + 60^\circ$, $\sphericalangle BCX = 360^\circ - \sphericalangle C - 60^\circ$ и $\sphericalangle D + \sphericalangle C = 240^\circ$). Тогава $AX = BX$, $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD = 60^\circ$ откъдето $\triangle ABX$ е равностранен.

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ и център на описаната окръжност O. Ако $AO \cap BC = X$ и $BO \cap AC = Y$, то $ABXY$ е трибедреник.

Решение. От $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ следва, че

$$\sphericalangle AOB \;=\; 2\sphericalangle ACB \;=\; 120^\circ.$$

Оттук получаваме, че $OXCY$ е вписан в окръжност.



Оттук и от $OB = OC$ следва, че

$$\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCX = \sphericalangle OYX.$$

Сега от триъгълник YBX намираме $BX = XY$. По същия начин $AY = XY$. Следователно $AY = XY = BX$ и понеже имаме, че $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ - \sphericalangle C = 120^\circ$, то $ABXY$ е трибедреник.

ГРАФИ

Задача 1. Във всяка група от 6 човека или има трима, всеки двама от които не се познават, или има трима, всеки двама от които се познават.

Решение. За решаване на тази задача ще постъпим по следния начин. Да означим с A произволен член на групата от 6 човека. Всеки от останалите 5 човека или е познат с A, или не е познат с него. Това означава, че общо познатите и непознатите на A са 5.

Ако допуснем, че A има по-малко от 3 познати и по-малко от 3 непознати, ще получим, че общо неговите познати и непознати са най-много 4, което не е вярно. Следователно A има или трима познати, или трима непознати (горните разсъждения са приложение на принципа на Дирихле).

Да допуснем, че A има трима познати (случаят, когато A има трима непознати се разглежда по същия начин) и да ги означим с B, C и D. Ако някои двама от тях се познават, например B и C, то получаваме трима (A, B и C), всеки двама от които се познават. Ако всеки двама от B, C и D не се познават, те образуват тройка, всеки двама от която не се познават. С това задачата е решена.

При решаването на тази задача можем да постъпим и по следния начин. Да отбележим шестте човека от групата с шест точки в равнината A, B, C, D, E и F. Две точки свързваме със синя отсечка, ако съответните им хора се познават. Когато съответните на точките хора не се познават, ще ги свързваме с червена отсечка. Да забележим, че всяка тройка познати в групата съответства на триъгълник, трите страни на който са сини. Всяка тройка непознати съответства на триъгълник, трите страни на който са червени.

Задача 2. В равнината са дадени 6 точки. Всеки две от отсечките, свързващи тези точки са оцветени в синьо или червено. Да се докаже, че има поне два едноцветни триъгълника.

Решение. За да докажем, че има поне два едноцветни триъгълника ще използваме вече доказаното съществуване на един едноцветен триъгълник. Без ограничение нека триъгълникът AEF е син и останалите точки са B, C и D.

Да разгледаме трите отсечки, свързващи B с A, E и F. Ако две от тези отсечки са сини (например BA и BE), ще получим още един син триъгълник BAE. Следователно измежду отсечките BA, BE и BF има поне две червени. Същото обаче важи и за точките C (съответно отсечките CA, CE и CF) и D (съответно отсечките DA, DE и DF). Да разгледаме цвета на отсечката BC. Тъй като от B и от C излизат общо 4 червени отсечки към трите точки A, E и F, то някоя точка от тези трите (нека това е A) е свързана с червени отсечки и с B и с C. Това означава, че ако BC е червена, то ще имаме червен триъгълник. Следователно отсечката BC трябва да е синя.

Същите разсъждения могат да бъдат направени и за отсечките BD и CD откъдето ще следва, че те са също сини. Но сега триъгълник BCD е син и доказателството е завършено.

Естествено е отново да се запитаме дали не съществуват три едноцветни триъгълника. Лесно е да конструираме пример, който показва, че може да съществуват само два едноцветни триъгълника. Например, два сини триъгълника AEF и BCD и всички останали отсечки да са червени.

Задача 3. Най-малко колко едноцветни триъгълника има в граф със 7 върха?

Решение. Да означим точките с A, B, C, D, E, F и G. Ако разгледаме само първите 6 точки, според вече доказаното, между тях има два едноцветни триъгълника. Без ограничение можем да считаме, че единия от тях е ABC. Сега да разгледаме шестте точки B, C, D, E, F и G. Между тези точки също има два едноцветни триъгълника, като едноцветния триъгълник ABC не е един от тях. Тогава измежду седемте точки общо получаваме три едноцветни триъгълника. Да се опитаме да продължим тази идея. Досега имаме 7 точки и три едноцветни триъгълника. Това означава, че някои два едноцветни триъгълника ще имат общ връх (в противен случай ще ни трябват поне 9 точки). Да отстраним временно този връх и да разгледаме останалите 6 точки. Измежду тях имаме два едноцветни триъгълника. Тези два триъгълника очевидно са различни от двата едноцветни триъгълника с отстранения връх. Следователно получихме общо 4 едноцветни триъгълника, с което твърдението е доказано. Оказва се, че това е и максималния брой едноцветни триъгълници, които гарантирано съществуват, т.е. има пример на 7 точки, всеки две от които са свързани със синя или червена отсечка и при което има точно 4 едноцветни триъгълника.

Задача 4. Да се докаже, че в група от 10 човека или има четирима, всеки двама от които не се познават, или има трима, всеки двама от които се познават.

Решение. Да разгледаме 10 точки, отсечките между които са оцветени в два цвята - син и червен. Трябва да докажем, че или има червен четириъгълник (заедно с диагоналите), или има син триъгълник. Да допуснем, че има точка A от която излизат 4 или повече сини отсечки. Нека това са AB, AC, AD и AE. Ако между отсечките, свързващи точките B, C, D и E има синя, ще имаме син триъгълник. Ако всички отсечки между тях са червени, ще имаме червен четириъгълник. Следователно от всяка точка излизат по-малко от 4 сини отсечки. Понеже от всяка точка излизат 9 отсечки, то от нея излизат поне 6 червени отсечки. Нека това са AX, AY, AZ, AP, AQ и AR. От задача 2 знаем, че измежду точките X, Y, Z, P, Q и R има едноцветен триъгълник. Ако този триъгълник е син, задачата е решена. Ако той е червен, без ограничение нека това е XYZ. Сега четириъгълникът $AXYZ$ е червен, с което задачата е решена.

Забележка. Твърдението на горната задача е вярно и за група от 9 човека. Ако от някой връх излизат 4 сини или 6 червени отсечки, доказателството е аналогично на това от задачата. Ако от всеки връх излизат 3 сини и 5 червени отсечки, то броя на сините отсечки е $\dfrac{9.3}{2}$, което не е цяло число.

Задача 5. За всяка държава броят на градовете, от които излизат нечетен брой пътища, е четен.

Решение. Нека в държавата има n града и от тези градове излизат съответно $s_1, s_2, \ldots, s_n$ пътя. Да забележим, че в сбора $s_1 + \cdots + s_n$ пътят между градовете i и j се брой два пъти – веднъж като път, излизащ от град i, и веднъж като път, излизащ от град j. Следователно $s_1 + \cdots + s_n$ е точно удвоеният брой пътища в държавата, т.е. този сбор е четно число. Това означава, че измежду числата $s_1, s_2, \ldots, s_n$ има четен брой нечетни числа.

Задача 6. В държава с n града от всеки град до всеки друг може да се стигне по единствен начин. Да се докаже, че броят на пътищата, свързващи два града, е равен на $n-1$.

Решение. Нека в държавата има t пътя. Да допуснем, че за някой град A съществува път, който започва и завършва в същия град A. Да наречем този път цикъл. Това означава, че има градове

$$A = X_1, X_2, \cdots, X_k = A,$$

където между X_i и X_{i+1} за $i = 1, 2, \ldots, k-1$ има директен път. Но сега от град A до град X_2 може да се стигне по два различни начина: AX_2 и $AX_{k-1} \ldots X_2$.

Ще докажем, че има град, от който излиза само един директен път. Тъй като от всеки град може да се стигне до всеки друг, то от всеки град излиза поне един директен път.

Да допуснем, че от всеки град излизат поне два директни пътя. Да направим разходка по държавата, като тръгнем от произволен град A и се придвижим до съседен град B. Понеже от B излизат поне два пътя, то ще можем да напуснем B по път, различен от този, по който сме дошли. Ще попаднем в трети град C. От C също ще можем да продължим разходката по път, различен от пътя между B и C. Продължавайки по този начин, разходката ни ще продължи до момента, когато ще попаднем в град, в който вече сме били. Но това означава, че в държавата има цикъл, което показахме, че е невъзможно. Полученото противоречие се дължи на допускането, че от всеки град излизат поне два пътя. Следователно има град A от който излиза само един път.

Да разгледаме държавата след премахване на град A и пътя, излизащ от него. Тъй като град A не може да бъде междинен град за път между два града, то в новата държава от всеки град ще може да се стигне до всеки друг по единствен начин. Като повторим горните разсъждения, ще намерим град B, от който излиза само един път. Премахваме B и пътя излизащ от него. Този процес може да продължи до момента, в който в държавата ще остане само един град и никакви пътища. Всеки от останалите $n-1$ града има път, свързан с него и това са всички пътища. Следователно техният брой е $n-1$.

Задача 7. Ако в една държава от всеки град може да се стигне до всеки друг, като при това от всеки град излизат четен брой пътища, то съществува затворен маршрут, който минава по всеки път точно веднъж.

Решение. Да започнем нашето пътешествие от произволен град A. Когато преминаваме по даден път, мислено ще го маркираме. Условието за четност на броя на пътищата от всеки град показва, че когато попаднем в град, различен от A, винаги можем да го напуснем по немаркиран път. При това броят на немаркираните пътища от този град ще остане четен (тъй като сме маркирали два пътя – този, по който сме влезли и този, по който сме напуснали града). Следователно нашето пътешествие може да завърши само в A, като при това всички пътища от A ще бъдат маркирани. По този начин построихме затворен маршрут, започващ и завършващ в град A.

От всички такива маршрути да изберем най-дългия. Да допуснем, че той не съдържа всички пътища. Да изтрием всичките пътища на този маршрут. Да забележим, че от всеки град отново излизат четен брой пътища (възможно нула). Това означава, че съществува град B, посетен при нашето пътешествие, от който излизат четен брой пътища. Тръгваме от B, като се движим по неизтрити пътища докато стигнем отново в B. Сега можем да направим по-дълъг маршрут, започващ и завършващ в град A. Тръгваме от A и се движим до достигане на B, след което се движим по втория маршрут до достигане до B. След това продължаваме по първоначалния маршрут. Това противоречие показва, че най-дългия затворен маршрут, започващ и завършващ в A, ще съдържа всички пътища.

Задача 8. В една държава има 6 града, някои от които са свързани с пътища. Турист преброил излизащите пътища от всеки град, като направил една грешка и получил 5, 5, 3, 3, 1, 1. Да се определи по колко пътя излизат от всеки град.

Решение. Да забележим, че ако има град с 5 пътя, той е свързан с всички останали градове. Това означава, че ако имаме два града с по 5 пътя, то от всеки от останалите градове ще излизат поне по два пътя. Следователно ако двете петици са правилно преброени, от всеки град трябва да излизат поне по два пътя. Но където и да е допуснатата грешка няма как да получим всички градове с поне по два пътя. Следователно грешката трябва да е при преброяване на едната от двете петици. След изтриване на единия град с пет пътя (този, който е вярно преброен) и на пътищата, излизащи от него, ще получим пет града съответно с пътища 4, 2, 2, 0, 0. При това грешката е при града с 4 пътя. Знаем, че броят на градовете, от които излизат нечетен брой пътища, е четен. Това означава, че грешно преброеното число 4 може да бъде заменено само с 0 или 2. Замяната с 0 обаче не е възможна, защото между два града може да има най-много един път. Следователно числото 4 трябва да бъде заменено с 2 и получаваме три града с по два пътя, което е възможно, ако всеки два от тях са свързани помежду си.

Следователно истинското разпределение е 5, 3, 3, 3, 1, 1.

Задача 9. Във всеки граф има два върха с равни степени. (Във всяка група от хора има двама, които имат равен брой познати.)

Решение. Нека графът има n върха. Тъй като всеки връх може да е свързан с най-много $n-1$ върха (с всички останали), то степента на всеки връх е цяло число от 0 до $n-1$ включително. Това са точно n възможности. Понеже имаме n върха, ако допуснем, че няма два върха с равни степени, трябва да имаме един връх от степен 0, един връх от степен 1, и т. н. един връх от степен $n-1$. Да означим върхът от степен 0 с A, а този от степен $n-1$ с B. Тъй като степента на A е 0, то A не е свързан с друг връх, в частност не е свързн с B. От друга страна степента на B е $n-1$, което означава, че B е свързан с всички останали върхове, в частност е свързан с A. Получихме противоречие, което се дължи на допускането, че няма два върха с равни степени. Следователно такива върхове съществуват.

Задача 10. Дадена е група от n човека. Известно е, че няма трима, всеки двама от които се познават. Да се определи най-много колко познати може да има в тази група.

Решение. Отново да разгледаме граф, върховете на който са членовете на групата, като два върха са свързани с ребро, ако съответните хора се познават. Условието да няма трима, всеки двама от които се познават означава, че в графа няма триъгълник. Искаме да намерим максималния възможен брой ребра в този граф. Първо ще намерим оценка за броя на ребрата в този граф и след това ще покажем, че има графи, за които тази оценка се достига.

Да означим върха с най-голяма степен с A и нека неговата степен е t. Измежду върховете, свързани с A няма ребра, понеже в графа няма триъгълник. От всеки от върховете, които не са свързани с A, излизат най-много по t ребра. Тези върхове са точно $n-t-1$. Следователно ребрата са най-много

$$t+(n-t-1).t=(n-t)t.$$

Неравенството $(x+y)^2 \geq 4xy$ след лесни преобразувания става еквивалентно на $(x-y)^2 \geq 0$ и следователно е вярно за произволни x и y. При $x=n-t$ и $y=t$ получаваме

$$\frac{n^2}{4} \geq (n-t)t,$$

което означава, че в графа има не повече от $\frac{n^2}{4}$ ребра. Понеже броят на ребрата е цяло число, оттук заключаваме, че техния брой е не по-голям от $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ (с $[x]$ означаваме цялата част на числото x, т.е. най-голямото цяло число, не надминаващо x).

Остава за всяко n да посочим пример на граф с n върха, за който ребрата са точно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ и няма триъгълник.

При четно $n=2k$ разделяме върховете на две групи от по k върха и свързваме всеки връх от едната група с всеки връх от другата. Получаваме точно $k^2=\left[\frac{n^2}{4}\right]$ ребра.

Когато $n=2k+1$ е нечетно, разделяме върховете на две групи, съответно с k и $k+1$ върха. Отново свързваме всеки връх от едната група с всеки връх от другата. Получаваме $k(k+1)$ ребра. Остава да отбележим, че $\left[\frac{n^2}{4}\right]=k(k+1)$. С това задачата е решена.

Задача 11. В равнината са дадени 6 точки, никои три от които не лежат на една права и между отсечките с краища в тези точки няма отсечки с равни дължини. Да се докаже, че има отсечка, която е най-голяма в някой триъгълник и в същото време е най-малка в друг триъгълник.

Решение. Най-напред да оцветим всички отсечки в червено. След това за всеки триъгълник да оцветим най-малката му страна в зелено. Тъй като нямаме равни разстояния, във всеки триъгълник има най-малка страна. Ще получим граф с 6 върха, чийто ребра са оцветени в два цвята. Знаем, че в такъв граф има едноцветен триъгълник. При това, тъй като най-малката страна на всеки триъгълник е зелена, то няма червен триъгълник. Следователно този триъгълник е зелен. Неговата най-голяма страна е най-малка в някой друг триъгълник (защото е зелена). С това задачата е решена

Две от най-важните свойства за един граф са дали от всеки връх може да се стигне до всеки друг, минавайки по ребрата му и дали в графа има цикъл. Един граф G се нарича **свързан**, когато между всеки два върха на G има път, минаващ по ребрата на G. Граф G се нарича **дърво**, ако G е свързан и в него няма цикли.

Задача 12. Да се докаже, че в дърво G с n върха има $n-1$ ребра.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по броя на върховете на G.

1. За граф с един връх твърдението е вярно, защото такъв граф няма ребра.

2. Да допуснем, че твърдението е вярно за дърво с n върха.

3. Да разгледаме дърво G с $n+1$ върха. От произволен връх на G да започнем да се движим по ребрата му. Тъй като G е дърво, то в него няма цикли. Това означава, че при това движение никога няма да се върнем във връх, в който вече сме били. Тъй като ребрата са краен брой, ще попаднем във връх, от който движението не може да продължи. Това означава, че от този връх излиза само едно ребро. След изтриване на този връх и реброто, излизащо от него ще получим дърво с n върха и едно ребро по-малко. От индукционното допускане знаем, че такова дърво има $n-1$ ребра. Следователно G има n ребра.

Задача 13. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато в G няма цикли и ребрата са $n-1$.

Решение. Нека G е дърво с n върха. От дефиницията за дърво следва, че в G няма цикли, а според предишната задача G има $n-1$ ребра. Обратно, да допуснем, че в G няма цикли и ребрата са $n-1$.

Трябва да докажем, че G е свързан. Да допуснем, че G не е свързан и нека $G_1, G_2, \ldots, G_k$ са свързаните му компоненти съответно с $n_1, n_2, \ldots, n_k$ върха. Във всяка от тези свързани компоненти няма цикли и следователно тя е дърво. Това означава, че ребрата в графа са

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k.$$

Следователно $k = 1$, т. е. има само една свързана компонента. Това означава, че G е свързан.

Задача 14. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато G е свързан и ребрата са $n - 1$.

Решение. Ако G е дърво, той е свързан и ребрата му са $n - 1$.

Обратно, да допуснем, че G е свързан и има $n - 1$ ребра. Ако в G има цикъл изтриваме произволно ребро от него и получаваме свързан граф с едно ребро по-малко. Продължавайки по този начин ще получим свързан граф с n върха без цикли, т. е. дърво. Но тогава ребрата са $n - 1$, което означава, че не е изтрито нито едно ребро. Следователно в G няма цикли, т. е. G е дърво.

Задача 15. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато в G няма цикли и добавянето на ново ребро води до появяване на цикъл.

Решение. Да допуснем, че G е дърво. По дефиниция това означава, че в G няма цикли. Да добавим ново ребро $v_i v_j$. Тъй като G е свързан, то в G съществува път от v_i до v_j. Този път, заедно с добавеното ребро образуват търсения цикъл.

Обратно, нека в G няма цикли и добавянето на ново ребро води до появяване на цикъл. Трябва да докажем, че G е дърво, т. е. G е свързан граф без цикли. Нека v_1 и v_2 са два произволни върха на G. Ще докажем, че между тях има път. Ако между тях има ребро, твърдението е вярно. Ако между тях няма ребро, да добавим ребро $v_i v_j$. Съгласно допускането ще се появи цикъл. Това означава, че в графа G има път между двата върха. Следователно между всеки два върха има път, т. е. G е свързан. Тъй като в него няма цикли следва, че G е дърво, което трябваше да докажем.

Задача 16. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато всеки два върха от G са свързани с единствен път.

Решение. Ако G е дърво, то всеки два върха са свързани. Ако допуснем, че някои два върха са свързани с два различни пътя, ще получим цикъл, което е противоречие. Следователно всеки два пътя са свързани с единствен път. Обратно, нека между всеки два върха има единствен път. Това означава, че графът е свързан и няма цикли, т. е. той е дърво.

Задача 17. Да се докаже, че граф G с n върха е дърво тогава и само тогава, когато G е свързан, но престава да бъде такъв след изтриване на произволно ребро.

Решение. От предишната задача следва, че между всеки два върха има единствен път. Изтриването на произволно ребро ще пракъсне поне един път и следователно графът няма да бъде свързан.

Задача 18. За граф G следните свойства са еквивалентни:

1. G е дърво, т.е. свързан граф без цикли.

2. В G няма цикли и G има $n-1$ ребра.

3. G е свързан и G има $n-1$ ребра.

4. В G няма цикли и добавянето на произволно ребро води до появяване на цикъл.

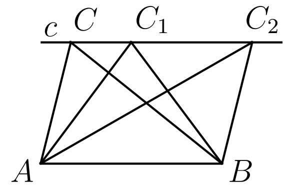
5. Всеки два върха от G са свързани с единствен път.

6. G е свързан, но престава да бъде такъв след изтриване на произволно ребро.

ФИГУРИ С РАВНИ ЛИЦА

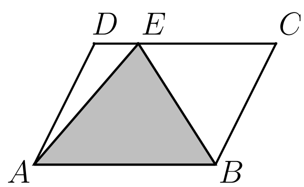
Основно свойство 1. Лицето на триъгълника ABC не се променя, ако преместим върха C по права, успоредна на страната AB.

На чертежа правата c е успоредна на AB и $S_{ABC} = S_{ABC_1} = S_{ABC_2}$.



Доказателство. При преместването на C по права, успоредна на страната AB, разстоянието от C до AB се запазва, следователно лицето на $\triangle ABC$ не се променя. Иначе казано, на чертежа триъгълниците ABC, ABC_1, ABC_2 имат обща страна AB, а височините от C, C_1, C_2 към AB са равни; тогава $S_{ABC} = S_{ABC_1} = S_{ABC_2}$.

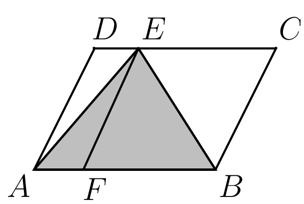
Следствие 1. За произволна точка E от страната CD на успоредник $ABCD$ лицето на триъгълника ABE е равно на половината от лицето на успоредника.



Доказателство. Според свойство 1. лицето на триъгълника ABE не се променя, ако преместим точка E успоредно на страната AB до точка C. Така получаваме

$$S_{ABE} = S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Може да разсъждаваме и по друг начин. Да отбележим точката F на страната AB така, че EF да е успоредна на AD.



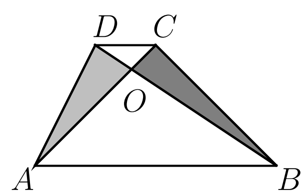
Така даденият успоредник се разделя на два успоредника $AFED$ и $FBCE$. Лицето на $\triangle ABE$ е съставено от половината от лицето на $AFED$ и половината от лицето на $FBCE$, следователно е половината от лицето $ABCD$. Записваме

$$S_{ABE} = S_{AFE} + S_{FBE} = \frac{1}{2}S_{AFED} + \frac{1}{2}S_{FBCE} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Ясно е, че за сбора на лицата на двата бели триъгълника ADE и BCE остава също половината от лицето на $ABCD$, т.е.

$$S_{ADE} + S_{BCE} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Следствие 2. В трапец $ABCD$ $(AB||CD)$ с пресечна точка на диагоналите O лицата на триъгълниците AOD и BOC са равни.



Доказателство. Да разгледаме триъгълника ABC. От свойство 1. следва, че лицето на ABC не се променя, ако преместим върха C успоредно на страната AB до D, т.е.

$$S_{ABC} = S_{ABD}.$$

Но равнолицевите триъгълници ABC и ABD се припокриват и общата им част е $\triangle ABO$. Като представим лицата на ABC и ABD като сбор, от горното равенство получаваме

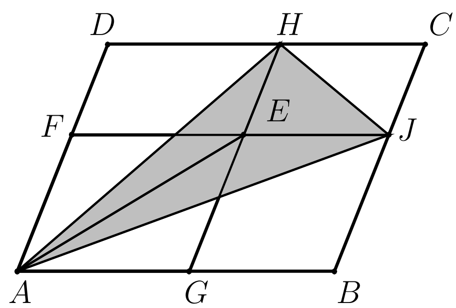
$$S_{ABO} + S_{BOC} = S_{ABO} + S_{AOD} \iff S_{BOC} = S_{AOD},$$

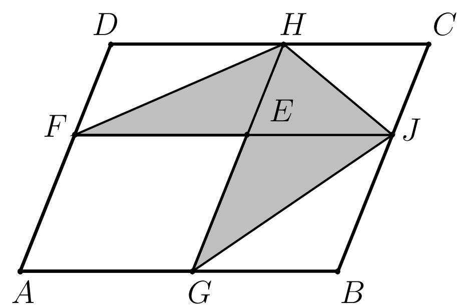
което трябваше да се докаже.

Задача 1. Даден е успоредник $ABCD$ и произволна вътрешна за него точка E. През точката E са построени правите $FJ||AB$ ($F \in AD$, $J \in BC$) и $GH||AD$ ($G \in AB$, $H \in CD$). Да се докаже, че лицето на триъгълника AJH е равно на полуразликата на лицата на успоредниците $ABCD$ и $AGEF$.

(*World Scientific*, 2016)

Решение. Представяме лицето на AJH като сбор от лицата на съставящите го триъгълници AJE, EJH и AEH. Прилагаме свойство 1 и преместваме върха A на триъгълника AJE в точка G, а върха A на триъгълника AEH – в точка F.

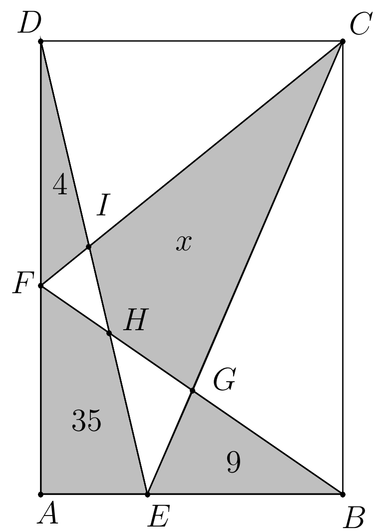




$$
\begin{aligned}
S_{AJH} &= S_{AJE} + S_{EJH} + S_{AEH} = \\
&= S_{GJE} + S_{EJH} + S_{FEH} = \\
&= \frac{1}{2}S_{GBJE} + \frac{1}{2}S_{EJCH} + \frac{1}{2}S_{FEHD} = \\
&= \frac{1}{2}(S_{GBJE} + S_{EJCH} + S_{FEHD}) = \\
&= \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{AGEF}).
\end{aligned}
$$

Задача 2. На страните AB и AD на правоъгълника $ABCD$ са избрани произволни точки E и F. В оцветените части са записани лицата им. Колко е x?

(*Аржентина*, 2006 г.)



Решение. Ще използваме следствие 1. Имаме

$$\left.\begin{array}{l} S_{BCF} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD} \\ S_{ADE} + S_{BCE} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD} \end{array}\right\} \Longrightarrow S_{BCF} = S_{ADE} + S_{BCE}.$$

Представяме лицата в полученото равенство като сбор

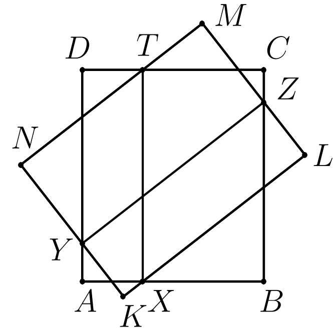
$$S_{FIH} + x + S_{BCG} = (35 + 4 + S_{FIH}) + (9 + S_{BCG})$$

и намираме

$$x = 35 + 4 + 9 = 48.$$

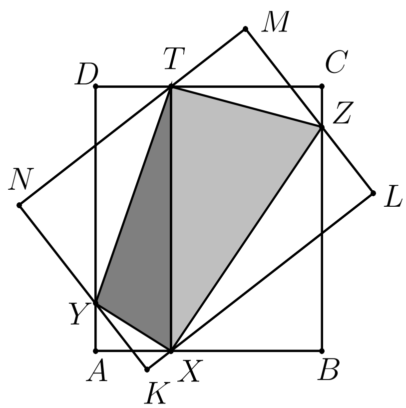
Задача 3. На чертежа правоъгълниците $ABCD$ и $KLMN$ се пресичат така, че отсечката XT е успоредна на AD, а отсечката YZ е успоредна на KL. Да се докаже, че $ABCD$ и $KLMN$ имат равни лица.

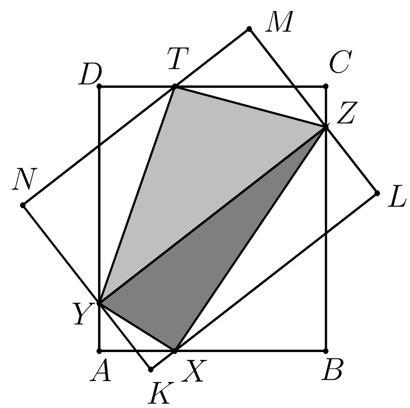
(*Конкурс на списание Квант*, 6 - 8 клас)



Решение. Разглеждаме четириъгълника $XZTY$. Той е съставен от триъгълниците XYT и XZT. От свойство 1. имаме

$$\left.\begin{aligned} S_{XYT} &= \frac{1}{2} S_{AXTD} \\ S_{XZT} &= \frac{1}{2} S_{XBCT} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S_{XZTY} = \frac{1}{2}(S_{AXTD} + S_{XBCT}) = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$





От друга страна, четириъгълникът $XZTY$ е съставен от триъгълниците XYZ и YZT и от свойство 1. получаваме

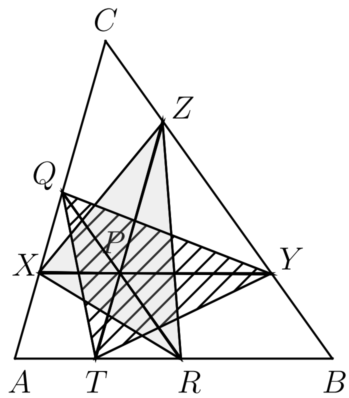
$$\left.\begin{aligned} S_{XYZ} &= \frac{1}{2} S_{KLZY} \\ S_{YZT} &= \frac{1}{2} S_{MNYZ} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow S_{XZTY} = \frac{1}{2}(S_{KLZY} + S_{MNYZ}) = \frac{1}{2} S_{KLMN}.$$

Тъй като лицето на всеки от правоъгълниците $ABCD$ и $KLMN$ е 2 пъти по-голямо от лицето на $XZTY$, то двата правоъгълника имат равни лица.

Задача 4. В триъгълника ABC е избрана произволна точка P и през нея са построени прави, успоредни на страните на триъгълника – $XY||AB$, $ZT||AC$ и $QR||BC$. Да се докаже, че

$$S_{XRZ} = S_{TYQ}.$$

(*Конкурс на списание Квант*, 6 - 8 клас)



Решение. Триъгълникът XRZ е съставен от триъгълниците XPR, RPZ и ZPX. От свойство 1. получаваме

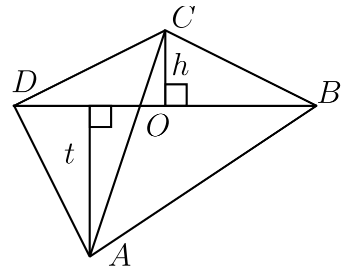
$$\left.\begin{array}{l} S_{XPR} = S_{XPT} \text{ (понеже } XP||TR) \\ S_{RPZ} = S_{RPY} \text{ (понеже } RP||YZ) \\ S_{ZPX} = S_{ZPQ} \text{ (понеже } ZP||XQ) \end{array}\right\} \Longrightarrow S_{XRZ} = S_{XPT} + S_{RPY} + S_{ZPQ}.$$

По същия начин разсъждаваме за триъгълника TYQ. Той е съставен от триъгълниците TPY, YPQ и QPT. За тях от свойство 1. получаваме

$$\left.\begin{array}{l} S_{TPY} = S_{RPY} \text{ (понеже } PY||TR) \\ S_{YPQ} = S_{ZPQ} \text{ (понеже } PQ||YZ) \\ S_{QPT} = S_{XPT} \text{ (понеже } PT||XQ) \end{array}\right\} \Longrightarrow S_{TYQ} = S_{RPY} + S_{ZPQ} + S_{XPT}.$$

Получихме, че триъгълниците XRZ и TYQ имат едно и също лице, равно на сбора от лицата на триъгълниците RPY, ZPQ и XPT (което е половината от сбора на лицата на успоредниците $BRPY$, $CZPQ$ и $ATPX$).

Основно свойство 2. Диагоналите на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точката O. Тогава



$$S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}.$$

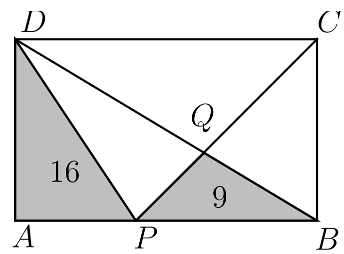
Вярно ли е това равенство, ако O е произволна точка от диагонала на четириъгълника?

Доказателство. Да означим с t височината през върха A в триъгълника ABD, а с h – височината през върха C в триъгълника CBD. Имаме

$$\begin{array}{lcl} S_{AOB} = \dfrac{1}{2}BO.t & & S_{AOD} = \dfrac{1}{2}DO.t \\ S_{COD} = \dfrac{1}{2}DO.h & & S_{BOC} = \dfrac{1}{2}BO.h \\ \hline S_{AOB} \cdot S_{COD} & = \dfrac{1}{4}.BO.DO.h.t = & S_{AOD} \cdot S_{BOC}. \end{array}$$

Същото доказателство е в сила и когато O е произволна точка от диагонала BD (и подобно, ако O е произволна точка от AC).

Задача 5. Даден е правоъгълник $ABCD$. На страната AB е избрана точка P, а Q е пресечната точка на PC и BD. Ако лицето на $\triangle APD$ е 16, а лицето на $\triangle PBQ$ е 9, намерете лицето на дадения правоъгълник.



Решение. От следствие 2. за трапеца $PBCD$ имаме

$$S_{PDQ} = S_{BCQ} = x.$$

От следствие 1. получаваме

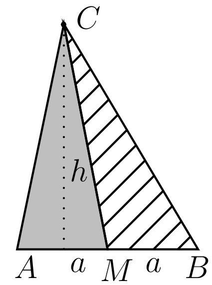
$$S_{DPC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{APD} + S_{BPC} \Longrightarrow S_{DCQ} + x = 16 + 9 + x,$$

т.е. $S_{DCQ} = 25$. От свойство 2. в четириъгълника $PBCD$ имаме

$$S_{PBQ}.S_{PCD} = S_{PDQ}.SPCB \Longrightarrow 9.25 = x^2,$$

откъдето $x = 15$. Следователно $S_{ABCD} = 2(25 + 15) = 80$.

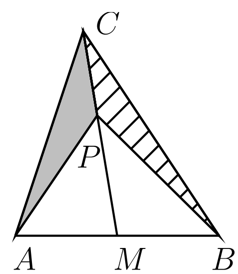
Основно свойство 3. В триъгълник ABC точката M е среда на страната AB. Медианата CM разделя ABC на триъгълници с равни лица, т.е. $S_{AMC} = S_{BMC}$.



Доказателство. Нека $AM = BM = a$ и h е височината през върха C в триъгълника ABC. Тогава

$$\left.\begin{array}{l} S_{AMC} = \dfrac{1}{2}AM.h = \dfrac{1}{2}a.h \\ S_{BMC} = \dfrac{1}{2}BM.h = \dfrac{1}{2}a.h \end{array}\right\} \Longrightarrow S_{AMC} = S_{BMC}.$$

Следствие 1. За произволна точка P от медианата CM на триъгълника ABC е вярно равенството $S_{APC} = S_{BPC}$.

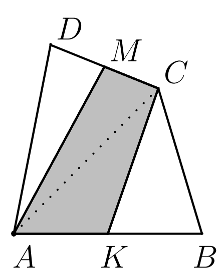


Доказателство. От основно свойство 3. имаме

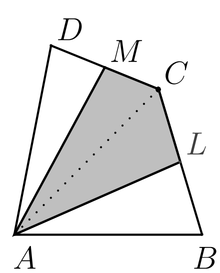
CM е медиана в $\triangle ABC \Longrightarrow$	$S_{AMC} = S_{BMC}$
PM е медиана в $\triangle ABP \Longrightarrow$	$S_{AMP} = S_{BMP}$
Изваждаме почленно и получаваме	$S_{APC} = S_{BPC}$.

По подобен начин разглеждат случаите, когато P е на правата CM, но извън отсечката CM.

Следствие 2. Ако точките K, L и M са средите на страните AB, BC и CD на четириъгълника $ABCD$, то $S_{AKCM} = S_{ALCM} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.



а)



б)

Доказателство. а) Да построим диагонала AC. От основно свойство 3. имаме

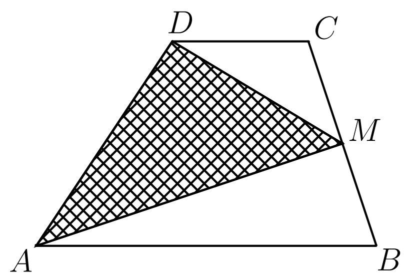
AM е медиана в $\triangle ADC \Longrightarrow$ $\quad S_{ACM} = S_{ADM} = \dfrac{1}{2}S_{ACD}$

CK е медиана в $\triangle ABC \Longrightarrow$ $\quad S_{AKC} = S_{BKC} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$

Събираме почленно и получаваме $\quad S_{AKCM} = S_{ADM} + S_{BKC} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

б) По същия начин от равенствата $S_{ACM} = S_{ADM}$ и $S_{ACL} = S_{ABL}$ получаваме $S_{ALCM} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

Задача 6. В трапеца $ABCD$ точката M е среда на бедрото BC. Докажете, че лицето на ADM е равно на половината от лицето на трапеца $ABCD$.



Решение. Лицето на триъгълника ABC се разполовява от медианата му AM, т.е.

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Медианата DM разполовява лицето на $\triangle BDC$, т.е.

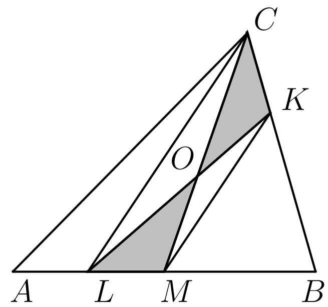
$$S_{DCM} = \frac{1}{2}S_{BDC}.$$

Като съберем двете равенства и вземем предвид, че $S_{ABC} = S_{ABD}$ (свойство 1), получаваме

$$S_{ABM} + S_{DCM} = \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{BDC}) = \frac{1}{2}(S_{ABD} + S_{BDC}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

следователно $S_{ADM} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

Задача 7. Даден е триъгълник ABC и точката M е среда на страната AB. На страната BC е избрана произволна точка K. През върха C е построена права, успоредна на KM, която пресича AB в точката L. Да се докаже, че правата KL разполовява лицето на триъгълника ABC, т.е.



$$S_{ALKC} = S_{LBK} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Решение. В $\triangle ABC$ отсечката CM е медиана, следователно

$$S_{ACM} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

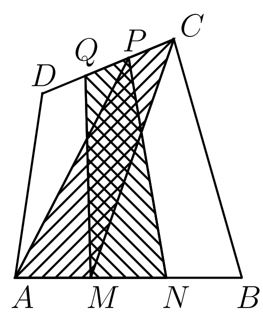
Тъй като $CL||KM$, от следствие 2 на свойство 1 имаме

$$S_{COK} = S_{MLO}.$$

Като използваме получените равенства, получаваме

$$\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{ACM} = S_{ACM} + S_{COK} - S_{MLO} = S_{ALKC}.$$

Задача 8. Даден е четириъгълник $ABCD$. Точките M и N на страната AB са такива, че $AM = MN = NB$, а точките P и Q на страната CD са такива, че $CP = PQ = QD$. Да се докаже, че лицето на $AMCP$ е равно на лицето на $MNPQ$.



Решение. От следствие 2. на свойство 3. за четириъгълника $ANCQ$ следва, че

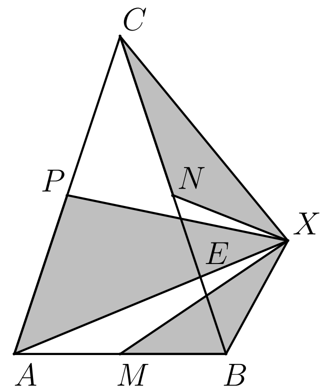
$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ANCQ} = S_{AMCP}.$$

Лесно може да се докаже, че $AMCP$ и $MNPQ$ имат лице, равно на $\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

Задача 9. Даден е триъгълник ABC с лице 54 и външна за него точка X (виж чертежа). Точките M, N и P са среди съответно на страните AB, BC и CA. Лицата на триъгълниците APX и CNX са съответно 26 и 12.

а) Да се намери лицето на $\triangle BMX$.

б) Ако E е пресечната точка на AX и BC, да се намери лицето на $\triangle EXB$.



(*Фестивал на младите математици, 2013 г.*)

Решение. а) Лицето на четириъгълника $ABXC$ може да се представи като сбор по два начина:

$$S_{ABCX} = S_{ABC} + S_{BCX} = S_{ABX} + S_{ACX}.$$

Като използваме свойство 3, от горното равенство получаваме

$$S_{ABC} + 2S_{NCX} = 2S_{BMX} + 2S_{APX}$$

и като заместим с дадените числени стойности, намираме $S_{BMX} = 13$.

б) От свойство 2. имаме

$$S_{ABE} \cdot S_{CXE} = S_{ACE} \cdot S_{BXE}.$$

Прибавяме към двете страни на равенството $S_{ABE} \cdot S_{ACE}$ и прилагаме разпределителното свойство:

$$S_{ABE} \cdot S_{CXE} + S_{ABE} \cdot S_{ACE} = S_{ACE} \cdot S_{BXE} + S_{ABE} \cdot S_{ACE},$$

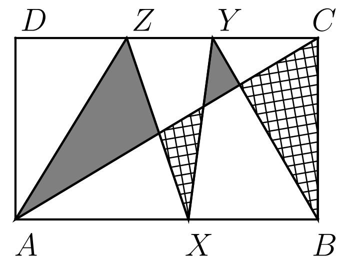
$$S_{ABE} \cdot (S_{CXE} + S_{ACE}) = S_{ACE} \cdot (S_{BXE} + S_{ABE}),$$

$$S_{ABE} \cdot S_{ACX} = S_{ACE} \cdot S_{ABX}.$$

Като вземем предвид, че $S_{ABX} = 2S_{BMX} = 26$ и $S_{AXC} = 2S_{APX} = 52$ и означим $S_{EXB} = x$, откъдето $S_{ACE} = S_{ABC} - x = 54 - x$ и заместим в горното равенство, получаваме

$$x.52 = 26.(54 - x) \iff 2x = 54 - x \iff x = 18.$$

Задача 10. Правоъгълникът $ABCD$ има лице 2015 кв.см. На страната AB е избрана точка X, а на страната CD – точките Y и Z.



а) Да се намери лицето на трапеца $ABYZ$, ако лицето на $\triangle XYZ$ е 201,5 кв.см.
б) Да се докаже, че общото лице на сивите триъгълници на чертежа е равно на общото лице на защрихованите триъгълници.

Конкурс на сп. Математика, 2015 г.

Решение. Забелязваме, че височината към страната AX в триъгълника AXZ, както и височината към страната BX в триъгълника BXY, е равна на AD. Тогава

$$S_{AXZ} + S_{BXY} = \frac{AX.AD}{2} + \frac{BX.AD}{2} = \frac{AD.(AX + BX)}{2} = \frac{AD.AB}{2},$$

т.е. сборът от лицата на триъгълниците AXZ и BXY е равен на половината от лицето на дадения правоъгълник.

а) Трапецът $ABYZ$ е съставен от триъгълниците AXZ, BXY и XYZ. Като използваме доказаното по-горе свойство, намираме

$$S_{ABYZ} = 2015 : 2 + 201,5 = 1007,5 + 201,5 = 1209 \text{ кв.см.}$$

б) Доказахме, че сборът от лицата на триъгълниците AXZ и BXY е равен на половината от лицето на дадения правоъгълник. От друга страна, лицето на триъгълника ABC също е равно на половината от лицето на правоъгълника. Следователно

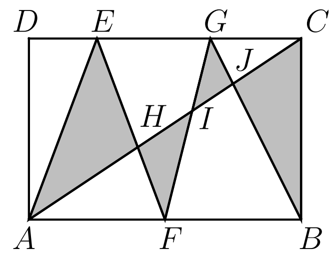
$$(\star) \qquad S_{AXZ} + S_{BXY} = S_{ABC}.$$

Да означим с P, Q и R пресечните точки на диагонала AC съответно с XZ, XY и BY. Ако от двете страни на равенството $(\star)$ извадим лицата на APX и $XBRQ$, ще получим равенството

$$S_{APZ} + S_{QRY} = S_{PQX} + S_{BRC},$$

т.е. сборът от лицата на сивите триъгълници на чертежа е равен на сбора от лицата на защрихованите триъгълници.

Задача 11. Даден е правоъгълникът $ABCD$. Точката F е среда на страната AB, а E и G са от страната CD, както е показано на чертежа. Лицето на триъгълника BCJ е равно на 120, а лицата на останалите оцветени триъгълници (в някакъв ред) са 24 и 48 и 144. Да се намери лицето на дадения правоъгълник.



(*Фестивал на младите математици, 2015 г.*)

Решение. В задача 10 б) доказахме, че сборът от лицата на двата оцветени триъгълника над диагонала е равен на сбора от лицата на другите два оцветени триъгълника. Оттук определяме, че лицето на $\triangle IJG$ е 24, лицето на $\triangle HIF$ е 48 и лицето на $\triangle AHE$ е 144.

Ако лицето на $\triangle AHF$ е x (както и на $\triangle FBH$, тъй като HF е медиана в $\triangle ABH$), лицата на $\triangle AFI$ и $\triangle FBI$ са равни на $48+x$ (IF е медиана в $\triangle ABI$). Тогава

$$S_{HBI} = S_{ABI} - S_{ABH} = 2(48+x) - 2x = 96.$$

Тъй като лицето на триъгълника AFE е $144 + x$ и е равно на лицето на $\triangle FBG$, което е $48 + x + 24 + S_{BIJ}$, то $S_{BIJ} = 72$.

От свойство 2. за четириъгълника $BIGC$ имаме

$$S_{GIJ} \cdot S_{BJC} = S_{BIJ} \cdot S_{CJG} \Longrightarrow S_{GIJ}.72 = 120.24,$$

откъдето намираме, че лицето на CJG е 40.

От свойство 2. за четириъгълника $BHGC$ имаме

$$S_{HBI} \cdot S_{CGI} = S_{HGI} \cdot S_{BIC} \Longrightarrow 96.(24+40) = S_{HGI}.(120+72),$$

откъдето намираме, че лицето на HGI е 32.

В триъгълника ABG точка I лежи на медианата GF, следователно лицата на AIG и BIG са равни и са 96 (следствие 1 от свойство 3). Тогава

$$S_{AHG} = S_{AIG} - S_{HGI} = 96 - 32 = 64.$$

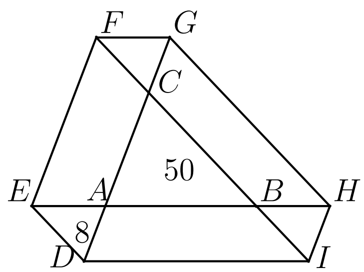
От свойство 2. за четириъгълника $ABCG$ имаме

$$S_{ABH} \cdot S_{CGH} = S_{AGH} \cdot S_{BCH} \Longrightarrow S_{ABH}.(32+40+24) = 64.(96+72+120),$$

откъдето намираме, че лицето на ABH е 192.

Така $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2(192 + 96 + 72 + 120) = 960$.

Задача 12. Даден е триъгълник ABC с лице 50. На правата AC е избрана точката D, както е показано на чертежа. Правата през D, успоредна на BC, пресича правата AB в точката E. Правата през E, успоредна на AC, пресича правата BC в точката F. Правата през F, успоредна на AB, пресича правата AC в точката G. Правата през G, успоредна на BC, пресича правата AB в точката H. Правата през H, успоредна на AC, пресича правата BC в точката I.



а) Да се докаже, че правата DI е успоредна на AB.

б) Ако лицето на триъгълника ADE е 8, да се намери лицето на шестоъгълника $DEFGHI$.

Решение. а) Ще използваме свойство 1 и неговите следствия. От равенствата

$$S_{DAB} \overset{DE||BC}{=} S_{EAC} \overset{AC||EF}{=} S_{FAC} \overset{FG||AB}{=} S_{GCB} \overset{HG||BC}{=} S_{HCB} \overset{HI||AC}{=} S_{IAB}$$

следва, че лицата на триъгълниците DAB и IAB са равни, т.е. DI е успоредна на AB.

б) Да означим лицето на шестте равнолицеви триъгълника от а) с S. От свойство 2 за четириъгълника $DBCE$ имаме

$$S_{EAC} \cdot S_{DAB} = S_{ABC} \cdot S_{EDA} \Longrightarrow S^2 = 5.80,$$

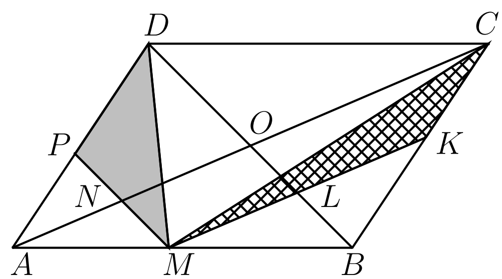
откъдето намираме $S = 20$. Тогава от успоредника $EDCF$ имаме

$$S_{ECF} = S_{EDC} = 20 + 8 = 28.$$

От успоредника $EAGF$ получаваме, че триъгълникът FCG има лице 8. Продължаваме аналогично и намираме, че търсеното лице е равно на $50 + 6.28 = 218$.

Задача 13. В успоредника $ABCD$ е избрана произволна точка M от страната AB и са построени отсечките $MK||AC$, $MP||BD$ ($P \in AD$, $K \in BC$). Докажете, че лицата на триъгълниците MPD и MCK са равни.

(*Конкурс на списание Квант*, 6 - 8 клас)



Решение. Ще използваме, че диагоналите в успоредника се разполовяват. Тогава $BO = DO$ и тъй като $PM||BD$, получаваме, че

$$S_{MBO} = S_{DPO}.$$

Освен това, в триъгълника ABD отсечката AO е медиана, следователно

$$S_{ABO} = S_{ADO}.$$

Като извадим почленно двете равенства, получаваме

$$S_{AMO} = S_{APO}.$$

Това означава, че отсечката AO разполовява отсечката PM (вж. следствие 1. на свойство 3). Нека пресечната точка на AO и PM е N, а на BD и MK е L. Имаме $PN = NM$ и оттук

$$S_{MPD} = 2S_{DNM} = 2S_{ONM} = S_{MNOL}$$

(използвахме свойство 1). По същия начин и лицето на триъгълника MCK е равно на лицето на успоредника $MNOL$, т.е. $S_{MPD} = S_{MCK}$.

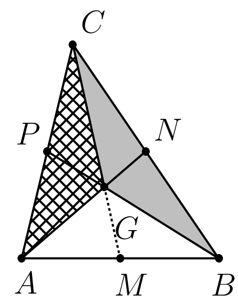
Основно свойство 4. В триъгълник ABC точките M, N и P са средите на AB, BC и CA.

4.1. Ако пресечната точка на медианите AN и BP е G, то G лежи и на третата медиана CM.

Общата точка G на медианите се нарича *медицентър* на триъгълника ABC.

4.2. Медицентърът разделя медианите в отношение $2 : 1$, т.е.

$$AG = 2 \cdot GN, \quad BG = 2 \cdot GP, \quad CG = 2 \cdot GM.$$



Доказателство. Ще използваме следствие 1 от свойство 3.

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ лежи на медианата } AN \Longrightarrow S_{ABG} = S_{ACG} \\ G \text{ лежи на медианата } BP \Longrightarrow S_{ABG} = S_{BCG} \end{array}\right\} \Longrightarrow S_{ACG} = S_{BCG}.$$

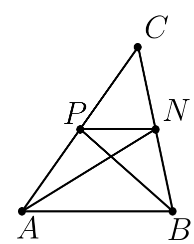
От равенството на лицата на триъгълниците ACG и BCG следва, че точката G лежи на медианата CM в триъгълника ABC.

Оттук лесно следва, че трите медиани разделят триъгълника на шест равнолицеви триъгълника

$$S_{AMG} = S_{BMG} = S_{BNG} = S_{CNG} = S_{CPG} = S_{APG}.$$

Тогава $S_{ABG} = 2.S_{BGN}$ и тъй като триъгълниците ABG и BGN имат обща височина през върха B, от равенството $S_{ABG} = 2.S_{BGN}$ следва, че $AG = 2.GN$. По същия начин се получават и останалите равенства.

Основно свойство 5. Отсечка, която свързва средите на две страни на триъгълника, е успоредна на третата страна ($PN||AB$, $PM||BC$, $MN||CA$) и разделя лицето му в отношение $1 : 3$.
Отсечките PN, PM и MN се наричат *средни отсечки* в триъгълника.

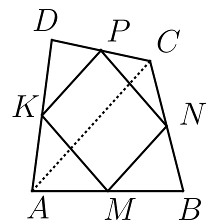


Доказателство. Лицето на всеки от триъгълниците ABP и ABN е равно на половината на лицето на ABC. Тъй като триъгълниците ABP и ABN имат обща страна AB, от равенството на лицата им следва, че върховете P и N са на равни разстояния от AB, т.е. отсечката PN е успоредна на AB (P и N са в една и съща полуравнина спрямо AB).

Като използваме, че PN е медиана в триъгълника BPC, а BP е медиана в триъгълника ABC, получаваме

$$S_{PNC} = \frac{1}{2}S_{BPC} = \frac{1}{4}S_{ABC} \Longrightarrow S_{PNC} : S_{ABNP} = 1 : 3.$$

Следствие 1. Средите M, N, P и K на страните AB, BC, CD и DA на четириъгълника $ABCD$ са върхове на успоредник и лицето на успоредника $MNPK$ е равно на половината от лицето на $ABCD$.



Доказателство. От свойство 5. следва, че $KP||AC$ и $S_{KPD} = \frac{1}{4}S_{ACD}$ (защото KP е средна отсечка в триъгълника ACD), както и че $MN||AC$ и $S_{MNB} = \frac{1}{4}S_{ACB}$(защото MN е средна отсечка в триъгълника ABC). Следователно $KP||MN$ и

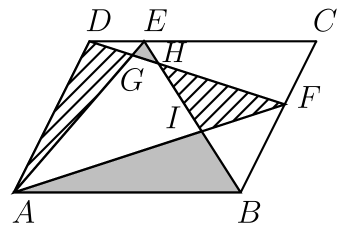
$$S_{KPD} + S_{MNB} = \frac{1}{4}(S_{ACD} + S_{ACB}) = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

По същия начин получаваме, че $KM||PN$ и $S_{AKM}+S_{CPN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Следователно $MNPK$ е успоредник и

$$S_{KPD} + S_{MNB} + S_{AKM} + S_{CPN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Longleftrightarrow S_{MNPK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Задача 14. Върху страната CD на успоредник $ABCD$ е избрана произволна точка E и е свързна с върховете A и B. Лицето на четириъгълника $ABED$ е 18, а на $ABCE$ – 21. Намерете лицето на успоредника S_{ABCD}.

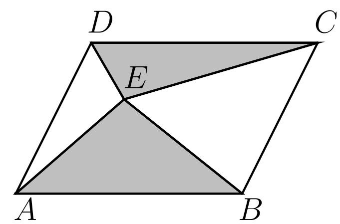
Задача 15. Върху страната CD на успоредник $ABCD$ е избрана точка E, а на страната BC е избрана точка F. Да се докаже, че сборът от лицата на сивите триъгълници е равен на сбора на лицата на защрихованите триъгълници.



Задача 16. Върху страната AB на успоредника $ABCD$ е избрана произволна точка K и е построен успоредник $DKCL$. Да се докаже, че $S_{DKCL} = S_{ABCD}$.

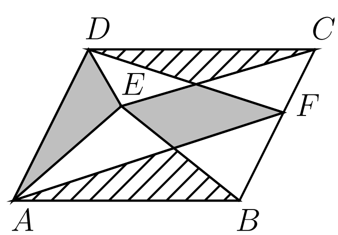
Задача 17. Пясъчен часовник. Във вътрешността на успоредник $ABCD$ е избрана произволна точка E. Да се докаже, че

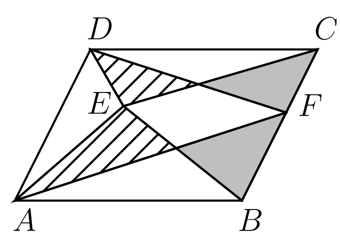
$$S_{ABE} + S_{DCE} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$



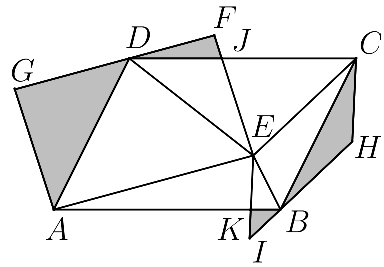
Задача 18. Във вътрешността на успоредник $ABCD$ е избрана произволна точка E и е свързана с върховете на успоредника. Лицата на три от получените триъгълници са 3, 4 и 5. Колко може да е лицето на четвъртия триъгълник?

Задача 19. Във вътрешността на успоредник $ABCD$ е избрана произволна точка E, а на страната BC е избрана точка F. Да се докаже, че сборът от лицата на сивите фигури е равен на сбора на лицата на защрихованите фигури.

a) 

b) 

Задача 20. В успоредника $ABCD$ е отбелязана вътрешна точка E и са построени успоредниците $AEFG$ и $CEIH$ така, че B лежи на HI и D лежи на GF.



А) Докажете, че сборът от лицата на $AEFG$ и $CEIH$ е равен на лицето на $ABCD$.

Б) Ако $\triangle CEJ$ и $\triangle AKE$ имат лица съответно 20 и 14, намерете лицето на оцветената част от чертежа.

Упътване. а) От следствие 1 на свойство 1 следва, че $S_{ADE} = \dfrac{1}{2}S_{AEFG}$, както и $S_{BEC} = \dfrac{1}{2}S_{CEIH}$. От задача 17 имаме $S_{ADE}+S_{BEC} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$. Така стигаме до равенството $\dfrac{1}{2}S_{AEFG} + \dfrac{1}{2}S_{CEIH} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

б) В успоредника $AEFG$ имаме $S_{GAD} + S_{DEF} = \dfrac{1}{2}S_{AEFG}$, аналогично в $CEIH$ имаме $S_{BEI} + S_{BHC} = \dfrac{1}{2}S_{CEIH}$. От задача 17 имаме $S_{ABE}+S_{DEC} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$. Като използваме резултата от а), получаваме

$$S_{GAD} + S_{DEF} + S_{BEI} + S_{BHC} = S_{ABE} + S_{DEC}.$$

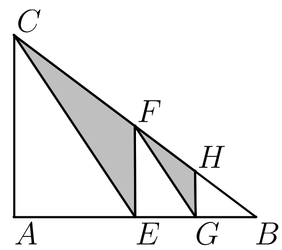
Оттук лицето на оцветената част от чертежа е равно на сбора от лицата на $\triangle CEJ$ и $\triangle AKE$, т.е. на 34.

Задача 21. На основите на трапец $ABCD$ са взети точки M и N. Пресечната точка на AN и DM е P, а пресечната точка на BN и CM е Q. Да се докаже, че

$$S_{APD} + S_{BQC} = S_{MQNP}.$$

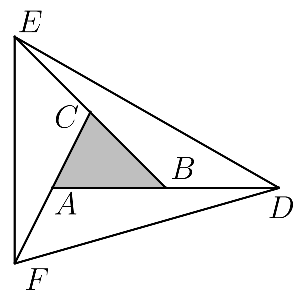
Упътване. Използвайте следствие 2 на свойство 1.

Задача 22. Точките E и F са среди съответно на страните AB и BC в $\triangle ABC$, а точките G и H са среди на отсечките BE и BF съответно. Ако лицето на оцветената част е равно на 80, колко е лицето на $\triangle ABC$?



Задача 23. На чертежа страните на триъгълника ABC са удвоени, като $AD = BD$, $BC = CE$, $CA = AF$. Да се намери лицето на триъгълника ABC, ако лицето на DEF е 210.

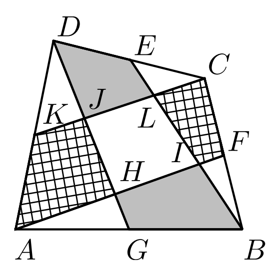
Упътване. Ако построим отсечката AE, лицето на триъгълника EAB се разполовява от медианата му AC, а EA е медиана в триъгълника FCE.



Задача 24. Даден е четириъгълник $ABCD$. На чертежа точките E, F, G и K са среди на съответните страни на четириъгълника. Докажете, че:

a) общото лице на защрихованите фигури е равно на лицето на сивите фигури;

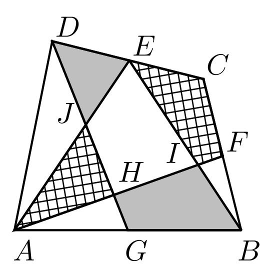
b) лицето на четириъгълника $HILG$ е равно на сбора от лицата на четирите бели триъгълника на чертежа.



Задача 25. Даден е четириъгълник $ABCD$. На чертежа точките E, F и G са среди на съответните страни на четириъгълника. Докажете, че:

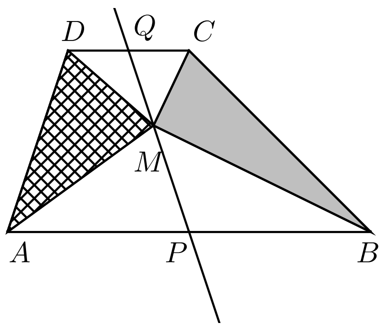
a) общото лице на защрихованите фигури е равно на лицето на сивите фигури;

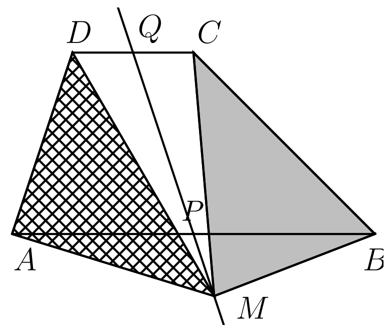
b) лицето на четириъгълника $HIEJ$ е равно на сбора от лицата на трите бели триъгълника на чертежа.



Задача 26. Точките P и Q са среди на основите AB и CD на трапеца $ABCD$. Ако M е произволна точка от правата PQ, да се докаже, че $S_{MBC} = S_{MDA}$.

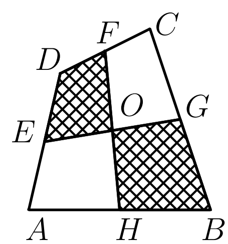
Упътване. Разгледайте различните разположения на точката M върху правата PQ, две от които са показани на чертежите.





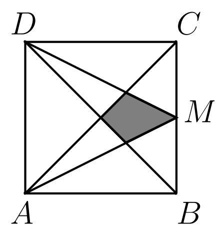
Задача 27. В четириъгълника $ABCD$ точките E, F, G, H са среди съответно на AD, DC, CB, BA. Отсечките EG и FH се пресичат в точката O. Да се докаже, че сборът от лицата на $DFOE$ и $BHOG$ е равен на сбора от лицата на $AEOH$ и $CGOF$.

(*Arany Daniel Competititon, Junior level*)



Задача 28. Точка M е среда на страната BC на квадрата $ABCD$. Каква част от лицето на квадрата е оцветена?

(*Италия*, 2014)

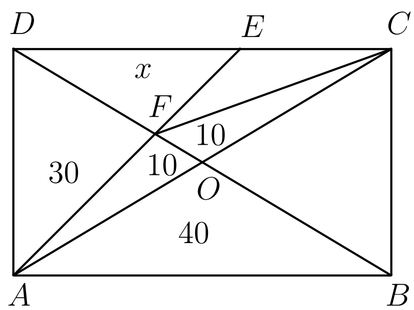


Упътване. Нека O е пресечната точка на диагоналите на $ABCD$, а AM и BD се пресичат в точката G. Тогава G е медицентърът на троъгълника ABC. От свойство 4.2 следва, че $AG = 2 \cdot GM$, т.е. $S_{AOG} = 2 \cdot S_{OMG}$. Това означава, че

$$S_{OMG} = \frac{1}{3} S_{AM} = \frac{1}{3}. \cdot \frac{1}{2} S_{AMC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{24} S_{ABCD}.$$

Задача 29. На страната CD на правоъгълника $ABCD$ е избрана точката E. Отсечката AE пресича диагонала BD в точката F. Ако лицето на триъгълника ABF е 50 кв.см, а лицето на триъгълника ADF е 30 кв. см, да се намери лицето на триъгълника DEF.

Решение. Да построим диагонала AC и да означим с O общата среда на диагоналите на правоъгълника.



Тъй като AO е медиана в $\triangle ABD$, то $S_{ADO} = \dfrac{1}{2} S_{ABD} = 40$. Оттук $S_{AFO} = 40 - 30 = 10$ и тъй като FO е медиана в $\triangle ACF$, то и $S_{FCO} = 10$. Ако означим $S_{DEF} = x$, изразяваме $S_{EFC} = 30 - x$. От пропорциите

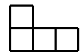
$$\frac{S_{DEF}}{S_{EFC}} = \frac{DE}{EC} = \frac{S_{DAF}}{S_{AFC}}$$

получаваме

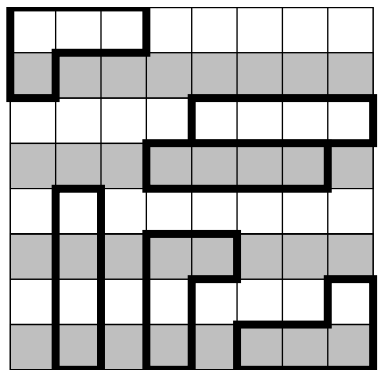
$$\frac{x}{30 - x} = \frac{30}{20} \Longrightarrow 2x = 3(30 - x) \Longrightarrow x = 18,$$

т.е. лицето на триъгълника DEF е 18 кв.см.

ИНВАРИАНТИ

Задача 1. Може ли шахматна дъска да се покрие с 15 правоъгълника 1×4 и едно ъгълче от вида ?

Решение. Да оцветим шахматната дъска по редове. Оцветените полета са 32.



Както и да поставим правоъгълник 1×4 на дъската, той покрива четен брой оцветени квадратчета – 0, 2 или 4. Следователно 31 правоъгълника 1×4 покриват четен брой оцветени квадратчета. Тъй като всички оцветени квадратчета на дъската са 32, след поставянето на правоъгълниците остават четен брой оцветени квадратчета.

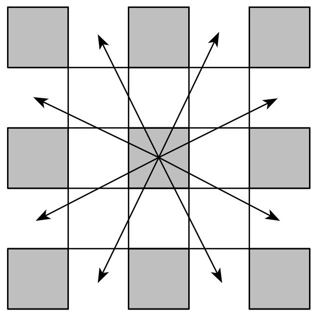
Сега е моментът да забележим, че ъгълчето – както и да го поставим, – покрива едно или три оцветени квадратчета, т.е. нечетен брой квадратчета. Следователно това покритие е невъзможно.

Задача 2. Може ли шахматна дъска да се покрие с 32 домино така, че 17 домино да са поставени вертикално, а 15 домино – хоризонтално?

Решение. Отново ще използваме оцветяване в два цвята по редове. Всяко вертикално поставено домино покрива едно черно и едно бяло квадратче. Както и да поставим 17 вертикални домина, те ще покриват общо 17 черни и 17 бели квадратчета. Така непокрити ще останат 15 черни и 15 бели квадратчета. Но всяко хоризонтално домино покрива или две черни, или две бели квадратчета, т.е. хоризонталните домина покриват четен брой бели и четен брой черни квадратчета. Следователно покритието е невъзможно.

Задача 3. Може ли кон да тръгне от полето A1 на шахматна дъска, да стъпи на всяко поле точно по веднъж и да спре в H8?

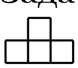
Решение. Разковничето в тази задача е шахматното оцветяване. При всеки ход конят сменя цвета на полето си – от черно на бяло или от бяло на черно.



На шахматната дъска има 64 полета, 32 бели и 32 черни. Полето A1 е черно и ако конят тръгне от A1 да обхожда дъската, маршрутът му се описва от редица от полета с редуващ се цвят:

ЧБЧБ....ЧБЧБ

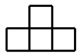
Полетата ще са 64, ако конят стъпи на всяко поле на дъската по веднъж. Последното, 64-то поле в маршрута е бяло. Но полето H8 е черно. Следователно не е възможно конят да тръгне от A1, да стъпи на всяко поле точно по веднъж и да спре в H8.

Задача 4. Може ли квадрат 10×10 да се покрие с фигури от вида ?

Решение. Отново ще използваме шахматно оцветяване; 50 полета са бели и 50 са черни.

Ако покритието е възможно, фигурите на дъската ще са $100 : 4 = 25$. Но всяка фигура покрива или 3 бели и едно черно поле, или 3 черни и едно бяло поле.

За да се покрият равен брой бели и черни полета (по 50 от всеки цвят), трябва броят на фигурите с 3 черни и едно бяло поле да е равен на броя на фигурите с едно черно и 3 бели полета. Но това е невъзможно, тъй като общият брой на фигурите е нечетен – те са 25.

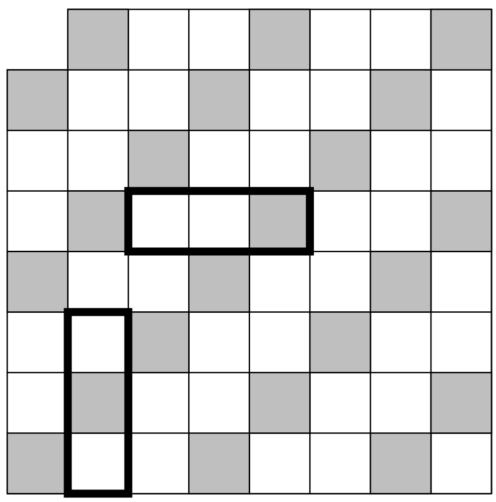
Задача 5. Може ли шахматна дъска да се покрие с 15 фигури от вида  и едно квадратче 2×2?

Упътване. Използвайте шахматно оцветяване.

Задача 6. От шахматна дъска изрязали ъглово поле. Може ли останалата част да се покрие с правоъгълници 1×3?

Решение. След изрязването на ъглово поле, на шахматната дъска остават 63 полета. Ако покритието е възможно, ще са нужни $63 : 3 = 21$ правоъгълника 1×3.

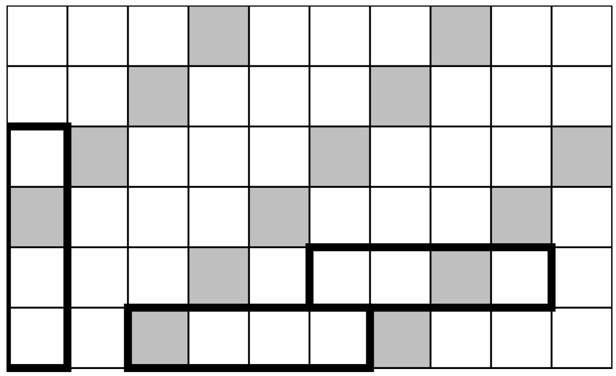
Да разгледаме следното диагонално оцветяване на дъската.



Оцветените полета са 22. Но както и да се постави правоъгълник 1×3 на дъската, той ще покрива точно едно оцветено поле; 21 правоъгълника ще покриват 21 оцветени полета. Следователно дъската не може да се покрие с 21 правоъгълника 1×3.

Задача 7. Може ли правоъгълник 6×10 да се покрие с правоъгълници 1×4?

Решение. Отново ще разгледаме диагонално оцветяване.

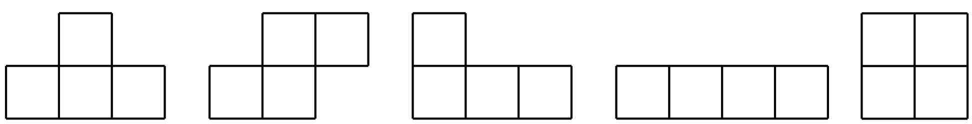


Оцветените полета на дъската са 14.

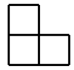
Забелязваме, че както и да поставим правоъгълник 1×4, той покрива точно едно оцветено поле.

Да допуснем, че дъската може да се покрие с правоъгълници 1×4. Тогава те са $60 : 4 = 15$ и покриват 15 оцветени полета. Но оцветените полета са 14; противоречие. Следователно покритието е невъзможно.

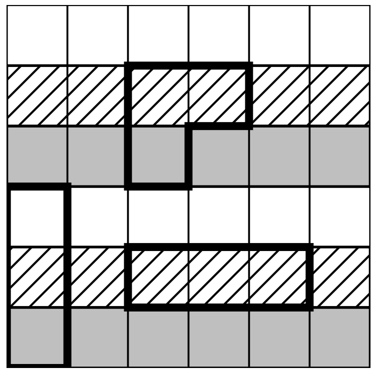
Задача 8. Може ли от всички тетрамино, използвани по веднъж, да се сглоби правоъгълник?



Упътване. Използвайте шахматно оцветяване.

Задача 9. Може ли квадрат 6×6 да се покрие с 11 правоъгълника 1×3 и едно ъгълче от вида ?

Решение. Да оцветим дъската в три цвята по редове.



Нека първо поставим верикално разположените правоъгълници 1×3 и да означим броя им с n. Всеки вертикален правоъгълник покрива по едно поле от всеки цвят, следователно за ъгълчето и хоризонталните правоъгълници остават по $12-n$ полета от всеки цвят.

Сега да поставим ъгълчето. То покрива 2 полета от един цвят и едно от друг. След поставянето му, за хоризонталните правоъгълници остават $10-n$ полета от единия цвят, $11-n$ от втория и $12-n$ от третия.

Да разгледаме хоризонталните правоъгълници. Всеки от тях покрива три едноцветни полета. Но от числата $10-n$, $11-n$ и $12-n$ точно едно се дели на 3. Следователно останалите полета не могат да се покрият изцяло с хоризонтални правоъгълници. Покритието е невъзможно.

Задача 10. Замък има формата на триъгълник, разделен на 25 малки зали със същата форма. Във всяка стена между залите има врата. Пътник ходи по замъка, като не посещава нито една зала повече от един път. Най-много колко зали може да разгледа той?

* * *

Задача 11. Може ли 10 банкноти, всяка от които е от 1 или 5 лв., да са на обща стойност 25 лв.?

Решение. Не, тъй като четен брой нечетни числа имат четен сбор!

Задача 12. В редица са написани първите 666 естествени числа. Може ли да сложим между тях знаци + и − по такъв начин, че в резултат да се получи 0?

Решение. Записани са 333 четни и 333 нечетни числа. Тъй като нечетните числа са нечетен брой, както и да се поставят знаците, резултатът ще е нечетно число. Следователно не може да е 0.

Задача 13. На дъска са записани числата от 1 до 2007. Избираме две от тях, изтриваме ги и вместо тях записваме сбора или разликата им. Четно или нечетно ще бъде последното число на дъската?

Решение. В началото на дъската има 1003 четни и 1004 нечетни числа. Да проверим какво се случва с броя на четните и с броя на нечетните числа на дъската след един ход. Нека избраните числа са a и b; Възможните варианти за тяхната четност са показани в таблицата.

a	b	$a \pm b$	брой нечетни числа на дъската
четно	четно	четно	не се променя
нечетно	нечетно	четно	намалява с 2
четно	нечетно	нечетно	не се променя

Последният стълб на таблицата показва, че *броят на нечетните числа на дъската запазва своята четност.* Тъй като в началото има четен брой нечетни числа, не е възможно да остане едно нечетно число. Следователно последното число е четно.

Друго решение ще получим, ако забележим, че *четността на сбора на записаните числа се запазва.* Това означава, че ако сборът е четен, и последното число ще е четно, а ако е нечетен – и последното ще е нечетно.

Сред записаните числа има четен бтой нечетни, следователно сборът им е четен. Четно ще бъде и последното число на дъската.

Задача 14. На дъската са записани естествените числа от 1 до 20 включително. За един ход някои две от числата (x и y) се изтриват и вместо тях се записва числото $3x+5y$. Може ли последното получено число да е равно на 45239?

Решение. Забелязваме, че числото $3x + 5y = x + y + 2x + 4y$ има четността на $x + y$. Следователно *сборът на записаните на дъската числа запазва четността си.* Сборът на числата от 1 до 20 е 210 и е четен, следователно последното число не може да е равно на нечетното 45239.

Задача 15. На дъската са записани естествените числа от 1 до 20 включително. За един ход някои две от числата (x и y) се изтриват и вместо тях се записва числото $x + y + 5xy$. Може ли последното число да е 2202?

Решение. Сборът на числата от 1 до 20 е 210 и се дели на 5. След всеки ход сборът на всички числа се увеличава с $5xy$ (защото вместо x и y се записва $x+y+5xy$). Следователно сборът от числата отново се дели на 5, т.е. *във всеки момент сборът на записаните числа се дели на 5.*

От това инвариантно свойство следва, че последното число на дъската ще се дели на 5. Следователно то не може да е 2202.

Задача 16. Първото число в една редица е 123. Всяко следващо число е равно на сбора или разликата на предишното число и сбора от неговите цифри. Ще се срещне ли в тази редица числото 2015?

Решение. Не, защото *всички числа в редицата се делят на 3*, а 2015 не се дели.

Задача 17. Лист се разрязва на 7 или на 13 части. След това едно от парчетата се разрязва на 7 или на 13 части и т.н. Могат ли по този начин да се получат точно 2016 листчета? А 2017 листчета?

Решение. При разрязване на един лист на 7 или 13 части, общият брой части се увеличава с 6 или 12. Следователно във всеки момент *броят на листчетата дава остатък 1 при деление на 6.* Затова е ясно, че не могат да се получат точно 2016 листчета.

Лесно се вижда, че е възможно да се получат 2017 листчета; например след 168 разрязвания на 13 части.

Задача 18. Ако юнакът отсече една глава на Стоглавия змей, на нейно място израсват 4; ако отсече две, израсват 8, а ако отсече три, нищо не израсва. Може ли юнакът напълно да обезглави змея?

Решение. Да разгледаме как се променя броят на главите на змея в зависимост от действията на юнака.

отсечени глави	израснали глави	промяна
1	4	$+3$
2	8	$+6$
3	0	-3

Забелязваме, че броят на главите на змея се променя с число, кратно на 3. Следователно *остатъкът на броя на главите при деление на 3 се запазва.* Затова не е възможно главите от 100 да станат 0.

Задача 19. На дървото Черешонар растат 100 череши и 101 нара. От дървото могат да се късат по два плода. Ако се откъснат две череши, пораства нар; ако се откъснат два нара, пораства нар; ако се откъснат череша и нар, пораства череша. Какъв ще бъде последният плод на дървото?

Решение. Да означим броя на наровете и на черешите на дървото съответно с x и y. Техните стойности се променят след откъсване на два плода по един от следните начини:

откъснати	пораснали	нова стойност на x	нова стойност на y
два нара	нар	$x-1$	y
две череши	нар	$x+1$	$y-2$
череша и нар	череша	$x-1$	y

Забелязваме, че *броят на черешите y запазва четността си.* В началото има четен брой череши на дървото, значи не може да остане една череша. Последният плод ще е нар.

Задача 20. На шахматна дъска Петър избира произволен квадрат 2×2 и едновременно променя цвета на четрите му полета (от бял в черен и обратно). Възможно ли е след няколко такива операции на дъската да остане само едно черно поле?

Решение. Да разгледаме как се променя броят на черните полета на дъската. В началото те са 32; въпросът е дали броят им може да стане равен на 1. Нека x е броят на черните полета на дъската в даден момент. Ще разгледаме как се променя x при един избор на Петър. За броя на белите и черните полета в избрания от него квадрат 2×2 има пет възможности, показани в таблицата:

черни	бели	нова стойност на x
4	0	$x-4$
3	1	$x-2$
2	2	x
1	3	$x+2$
0	4	$x+4$

Виждаме, че от състояние с x черни полета процесът води до състояние с $x-4,\ x-2,\ x,\ x+2$ или $x+4$ черни полета. Следователно x запазва четността си, т.е. *четността на броя x на черните полета е инвариантна* за процеса от промени. Тогава е ясно, че от четното $x = 32$ не може да се получи нечетното $x = 1$.

Задача 21. Индианско племе притежава 24 кюлчета злато, 26 диаманта и 25 перли. При Кортес те могат да обменят кюлче злато и диамант за една перла, при Монтесума – кюлче злато и перла за един диамант, а при съседното племе – диамант и перла за едно кюлче злато. След няколко сделки останала само една вещ. Каква е тя?

Упътване. След всяка размяна броят на кюлчетата, на диамантите и на перлите променя четността си. Когато остане само една вещ, два броя са 0, а третият е 1. Двата броя с еднаква четност накрая са имали еднаква четност и в началото, т.е. това са кюлчетата и диамантите. Останала е една перла. (Иначе казано, при всяка размяна се запазва четността на разликата между броя на кои да е две стоки.)

Задача 22. На остров Камелот живеят 13 сиви, 15 кафяви и 17 розови хамелиона. Ако се срещнат два разноцветни хамелиона, те едновременно се оцветяват в третия цвят. Възможно ли е в някакъв момент всички хамелиони на острова да са едноцветни?

Решение. Тъй като популацията е затворена (на острова), общият брой на хамелеоните се запазва. Затова състоянието се определя напълно от броя хамелеони от кои да е два цвята. Нека в даден момент сивите хамелиони са x, а кафявите – y. Да видим как се променят x, y и тяхната разлика след една среща.

след среща на:	нова стойност на x	нова стойност на y	нова стойност на $y-x$
сив и кафяв	$x-1$	$y-1$	$y-x$
сив и розов	$x-1$	$y+2$	$(y-x)+3$
розов и кафяв	$x+2$	$y-1$	$(y-x)-3$

Забелязваме, че разликата между броя кафяви и сиви хамелеони се променя с число, кратно на 3. Следователно *разликата между броя кафяви и сиви хамелеони запазва остатъка си при деление на 3.*

В началото тази разлика е 2, следователно не е възможно броят кафяви и розови хамелеони да се изравни и да стане 0, както не е възможно едните хамелеони да са 45, а другите – 0.

Задача 23. Дадени са краен брой фигури, квадрати, триъгълници и кръгове. Избират се две от тях и се заменят с една по правилото:

$$\begin{array}{lclclcl} (\triangle,\ \bigcirc) & \to & \triangle & \qquad & (\square,\ \bigcirc) & \to & \square \\ (\bigcirc,\ \bigcirc) & \to & \bigcirc & & (\square,\ \square) & \to & \triangle \\ (\triangle,\ \triangle) & \to & \square & & (\triangle,\ \square) & \to & \bigcirc \end{array}$$

Докажете, че вида на фигурата, която ще остане последна, не зависи от избора и реда на извършените замени.

Упътване. Докажете, че разликата между броя на триъгълнците и квадратите запазва остатъка си при деление на 3. Ако този остатък е 0, последната фигура е кръг; ако е 1, остава триъгълник, а ако е 2, остава квадрат.

Задача 24. В страните Дилия и Далия паричните единици са дилери и далери съответно. В Дилия един дилер се разменя за 4 далера, а в Далия един далер се разменя за 4 дилера. Начинаещ финансист има 1 дилер и може свободно да минава границата и да обменя пари. Възможно ли е броят на дилерите да се изравни с броя на далерите?

Задача 25. На дъска са записани числата от 1 до 100. Можем да изберем две от записаните числа, например a и b, да ги изтрием и вместо тях на дъската да запишем едно от числата $a+b$, $a-5b$ или $7a-11b$. Същата процедура прилагаме към полученото множество от числа и т.н., докато на дъската остане само едно число. Може ли то да е нула? (*Латвия*, 2002)

Упътване. Четността на броя на нечетните числа се запазва.

Задача 26. В азбуката на едно племе има само две букви – А и Я. Комбинациите на букви АЯ и ЯЯЯ, ЯА и ААЯ, ЯЯ и ААА във всяка дума могат да се заменят една с друга. Може ли от думата АЯЯ да се получи ЯАА?

Упътване. Разгледайте как се променя броят на буквите А и Я.

Задача 27. Дадени са три автомата. Първият по дадено картонче с числа (a, b) отпечатва картонче $(a+1, b+1)$, вторият по картонче с четни числа (a, b) отпечатва $(a:2, b:2)$; третият по две картончета (a, b) и (b, c) отпечатва картонче (a, c). Автоматите връщат и подадените картончета. Възможно ли е с тези автомати от картончето $(1, 11)$ да се получи картонче $(2, 2008)$?

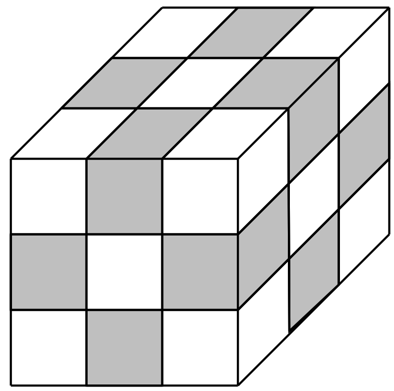
Упътване. Докажете, че разликата на числата на всяко картонче, което може да се получи от $(1, 11)$, се дели на 5.

Задача 28. На дъската е записано числото 12. Всяка минута това число се дели или умножава с 2 или с 3. Може ли след един час на дъската да е записано числото 54?

Упътване. Тъй като $12 = 2^2.3^1$, след деление или умножаване на 2 или на 3 се получава число от вида $2^a.3^b$, където $a+b$ е четно число. След повторно деление или умножаване на 2 или на 3 се получава число от вида $2^a.3^b$, където $a+b$ е нечетно число и т.н. Следователно след четен брой операции (например след 60 минути) сборът $a+b$ е нечетен; но сборът на степенните показатели на 2 и 3 в числото $54 = 2^1.3^3$ е четен.

Задача 29. Куб $3 \times 3 \times 3$ е облепен с домино 1×2, като някои са прегънати. Да се докаже, че броят на прегънатите домино е нечетен. Обобщете твърдението за куб с нечетен ръб.

Решение. Да оцветим шахматно всяка от стените на куба така, че на всяка стена да има 4 черни и 5 бели полета.



Ясно е, че прегънатите домино са тези, които покриват две едноцветни полета. Но белите полета на куба са с 6 повече от черните. Следователно домината, които покриват по две бели полета са с 3 повече от домината, които покриват две черни полета; съответно $x+3$ и x. Оттук получаваме, че броят на домината, които покриват едноцветни полета е $2x+3$, т.е. е нечетен.

Аналогично се разсъждава за куб с произволен нечетен ръб.

Задача 30. На дъската са записани числата $1, 2, \ldots, 20$. Разрешено е да се изберат две от тях и вместо тях да се запише разликата им (т.е. те се изтриват, а записваме числото, равно на по-голямото минус по-малкото). Забранено е на дъската да се появяват равни числа. Кое е най-малкото число, което може да остане последно?

Решение. Тъй като сумата на числата, записани на дъската, не си променя четността при описаната операция и е четна в началото, най-малката възможност за последното число е 2. Ще покажем, че е възможно да остане само 2. Отначало трием 1 и 2 и остава 1, трием 18 и 20 и остава 2, отново трием 1 и 2 и остава 1, трием 17 и 19 и остава 2. Сега имаме числата от 1 до 16. Продължаваме по същия начин, докато останем с числата 1, 2, 3 и 4. Сега от 1 и 2 остава 1, от 1 и 3 остава 2 и накрая от 2 и 4 остава 2.

ПРИНЦИП НА КРАЙНИЯ ЕЛЕМЕНТ

Методът на крайния елемент е често използван подход при решаване на задачи. Той се прилага, когато в условието са дадени числа, точки или други обекти, които не се различават, имат едни и същи свойства. Тогава е удобно да се разгледа или най-големият, или най-малкият, или най-левият и т.н. обект; в зависимост от задачата да се избере обект с някакво *крайно* свойство. Понякога, когато става дума за числа, е удобно не само да се избере най-голямото или най-малкото, а числата да се подредят по големина.

Задача 1. По окръжност са записани n числа, като всяко число е равно на средното аритметично на двете му съседни. Да се докаже, че всички числа са равни.

Решение. Тъй като числата са краен брой, можем да изберем най-голямото от тях (ако има няколко най-големи, избираме кое да е от тях). Ако избраното число е a, а двете му съседни са b и c, то от условието следва, че

$$a = \frac{b+c}{2} \Longleftrightarrow 2a = b + c. \tag{1}$$

Но поради избора на a като най-голямо число имаме

$$\left.\begin{aligned} a \geqq b \\ a \geqq c \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2a \geqq b + c.$$

Тогава равенството (1) е възможно само когато $a = b = c$.

Продължаваме по същия начин и получаваме, че съседните на b и c числа са равни на a, техните съседни са равни на a и т.н. Следователно всички числа по окръжността са равни.

Задача 2. В полетата на безрайна шахматна дъска са записани числа така, че всяко е равно на средноаритметичното на четирите си съседни. Докажете, че всички числа са равни.

Упътване. Нека a е най-малкото от всички числа, а b_1, b_2 , b_3 и b_4 са четирите му съседни числа. От условието следва, че

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \geq 4a = b_1 + b_2 + b_3 + b_4,$$

което е възможно само когато $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = a$.

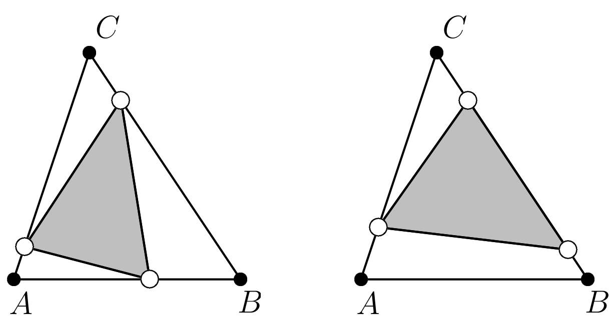
Задача 3. Върху права е дадено множество от точки M. Известно е, че всяка точка от M е среда на отсечка, чийто крайща са точки от M. Да се докаже, че множеството M е безкрайно.

Решение. Да допуснем, че множеството M не е безкрайно. Тогава можем да изберем най-дясната точка X от множеството M върху правата. Точката X не е вътрешна за никоя отсечка с краища в множеството M, следователно X не е среда на такава отсечка. Противоречие; следователно множеството M е безкрайно.

Задача 4. В равнината са дадени краен брой точки, оцветени в син или червен цвят така, че да има поне три точки от всеки цвят и никои три точки от един цвят да не лежат на една права. Докажете, че някои три точки от един и същ цвят образуват триъгъник, на чийто контур лежат не повече от две точки от другия цвят.

Решение. Да разгледаме множеството от триъгълниците с едноцветни върхове измежду дадените точки. Сред това крайно множество има триъгълник с най-малко лице. Тъй като никои три едноцветни точки не лежат на една права, най-малкото лице е по-голямо от 0. Да разгледаме един триъгълник с най-малко лице. Да означим върховете му с A, B и C и нека те са червени. Ще докажем, че по контура на триъгълника ABC лежат не повече от две сини точки.

Да допуснем противното; нека трите сини точки X, Y, Z лежат на контура на триъгълника ABC.



При всяко възможно разположение на X, Y, Z по страните на триъгълника ABC лицето на синия триъгълник XYZ е по-малко от лицето на ABC, което е противоречие с избора на ABC.

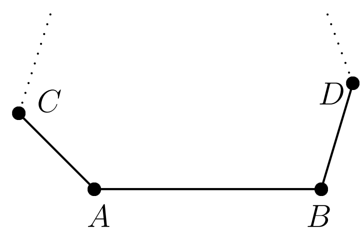
Следователно по контура на едноцветния триъгълник с минимално лице ABC лежат не повече от две сини точки.

Задача 5. Върху права са дадени краен брой отсечки, като всеки две отсечки имат обща точка. Да се докаже, че има точка, която е обща за всички отсечки.

Упътване. Нека най-левият от десните краища на дадените отсечки е A, а най-десният от левите краища на отсечките е B. Покажете, че отсечката AB е обща за всички дадени отсечки.

Задача 6. В равнната са отбелязани няколко точки (поне три), всеки две разстояния между които са различни. Всяка от тези точки е свързана с най-близката до нея. Може ли да се получи по този начин затворена начупена линия?

Решение. Да допуснем, че е възможно да се получи затворена начупена линия. Нека AB е най-голямата отсечка на тази линия, а AC и BD са съседните отсечки на AB. Тогава $AC < AB$, т.е. B не е най-близката до A точка, и $BD < AB$, т.е. A не е най-близката до B точка. Следователно точките A и B не са свързани. Противоречие.



Задача 7. На всяка от 15 планети, всеки две разстояния между които са различни, има астроном, който наблюдава най-близката до него планета. Докажете, че някоя от планетите не се наблюдава от никого.

Решение. Тъй като всеки от 15 астрономи наблюдава по една от 15 планети, ако някоя планета се наблюдава от двама астрономи, то има планета, която не се наблюдава от никого.

Да изберем планетите A и B на най-малко разстояние една от друга. Астрономът на A наблюдава B и астрономът на B наблюдава A. Ако дори и един астроном от останалите 13 планети наблюдава A или B, някоя планета ще остане без наблюдение. Затова да приемем, че нито един астроном от останалите 13 планети не наблюдава A или B. Тогава може да изключим A и B и да повторим разсъждението за останалите 13 планети: отново да изберем двете най-близки планети измежду тях и т.н. По този начин ще стигнем до една планета (тъй като 15 е нечетно число), която никой не наблюдава.

Задача 8. Да се докаже, че от седем **различни естествени** числа със сума 100 могат да се изберат три числа, чиято сума е не по-малка от 50.

Решение. Да подредим числата по големина $a_1 < a_2 < \cdots < a_7$ и да допуснем, че сборът на трите най-големи е по-малък от 50, т.е.

$$a_5 + a_6 + a_7 \leqq 49. \tag{2}$$

Тъй като сборът на всички числа е 100, сборът на останалите е по-голям от 50, т.е.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geqq 51. \tag{3}$$

(Използваме, че числата са естествени; затова *по-малко от 50* означава *по-малко или равно на 49.*)

От подредбата на числата и това, че са естествени, следва, че

$$a_5 \geqq a_4 + 1,$$

оттук

$$a_6 \geqq a_5 + 1 \geqq a_4 + 2,$$

$$a_7 \geqq a_6 + 1 \geqq a_4 + 3.$$

Като съберем трите еднопосочни неравенства получаваме

$$a_5 + a_6 + a_7 \geqq 3a_4 + 6.$$

От тук и (2) следва, че

$$3a_4 + 6 \leqq 49.$$

Оттук, тъй като a_4 е естествено число, следва, че $a_4 \leqq 14$.

Но тогава $a_3 \leqq 13$, $a_2 \leqq 12$ и $a_1 \leqq 11$. За сбора на четирите най-малки числа получаваме

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqq 11 + 12 + 13 + 14 = 50.$$

Получхме противочечие с (3).

Следователно допускането е невярно, т.е. сборът на трите най-големи числа е по-голям или равен на 50.

Задача 9. Сборът на 123 числа е 3813. Докажете, че могат да се изберат 100 от тези числа със сбор не по-малко от 3100.

Задача 10. Дадени са седем **естествени** числа, по-малки от 125. Да се докаже, че отношението на някои две от тях е в интервала от $\frac{1}{2}$ до 2.

Решение. Да подредим числата по големина

$$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq d \leqq e \leqq f \leqq g$$

и да допуснем, че всяко следващо число в редицата е повече от 2 пъти по-голямо от предишното. Получаваме последователно

$$\begin{array}{lll} a \geqq 1; & & \\ b > 2.1 = 2 & \Longrightarrow & b \geqq 3; \\ c > 2.3 = 6 & \Longrightarrow & c \geqq 7; \\ d > 2.7 = 14 & \Longrightarrow & d \geqq 15; \\ e > 2.15 = 30 & \Longrightarrow & e \geqq 31; \\ f > 2.31 = 62 & \Longrightarrow & f \geqq 63; \\ g > 2.63 = 126 & \Longrightarrow & g \geqq 127. \end{array}$$

Последното неравенство е в противоречие с условието, че дадените числа са по-малки от 125. Следователно някое от числата в редицата е не повече от 2 пъти по-голямо от предишното, т.е. отношението им е в интервала от 1 до 2.

Задача 11. Дадени са десет **естествени** числа, не по-големи от 91. Да се докаже, че отношението на някои две от тях е в интервала от $\frac{2}{3}$ до $\frac{3}{2}$.

Решение. Да подредим числата по големина $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{10}$ и да допуснем, че всяко от отношенията $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_{10}}{a_9}$ е по-голямо от $\frac{3}{2}$. Последователно получаваме

$$\begin{array}{ll} a_2 > \frac{3}{2}.a_1 \geqq 1,5 \Longrightarrow a_2 \geqq 2; & a_3 > \frac{3}{2}.2 = 3 \Longrightarrow a_3 \geqq 4; \\ a_4 > \frac{3}{2}.4 = 6 \Longrightarrow a_4 \geqq 7; & a_5 > \frac{3}{2}.7 = 10,5 \Longrightarrow a_5 \geqq 11; \\ a_6 > \frac{3}{2}.11 = 16,5 \Longrightarrow a_6 \geqq 17; & a_7 > \frac{3}{2}.17 = 25,5 \Longrightarrow a_7 \geqq 26; \\ a_8 > \frac{3}{2}.26 = 39 \Longrightarrow a_8 \geqq 40; & a_9 > \frac{3}{2}.40 = 60 \Longrightarrow a_9 \geqq 61; \\ a_{10} > \frac{3}{2}.61 = 91,5 \Longrightarrow a_{10} \geqq 92, & \text{противоречие.} \end{array}$$

Задача 12. Войници са подредени в две редици по n човека така, че всеки от първата редица е не по-висок от стоящия зад него войник от втората редица. Във всяка от редиците войниците се наредили по ръст. Докажете, че и след това всеки от първата редица ще е не по-висок от стоящия зад него войник от втората редица.

Решение. Да означим с $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ ръста на войниците от първата редица, а с $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ ръста на войниците от втората редица.

Да допуснем, че след пренареждането някой от първата редица е по-висок от стоящия зад него войник от втората редица, т.е. за някое k е в сила неравенството $a_k > b_k$.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 \geqq & a_2 \geqq & \cdots & a_{k-1} \geqq & a_k \geqq & \cdots & \geqq a_n \\ & & & & \vee & & \\ b_1 \geqq & b_2 \geqq & \cdots & b_{k-1} \geqq & b_k \geqq & \cdots & \geqq b_n \end{array}$$

Това означава, че преди пренареждането войникът с ръст a_k е стоял пред някой от по-високите от b_k войници на втория ред, т.е. пред някой от $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ (които са $k-1$ войници). Но и по-високите от a_k войници $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ трябва да са били пред някой от $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$. Получихме, че преди пренареждането всичките k войници $a_1, a_2, \ldots, a_k$ трябва да са стояли пред някой от войниците $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$, които са $k-1$ на брой. Противоречие.

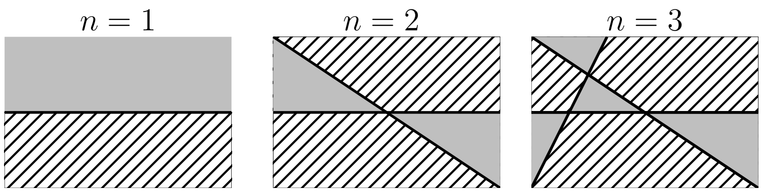
Задача 13. В кръгов турнир участвали 8 тенисисти. Докажете, че могат да се изберат 4 от тях, A, B, C, D, така, че A да е победил B, C, D; B да е победил C и D; и C да е победил D.

Решение. Нека A е тенисистът с най-много победи (или е един от спечелилите най-много победи). Той е спечелил поне 4 победи (защото общият брой победи е $8.7 : 2 = 28$ и $28 : 8 = 3,5$). Да разгледаме мачовете между тези четири тенисисти, които са победени от A. Един от тях, например B е спечелил поне две победи (защото между четирима се изиграват 6 мача и се поделят 6 победи). В мача между двамата, победени от B, единият – C, е победил другия (D).

МАТЕМАТИЧЕСКА ИНДУКЦИЯ

Задача 1. Равнината е разделена на области с n прави, никои три от които не се пресичат в една точка. Да се докаже, че частите могат да се оцветят в два цвята така, че всеки две съседни области да са разноцветни.

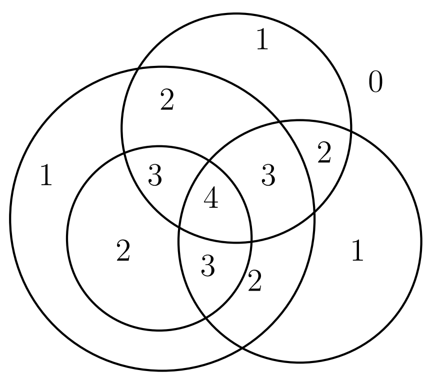
Решение. Ако правата е само една, т.е. $n = 1$, твърдението е очевидно. Да тръгнем от това оцветяване и да построим още една права, т.е. да разгледаме случая $n = 2$. Като сменим цвета на областите от едната страна на новата права, получаваме търсеното оцветяване. Едно от възможните положения на втората права е показано на чертежа.



Като имаме оцветяването за две прави, ако построим трета и сменим цвета на всички части от едната ѝ страна, получаваме оцветяване в случая $n = 3$. Породължавайки по този начин, за всяко n може да оцветим частите в два цвята така, че съседните области да са разноцветни.

Задача 2. Равнината е разделена на области с n окръжности. Да се докаже, че частите могат да се оцветят в два цвята така, че всеки две съседни области да са разноцветни.

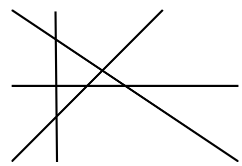
Решение. Може да конструираме *шахматно* оцветяване по индукция, както в задача 1 (опитайте!). Друг начин е да запишем във всяка област броя на окръжностите, в които тя се намира и след това да оцветим в единия цвят областите с четни числа, а в другия цвят – областите с нечетни числа.



Задача 3. Най-много на колко части се разделя равнината от n прави?

Решение. Нека с $S(n)$ означим максималния брой части, на които се разделя равнината от n прави. Ясно е, че $S(1) = 2$, $S(2) = 4$, $S(3) = 7$ (вх. чертежа от задача 1) и може да намерим, че

$$S(4) = 11.$$



Забелязваме, че броят на частите се увеличава с 2, после с 3, с 4 и т.н.

n	1	**2**	**3**	**4**
$S(n)$	2	4	7	11

$$\overrightarrow{+\mathbf{2}} \quad \overrightarrow{+\mathbf{3}} \quad \overrightarrow{+\mathbf{4}}$$

Може да предположим, че $S(n) = S(n-1) + n$. Това наистина е така, защото n-тата права прибавя най-много нови области, когато пресича всяка от останалите $n-1$ прави. При това пресичане n-тата права се разделя от $n-1$ пресечни точки на n части, всяка от които разделя някоя област на две. Следователно с построяването на n-тата права, броят на областите се увеличава най-много с n.

Като използваме зависимостта $S(n) = S(n-1) + n$, намираме

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n = \\ &= S(n-2) + (n-1) + n = \\ &\quad \dots \\ &= S(1) + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \\ &= 2 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \\ &= 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Задача 4. Най-много на колко части се разделя равнината от n окръжности?

Упътване. Ако $S(n)$ е максималният брой части, на които n окръжности разделят равнината, то $S(n) = S(n-1)+2(n-1)$. Докажете, че $S(n) = n(n-1)+2$.

Задача 5. Върховете на изпъкнал многоъгълник са оцветени в три цвята така, че всеки цвят присъства и никои два съседни върха не са едноцветни. Докажете, че многоъгълникът може да се раздели на триъгълници с диагонали така, че върховете на всеки от тези триъгълници да са оцветени в три различни цвята.

Решение. Нека върховете са оцветени в син, червен и зелен цвят.

Първо ще докажем, че има три поредни върха на многоъгълника, оцветени в три различни цвята.

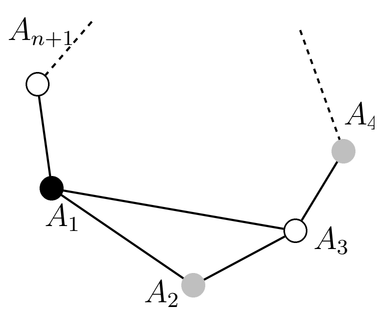
Да допуснем противното, т.е. че няма три поредни разноцветни върха. Нека върхът A_1 е син, а A_2 е червен. Според допускането върхът A_3 не е зелен (иначе A_1, A_2, A_3 са три поредни разноцветни върха), т.е. A_3 е отново син. Нататък цветовете се редуват: син, червен, син, червен и т.н. Това противоречи на условието, че многоъгълникът има и зелен врър. Следователно многоъгълникът има три поредни разноцветни върха.

Сега ще докажем по индукция твърдението на задачата.

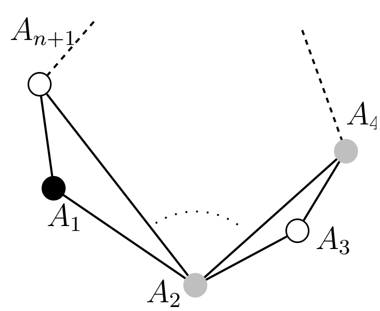
Ако многоъгълникът е триъгълник, твърдението е очевидно.

Да допуснем, че всеки n-ъгълник, чиито върхове са оцветени според условието, може да се раздели с диагонали на триъгълници, всеки от които има три разноцветни върха.

Да разгледаме $(n+1)$-ъгълник $A_1A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}$, чиито върхове са оцветени в три различни цвята и всеки два съседни върха са разноцветни.



Фиг. 1

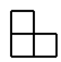


Фиг. 2

Както доказахме в началото, има три поредни разноцветни върха на многоъгълника; нека те са A_1, A_2, A_3. Да построим диагонала A_1A_3. Той разделя многоъгълника $A_1A_2A_3 \ldots A_nA_{n+1}$ на разноцветния триъгълник $A_1A_2A_3$ и на n-ъгълника $A_1A_3 \ldots A_nA_{n+1}$.

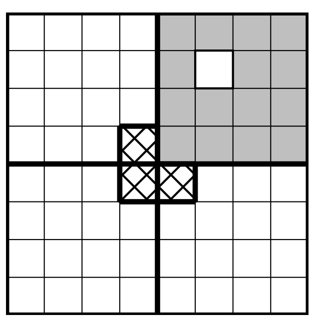
Всеки два съседни върха на n-ъгълника $A_1A_3 \ldots A_nA_{n+1}$ са разноцветни и ако са представени и трите цвята, от индукционното допускане следва, че $A_1A_3 \ldots A_nA_{n+1}$ може да се раздели с диагонали на триъгълници с разноцветни върхове (фиг. 1).

Ако върховете на $A_1A_3 \ldots A_nA_{n+1}$ са оцветени в два цвята, то A_2 е единственият връх на дадения $n+1$-ъгълник, оцветен в третия цвят. Тогава като построим всички диагонали през A_2, ще получим търсеното разделяне (фиг. 2).

Задача 6. Докажете, че квадрат 2^n х 2^n, от които е изрязано едно квадратче, може да се покрие с .

Решение. За квадрат със страна 2 твърдението е вярно. Да допуснем, че всеки квадрат със страна 2^n с едно изрязано квадратче може да се покрие с ъгълчета.

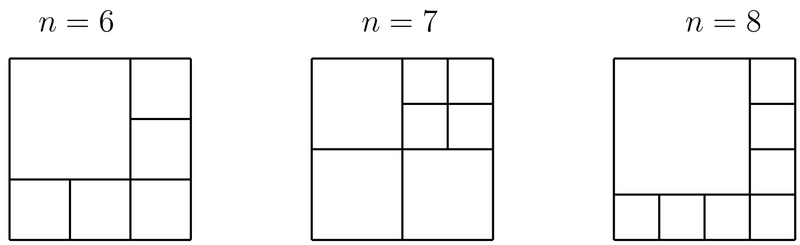
Ще покажем, че тогава квадрат със страна 2^{n+1} с едно изрязано квадратче също може да се покрие с ъгълчета. Разделяме квадрата със страна 2^{n+1} на четири квадрата със страна 2^n. Изрязаното квадратче попада в един от тях (оцветеният на чертежа), който според индукционното допускане може да покрием с ъгълчета.



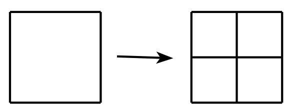
Поставяме следващото ъгълче в центъра така, че да не засяга вече покрития квадрат със страна 2^n (на чертежа то е защриховано). Това ъгълче покрива по едно квадратче във всеки от останалите три квадрата със страна 2^n, следователно всеки от тях според индукционното допускане может да се покрие с ъгълчета.

Задача 7. Докажете, че квадрат може да се разреже на n квадрата за всяко $n \geq 6$.

Решение. Не е трудно да разрежем квадрат на 6 квадрата, на 7 квадрата и на 8 квадрата.



Освен това забелязваме, че при разрязване на квадрат на 4 квадрата, общия брой на квадратите се увеличава с 3.



Тази операция позволява от разрязване на n квадрата да се получи разрязване на $n+3$ квадрата. По този начин

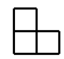
- от разрязването на 6 квадрата може да се получи разрязване на 9, 12, 15, $\ldots, 6+3.k$ квадрата;
- от разрязването на 7 квадрата може да се получи разрязване на 10, 13, 16, $\ldots, 7+3.k$ квадрата;
- от разрязването на 8 квадрата може да се получи разрязване на 11, 14, 17, $\ldots, 8+3.k$ квадрата.

Следователно квадрат може да се разреже на n квадрата за всяко $n \geq 6$.

Задача 8. Докажете, че равностранен триъгълник може да се разреже на n равностранни триъгълника за всяко $n \geq 6$.

Задача 9. Да се докаже, че всяко естествено число, по-голямо от 7, може да се представи във вида $3a + 5b$, където a, b са естествени числа или 0.

Упътване. От представянията на три поредни числа $8 = 3.1+5.1$, $9 = 3.3 + 5.0$ и $10 = 3.0 + 5.2$ с прибавяне на $3.k$ може да се получат представяния на $8+3.k$, $9+3.k$, $10+3.k$, т.е. на всички по-големи от 7 естествени числа.

Задача 10. Даден е правоъгълник $m \times n$, като $m, n > 1$. Да се докаже, че правоъгълникът може да се нареже на ъгълчета , ако:

а) $3/m$, $2/n$;

б) $6/m$, $n > 1$ – нечетно;

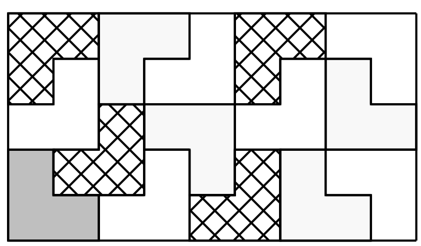
в) $m = 9$, $n = 5$;

г) $3/mn$ и $m, n > 3$.

Упътване. а) В този случай правоъгълникът може да се нареже на правоъгълници 2×3, всеки от които се състои от две ъгълчета.

б) В случая правоъгълникът се състои от два правоъгълника $m\times 3$ и $m\times(n-3)$, всеки от които има една четна и една кратна на 3 страна, т.е. според а) може да се нареже на ъгълчета.

в) Пример за разрязване на този правоъгълник е показан на чертежа.



г) Ако m или n е четно, твърдението следва от а) и б). Ако m и n са нечетни и $3/m$, правоъгълникът се състои от три правоъгълника: 9×5, $(m-9) \times n$ и $9 \times (n-5)$, всеки от които може да се нареже на ъгълчета.

ДЕЛИМОСТ

Задача 1. Да се намери най-малкото естествено число, което има толкова делители, колкото числото 2016.

Решение. Първо ще намерим броя на делителите на 2016. Тъй като

$$2016 = 2.2.2.2.2.3.3.7,$$

в разлагането на делител на 2016 може да има най-много пет множителя 2, не повече от два множителя 3 и най-много един множител 7. Следователно броят на 2 може да се избере по **шест** начина (5, 4, 3, 2, 1 или 0, т.е. николко), броят на 3 — по **три** начина (2, 1 или 0), а броят на 7 — по **два** начина (1 или 0). По този начин могат да се образуват $6.3.2 = 36$ делителя. Числата с точно 36 делители имат някое от показаните в лявата колона на таблицата разлагания.

Разлагане	Най-малко число
$\underbrace{p \dots p}_{35}$	2^{35}
$p.\underbrace{q.q.\dots.q}_{17}$ (броят на делителите е $2.18 = 36$)	$2^{17}.3$
$\underbrace{p.p}_{2}.\underbrace{q.q.\dots.q}_{11}$ (броят на делителите е $3.12 = 36$)	$2^{11}.3^2$
$\underbrace{p.p.p}_{3}.\underbrace{q.q.\dots.q}_{8}$ (броят на делителите е $4.9 = 36$)	$2^8.3^3 = 6912$
$\underbrace{p.p.p.p.p}_{5}.\underbrace{q.q.q.q.q}_{5}$ (броят на делителите е $6.6 = 36$)	$2^5.3^5 = 7776$
$p.q.\underbrace{r.r.\dots.r}_{8}$ (броят на делителите е $2.2.9 = 36$)	$2^8.3.5 = 3840$
$p.\underbrace{q.q}_{2}.\underbrace{r.r.r.r.r}_{5}$ (броят на делителите е $2.3.6 = 36$)	$2^5.3^2.5 = 1440$
$\underbrace{p.p}_{2}.\underbrace{q.q}_{2}.\underbrace{r.r.r}_{3}$ (броят на делителите е $3.3.4 = 36$)	$2^3.3^2.5^2 = 1800$
$p.q.\underbrace{r.r}_{2}.\underbrace{s.s}_{2}$ (броят на делителите е $2.2.3.3 = 36$)	$2^2.3^2.5.7 = \mathbf{1260}$

(Числата p, q, r и s са различни и прости.) Най-малките числа от съответния вид са в дясната колона; най-малко сред тях е числото 1260.

Задача 2. Да се намери естествено число, което се дели на 5 и на 9 и има точно 10 делители.

Решение. Нека търсеното число е n. Тъй като n се дели на 5 и $9 = 3.3$, разлагането му на прости множители включва 3.3.5.

От друга страна, числата с точно 10 делители имат някое от следните разлагания на прости множители

- $\underbrace{p.p.p.p.p.p.p.p.p}_{9} = p^9$;
- $p.\underbrace{q.q.q.q}_{4} = p.q^4$ (броят на делителите е $2.5 = 10$),

където p и q са различни прости числа. Тъй като в разлагането на n участват поне две прости числа (5 и 3), първият случай отпада. Следователно $n = 5.3^4 = 405$.

Задача 3. Произведението на естествените числа от 1 до n се означава с $n!$. Например, $5! = 1.2.3.4.5 = 120$. Да се намери броят на делителите на $17!$.

Решение. В разлагането на $17!$ числото 2 участва на степен

$$\left[\frac{17}{2}\right] + \left[\frac{17}{4}\right] + \left[\frac{17}{8}\right] + \left[\frac{17}{16}\right] = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

(с $[x]$ означаваме цялата част на числото x). Степента на 3 в разлагането на $17!$ е

$$\left[\frac{17}{3}\right] + \left[\frac{17}{9}\right] = 5 + 1 = 6;$$

простото число 5 участва в разлагането на $17!$ три пъти (по веднъж от 5, 10 и 15), а 7 – два пъти (от 7 и 14). Простите числа от 11 до 17 участват в разлагането на $17!$ по веднъж. Получихме, че

$$17! = 2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13.17.$$

Следователно $17!$ има $16.7.4.3.2.2.2 = 10752$ делители.

Задача 4. Колко са естествените числа n, за които дробта $\dfrac{1620}{n}$ е равна на естествено число?

Задача 5. Ако $n = \underbrace{7\ldots7}_{11}.\underbrace{11\ldots11}_{7} = 7^{11}.11^7$, кое от числата n, $7.n$, $11.n$ и $17.n$ има най-много делители?

Задача 6. Колко естествени числа са делители на точно две от числата 800, 960, 1200?

Решение. Имаме $800 = 2^5.5^2$, $960 = 2^6.3.5$ и $1200 = 2^4.3.5^2$.

Общите делители на 960 и 1200 са делителите на $\text{НОД}(960, 1200) = 2^4.3.5$, а те са $5.2.2 = 20$.

Общите делители на 800 и 960 са делителите на $\text{НОД}(800, 960) = 2^5.5$, а те са $6.2 = 12$.

Общите делители на 800 и 1200 са делителите на $\text{НОД}(800, 1200) = 2^4.5^2$ и са $5.3 = 15$.

Делителите и на трите числа са делителите на $\text{НОД}(800, 960, 1200)$, т.е. на $2^4.5$ и са $5.2 = 10$.

Броят на естествените числа, които са общи делители на точно две от дадените числа, е $(20 + 12 + 15) - 3.10 = 17$.

Задача 7. Пламен намислил 8 естествени числа, никои две от които не са взаимнопрости. Най-малкото общо кратно на осемте числа е 210, а произведението им не е точен квадрат и се дели на 1920. Кои числа е намислил Пламен?

Решение. Тъй като най-малкото общо кратно на осемте числа е $210 = 2.3.5.7$, в разлагането на всяко от тях има най-много една 2. Произведението на осемте числа се дели на $1920 = 2.2.2.2.2.2.2.3.5$. Следователно поне седем числа се делят на 2.

Ако всички числа се делят на 2, числата са

$$2, 2.3, 2.5, 2.7, 2.3.5, 2.5.7, 2.3.7, 2.3.5.7$$

и произведението им е $2^8.3^4.5^4.7^4 = (2^4.3^2.5^2.7^2)^2$ и е точен квадрат.

Ако точно седем числа се делят на 2, числата са

$$2.3, 2.5, 2.7, 2.3.5, 2.5.7, 2.3.7, 2.3.5.7, 3.5.7.$$

Произведението им не е точен квадрат; това са търсените числа.

Задача 8. Колко са естествените числа N със свойството: най-малкият делител на N (различен от 1) е 77 пъти по-малък от най-големия негов делител (различен от N)?

Решение. Делителите на едно число, различни от 1 и самото число, се наричат негови *същински* делители. Ясно е, че най-малкият същински делител е просто число. Всяко число е равно на произведението на най-малкия и най-големия от същинските си делители.

Тъй като най-големият същински делител на N се дели на 77, то N се дели на 7. Следователно най-малкият същински делител на N е просто число, не по-голямо от 7, т.е. $2, 3, 5$ или 7.

Когато най-малкият същински делител е равен на:

- 2, най-големият същински делител е 2.77, а $N = 2.2.77 = 308$;
- 3, най-големият същински делител е 3.77, а $N = 3.3.77 = 693$;
- 5, най-големият същински делител е 5.77, а $N = 5.5.77 = 1925$;
- 7, най-големият същински делител е 7.77, а $N = 7.7.77 = 3773$.

Получихме четири числа с даденото свойство: $308, 693, 1925, 3773$.

* * *

В някои задачи е полезно да се използва следното твърдение.

> *Ако d/a и d/b, то $d/k.a \pm l.b$. където k и l са произволни естествени числа.*

Задача 9. Да се докаже, че дробта $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ е несъкратима за всяко естествено число n.

Решение. Нека означим с d най-големия общ делител на $30n + 2$ и $12n + 1$. Тогава

$$d/5.(12n + 1) - 2.(30n + 2) = 60n + 5 - (60n + 4) = 1,$$

т.е. $d = 1$. Това означава, че числителят и знаменателят са взаимнопрости и дробта е несъкратима за всяко естествено число n.

Задача 10. Ако a е естествено число, на колко може да е равен най-големият общ делител на числата $2.a+3$ и $3.a+5$?

Задача 11. Да се докаже, че за всяко естествено число n дробта $\dfrac{12.n+1}{20.n+2}$ е несъкратима.

Задача 12. Колко са естествените числа n, за които $\dfrac{2.n+40}{n+2}$ е също естествено число?

Задача 13. Да се докаже, че най-големият общ делител на естествените числа a и b е равен на най-големия общ делител на $5.a+3.b$ и $13.a+8.b$.

Задача 14. [HMMT 2002] Да се намери най-големият общ делител на безкрайната редица числа

$$2002+2,\quad 2002^2+2,\quad 2002^3+2,\dots$$

Решение. Да означим търсения делител с d. Забелязваме, че всички числа в редицата са четни, следователно d е четно число.

От първите две числа в редицата имаме $d/2002+2$ и $d/2002^2+2$. Второто число е приблизително 2000 пъти по-голямо от първото и имаме

$$d/(2002^2+2)-2000(2002+2)=2002.2002+2-2000.2002-4000=6.$$

Получихме, че d е делител на 6. Тъй като вече отбелязахме, че числата в редицата са четни, остава да проверим дали 3 е техен общ делител.

Тъй като 2002 дава остатък 1 при деление на 3, то за всяко естествено число n и 2002^n дава остатък 1 при деление на 3. Тогава 2002^n+2 се дели на 3, т.е. 3 е общ делител на числата в редицата.

Така получихме, че $d=6$.

Задача 15. Да се намери най-големият общ делител на

$$\underbrace{111\dots111}_{100} \text{ и } \underbrace{111\dots111}_{60}$$

(числата, записани съответно със 100 и с 60 единици).

Задача 16. Да се намери най-големият общ делител на $100! + 1$ и $101! + 1$.

Задача 17. Известно е, че 2^{29} е деветцифрено число, всички цифри на което са различни. Коя от десетте цифри не участва в записа на това число?

Решение. Едно число се дели на 9, точно когато сборът от цифрите му се дели на 9. Нещо повече, остатъкът на едно число при деление на 9 е равен на остатъка на сбора на цифрите му при деление на 9.

Да разгледаме остатъка на даденото число при деление на 9. Тъй като $2^6 = 2.2.2.2.2.2 = 64$ дава остатък 1 при деление на 9, да запишем произведението на 29-те двойки по следния начин:

$$2^{29} = 2^6.2^6.2^6.2^6.2^5 = 64.64.64.64.32.$$

Остатъкът на 2^{29} при деление на 9 е равен на $1.1.1.1.5 = 5$ (т.е. на остатъка на 32 при деление на 9).

Сборът на цифрите от 0 до 9 е 45. Ако липсващата цифра е n, то сборът от цифрите на 2^{29} е равен на $45-n$. Следователно $45-n$ дава остатък 5 при деление на 9. Оттук намираме $n = 4$.

(Това не е трудно и да се провери, $2^{29} = 536870912$.)

Задача 18. Възможно ли е естествените числа от 1 до 2004 да се подредят в редица така, че сборът на всеки десет поредни в тази редица числа да се дели на 10?

Решение. Да допуснем, че такова подреждане е възможно и да заменим всяко число в редицата с неговия остатък при деление на 10.

Сборът на всеки десет поредни остатъка се дели на 10. Тъй като сборът на първите десет се дели на 10 и сборът на остатъците от втория до 11-тия също се дели на 10, то 11-тия остатък е равен на първия.

По същия начин, 12-тия е равен на втория и т.н., 21-ия е равен на 11-тия, а значи и на втория и т.н. Това означава, че само първите десет остатъка се срещат в редицата и следователно първите десет остатъка, в някакъв ред, са $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Но тогава сборът на първите десет числа дава остатък $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, т.е. 5 при деление на 10. Противоречие. Следователно такова нареждане е невъзможно.

Задача 19. В полетата на таблица 22×22 по произволен начин са записани числата $1, 2, 3, \ldots, 484$. Да се докаже, че съществуват две полета с обща страна или общ връх, за които сборът на записаните в тях числа се дели на 4.

Решение. Измежду записаните числа всеки остатък при деление на 4 $(0, 1, 2, 3)$ се среща по $484 : 4 = 121$ пъти.

Да допуснем, че няма съседни числа с картен на 4 сбор.

Да разделим таблицата на 121 квадрата със страна 2. Всеки две полета в такъв квадрат са съседни, следователно в един квадрат има най-много едно число, което дава остатък 0 при деление на 4. (Ако има две кратни на 4, то и сборът им ще се дели на 4.)

По същата причина, в един квадрат 2×2 не може да има две числа, даващи остатък 2 при деление на 4, защото тогава сборът $(4k + 2) + (4l + 2) = 4k + 4l + 4$ ще е кратен на 4.

Тъй като числата, даващи остатък 0 са точно 121, то във всеки квадрат има едно число, даващо остатък 0 при деление на 4. По същия начин, във всеки квадрат има едно число, даващо остатък 2 при деление на 4.

В останалите две полета на един от квадратите 2×2 не може да има число, даващо остатък 1 и число, даващо остатък 3 при деление на 4, защото тогава сборът $(4k+1)+(4l+3) = 4k+4l+4$ ще е кратен на 4. Следователно във всеки квадрат 2×2 има или две числа, даващи остатък 1 при деление на 4, или няма такива числа. Така получаваме, че в цялата таблица броят на числата, даващи остатък 1 при деление на 4, е четен. Но този брой е 121, противоречие.

Следователно съществуват две полета с обща страна или общ връх, за които сборът на записаните в тях числа се дели на 4.

Задача 20. Числата p, $2p + 1$ и $4p + 1$ са прости. Да се намери p.

Решение. Ако $p = 3$, числата $2.3+1 = 7$ и $4.3+1 = 13$ също са прости.

Ако p не е 3, то p дава остатък 1 или 2 при деление на 3.

Ако p дава остатък 1 при деление на 3, то $2p+1$ се дели на 3. Тъй като $2p + 1$ е просто, то $2p + 1 = 3$. Оттук получаваме $p = 1$, което не е просто число.

Ако p дава остатък 2 при деление на 3, то $4p+1$ се дели на 3. Тъй като $4p + 1$ е просто, то $4p + 1 = 3$, което е невъзможно.

* * *

Числата от вида $n.n = n^2$, където n е естествено число, се наричат **точни квадрати**. Първите 10 точни квадрата са

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.$$

Последните им цифри са 0, 1, 4, 5, 6 и 9 и е ясно, че това са последните цифри на всички точни квадрати.

Задача 21. Да се докаже, че точните квадрати дават остатък 0, 1 или 4 при деление на 8.

Решение. Да разгледаме възможните остатъци при деление на 8 на произволно число a и пресметнем остатъка на неговия квадрат a^2 при деление на 8:

остатък на a при деление на 8	0	1	2	3	4	5	6	7
остатък на a^2 при деление на 8	0	1	4	1	0	1	4	1

От таблицата виждаме, че квадратът a^2 дава остатък 0, 1 или 4 при деление на 8.

Можем да кажем, че точните квадрати са от вида $8k$, $8k+1$ или $8k+4$.

Забележка. От доказаното свойство следва, например, че никое число от вида $8k+7$ не е точен квадрат, както и че няма точен квадрат, който завършва на 006, например.

Задача 22. За кои стойности на k числото, записано с k единици $\underbrace{11...1}_{k}$ е точен квадрат?

Задача 23. а) Да се докаже, че точните квадрати дават остатък 0 или 1 при деление на 3.

б) Да се докаже, че ако числото $n > 3$ е просто, то $n^2 + 2$ се дели на 3.

Задача 24. Възможно ли е петцифрено число, в чийто запис участват различни четни цифри, да е точен квадрат?

Упътване. Разгледайте остатъците при деление на 3.

Задача 25. Съществуват ли стойности на k, за които числото

$$2\underbrace{0...0}_{k}2004$$

е точен квадрат?

Упътване. Не, защото числото се дели на 3, но не на 9.

Задача 26. Ако числата p и p^2+2 са прости, да се докаже, че и p^3+2 е просто.

Задача 27. Нека n е естествено число, за което всяко от числата $2n+1$ и $3n+1$ е точен квадрат. Да се докаже, че n се дели на 40.

Решение. Последната цифра на число, което е точен квадрат, може да е 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Да разгледаме възможностите за последна цифра на n и във всеки от случаите да намерим последната цифра на $2n+1$ и $3n+1$:

последна цифра на n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
последна цифра на $2n+1$	1	3	5	7	9	1	3	5	7	9
последна цифра на $3n+1$	1	4	7	0	3	6	9	2	5	8

Виждаме, че числата $2n+1$ и $3n+1$ едновременно имат последна цифра 0, 1, 4, 5, 6 или 9 само когато n завършва на 0 или 5. Следователно n се дели на 5.

Както доказахме в задача 21, точните квадрати при деление на 8 дават остатък 1, 4 или 0. Да разгледаме възможните остатъци на n при деление на 8 и във всеки от случаите да намерим остатъка при деление на 8 на $2n+1$ и $3n+1$:

остатък на n при деление на 8	0	1	2	3	4	5	6	7
остатък на $2n+1$ при деление на 8	1	3	5	7	1	3	5	7
остатък на $3n+1$ при деление на 8	1	4	7	2	5	0	3	6

Виждаме, че числата $2n+1$ и $3n+1$ едновременно дават остатък 1, 4 или 0 при деление на 8 само когато n се дели на 8.

Така получихме, че n се дели на 5 и на 8, следователно и на 40.

Задача 28. Числата p, p^2+4 и p^2+6 са прости. Да се намери p.

Упътване. Докажете, че точните квадрати дават остатък 0, 1 или 4 при деление на 5. Разгледайте остатъците, които може да дават p^2+4 и p^2+6 при деление на 5.

Задача 29. Да се докаже, че едно число е точен квадрат тогава и само тогава, когато има нечетен брой делители.

Задача 30. Петър подредил всички карти от една боя в редица: първо асо, после 2, 3 и т.н., накрая вале, дама и поп. Започвайки с първата, преобърнал всички карти. След това, започвайки с втората, преобърнал всяка втора карта. После, започвайки с третата, преобърнал всяка трета карта и т.н. При 13-тото минаване преобърнал 13-тата карта. Кои карти са се оказали с лицето нагоре?

Задача 31. Числото N има точно два прости делители.

а) Ако N има 9 делители, колко делители има N^2?

б) Ако N^2 има 27 делители, колко са делителите на N?

Задача 32. Нека d е естествено число, различно от 2, 5 и 13. Да се докаже, че от множеството $\{2, 5, 13, d\}$ могат да се изберат две различни числа a и b така, че $a.b-1$ да не е точен квадрат.

Решение. Ще докажем, че за всяко естествено число d поне едно от числата $2.d-1$, $5.d-1$ и $13.d-1$ не е точен квадрат.

Да допуснем, че $2d-1$ е точен квадрат. Точните квадрати дават остатък 0, 1, 4, или 9 при деление на 16. Тъй като $2d-1$ е нечетно число, получаваме, че $2d-1$ дава остатък 1 или 9 при деление на 16.

Това е изпълнено, когато d дава остатък 1, 5, 9 или 13 при деление на 16.

Но когато d дава остатък 1 (или 13) при деление на 16, то $13d-1$ дава остатък 12 (или 8), значи $13d-1$ не е точен квадрат. Ако пък d дава остатък 5 (или 9) при деление на 16, то $5d-1$ дава остатък 8 (или 12), значи $5d-1$ не е точен квадрат.

Виждаме, че не е възможно $5d-1$ и $13d-1$ едновременно да са точни квадрати, т.е. едновременно да дават остатък 0, 1, 4 или 9 при деление на 16.

Следователно поне едно от числата $2.d-1$, $5.d-1$ и $13.d-1$ не е точен квадрат, което трябваше да докажем.

Задача 33. Ирина нарязала квадрат със страна 180 см на квадрати със страна n см, където n е естествено число, по-голямо от 1. Теодора нарязала квадрат със страна 204 см на квадрати със страна $n+5$ см. И в двата случая не останали изрезки. Общо колко квадрата са изрязали двете момичета?

Решение. Числото n е делител на $180 = 2^2.3^2.5$, а $n+5$ е делител на $204 = 2^2.3.17$.

Ако n се дели на 5, то и $n+5$ се дели на 5 и не може да е делител на 204. Следователно n не се дели на 5, т.е. n е делител на $2^2.3^2$. Тъй като n е по-голямо от 1, възможностите за n са $2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$. За $n+5$ получаваме съответно $7, 8, 9, 11, 14, 17, 23, 41$. От последните числа само 17 е делител на 204, следователно $n = 12$.

Получаваме, че Ирина е изрязала $(180 : 12)^2 = 225$ квадрата, а Теодора е изрязала $(204 : 17)^2 = 1296$ квадрата; общо 1521 квадрата.

Задача 34. Да се намерят x и y, ако:

- Произведението на 3 и x, намалено с 1, се дели на y.
- Произведението на 3 и y, намалено с 1, се дели на x.
- Произведението на x и y, намалено с 1, се дели на 3.

Упътване. Докажете, че xy дели $3x + 3y - 1$.

Задача 35. Правоъгълник $m \times n$ е разделен на единични квадратчета. Колко квадратчета пресича диагоналът на правоъгълника, ако:

а) $m = 8$, $n = 9$;

б) m и n са взаимнопрости;

в) $m = 8$, $n = 10$;

г) НОД$(m; n) = d$.

Упътване. г) Търсеният брой е $m + n - d$.

Задача 36. От долния ляв ъгъл на правпъгълна маса $m \times n$ е пусната билярдна топка под ъгъл $45°$. Колко удара ще направи топката, преди да стигне друг ъгъл? (Без да броим попадането в ъгъла.)

Упътване. Ако НОД$(m; n) = d$, търсеният брой е $\dfrac{m}{d} + \dfrac{n}{d} - 2$.