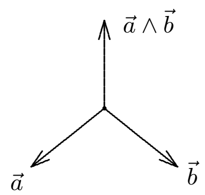
Ориентирано лице

При решаване на някои задачи от математически състезания е полезно да се познава понятието векторно произведение и неговите свойства. В други случаи, вместо да се разглеждат поотделно възможните разположения на геометричните елементи, е подходящо да се използва ориентирано лице. Особено интересно твърдение е в сила за конфигурация с подобни, различно ориентирани триъгълници.

Векторното произведение на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, означавано с $\vec{a} \wedge \vec{b}$, се дефинира като вектора

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\angle(\vec{a},\vec{b})\vec{e},$$

където $\vec{e}$ е единичният вектор, перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и образуващ с тях дясна тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b})$ (фиг. 1).



Фигура 1.

Когато векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, $\vec{e}$ не е дефиниран, но в този случай $\sin\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$ и $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{0}$. Нещо повече, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не са нулеви, то $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{0}$ само когато $\sin\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$, т.е. $a||b$. В частност, $\vec{a}\wedge\vec{a} = \vec{0}$. Ще използваме следните свойства на векторното произведение:

(1) $\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{b}\wedge\vec{a}$ (тъй като $\sin\angle(\vec{a},\vec{b}) = -\sin\angle(\vec{b},\vec{a})$);

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{c} + \vec{b}\wedge\vec{c}$;

(3) $(k\vec{a})\wedge\vec{b} = k\vec{a}\wedge\vec{b}$;

(4) Лицето на $\triangle A_1A_2A_3$ е равно на $\dfrac{1}{2}\mid \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} \mid$.

Когато разглежданите вектори лежат в дадена равнина α, векторните произведения са перпендикулярни на α и следователно еднопосочни или противопосочни с избран нормален вектор $\vec{e}$. За триъгълник $A_1A_2A_3$ в равнината α дефинираме **ориентирано лице** като

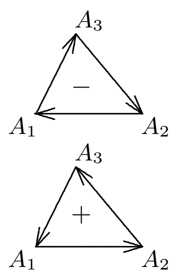
$$[A_1A_2A_3] = \varepsilon\frac{\mid \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} \mid}{2},$$

където $\varepsilon = \begin{cases} \ \ 1, & \text{когато } \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} \text{ е еднопосочен с } \vec{e}, \\ -1, & \text{в обратен случай.} \end{cases}$

От свойства (1) и (4) следват равенствата

$$\begin{aligned} &[A_1A_2A_3] = [A_2A_3A_1] = [A_3A_1A_2] = \\ = -\ &[A_1A_3A_2] = -[A_3A_2A_1] = -[A_2A_1A_3]. \end{aligned}$$

Иначе казано, знакът на ориентираното лице зависи от посоката, в която се обхожда границата на триъгълника (фиг. 2).



Фигура 2.

Основни свойства, свързани с ориентирано лице са:

(5) $[A_1A_2A_3] = [OA_1A_2] + [OA_2A_3] + [OA_3A_1]$, където O е произволна точка;

(6) Ако $A_3 \in BC$ и $\overline{BA_3} : \overline{A_3C} = q : p$, то $[A_1A_2A_3] = \dfrac{p\,[A_1A_2B] + q\,[A_1A_2C]}{p+q}$.

Тези свойства се доказват лесно с използване на свойствата на векторно произведение. Например, равенството (5) следва от:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} &= (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) \wedge (\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1}) = \\
&= -\,\overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_1} \\
&= \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_3} \wedge \overrightarrow{OA_1}
\end{aligned}$$

Самостоятелно докажете свойство (6).

Задача 1. (Китай, 1983 г.) За четириъгълника $ABCD$ лицата на триъгълниците ABD, BCD, ABC се отнасят както $3:4:1$. На отсечките AC и CD съответно са избрани вътрешни точки M и N така, че $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{CN}{CD}$. Да се докаже, че точка B лежи на правата MN тогава и само тогава, когато M и N са среди на AC и CD.

Решение. Нека $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{CN}{CD} = k > 0$. След двукратно прилагане на (6), получаваме

$$\begin{aligned}
[BMN] &= \frac{1}{k+1}[BAN] + \frac{k}{k+1}[BCN] \\
&= \frac{1}{(k+1)^2}[BAC] + \frac{k}{(k+1)^2}[BAD] + \frac{k^2}{(k+1)^2}[BCD]
\end{aligned}$$

Условието $B \in MN$ е еквивалентно на $[BMN] = 0$, т.е. на

$$[BAC] + k[BAD] + k^2[BCD] = 0.$$

Тъй като $[BAC] : [BAD] : [BDC] = 1 : 3 : 4$, получаваме квадратното уравнение $4k^2 - 3k - 1 = 0$ с единствен положителен корен $k = 1$. Следователно $B \in MN$ точно когато M и N са среди на AC и CD.

Ориентирано лице на многоъгълник $A_1A_2 \dots A_n$ може да се дефинира като

(7) $[A_1A_2 \dots A_n] \stackrel{def}{=} [OA_1A_2] + [OA_2A_3] + \dots + [OA_nA_1]$,

където O е произволна точка. Ще се убедим, че тази дефиниция не зависи от избора на точка O. За произволна точка X от свойство (5) имаме

$$\begin{aligned}
[XA_1A_2] &= [OXA_1] + [OA_1A_2] + [OA_2X] \\
[XA_2A_3] &= [OXA_2] + [OA_2A_3] + [OA_3X] \\
&\dots\dots\dots \\
[XA_nA_1] &= [OXA_n] + [OA_nA_1] + [OA_1X]
\end{aligned}$$

Като съберем равенствата и използваме, че $[OXA_i] = -[OA_iX]$, получчваваме

$$[XA_1A_2] + [XA_2A_3] + \cdots + [XA_nA_1] = [OA_1A_2] + [OA_2A_3] + \cdots + [OA_nA_1],$$

т.е. дефиницията е коректна. Като директно следствие от нея получваме полезното свойство

(8) $[A_1A_2 \ldots A_n] = [A_1 \ldots A_k] + [A_1A_kA_{k+1} \ldots A_n]$.

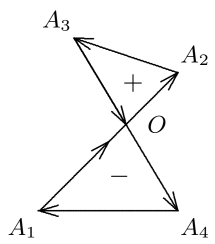
Когато многоъгълникът не се самопресича, от (7) при $O \equiv A_1$ следва, че ориентираното лице е равно на сбора на ориентираните лица $[A_1A_iA_{i+1}]$. Тъй като посоката на обхождане на триъгълниците от вида $A_1A_iA_{i+1}$ е една и съща, то абсолютната стойност на ориентираното лице е равна на лицето на многоъгълника.

Ще разгледаме един пример на самопресичащи се многоъгълници.

Пример. Нека четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ има точка на самопресичане $A_1A_2 \cap A_3A_4 = O$ (фиг. 3). Тогава от (7) имаме

$$[A_1A_2A_3A_4] = \underbrace{[OA_1A_2]}_{0} + [OA_2A_3] + \underbrace{[OA_3A_4]}_{0} + [OA_4A_1]$$

Границите на триъгълниците OA_2A_3 и OA_4A_1 са обходени в различни посоки, значи ориентираното лице на $A_1A_2A_3A_4$ е равно на разликата на техните (неориентирани!) лица.



Фигура 3.

Този пример може по естествен начин да бъде обобщен за многоъгълник с краен брой точки на самопресичане. Основно значение по-нататък ще има твърдението на задача 2.

Задача 2. Дадени са подобните и противоположно ориентирани триъгълници $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Да се докаже, че $[A_1B_2C_1A_2B_1C_2] = 0$.

Решение. Като заместим в (7) точка O с A_1, получаваме равенството

$$[A_1B_2C_1A_2B_1C_2] = [A_1B_2C_1] + [A_1C_1A_2] + [A_1A_2B_1] + [A_1B_1C_2].$$

Следователно е достатъчно да докажем, че

$$\overrightarrow{A_1B_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1C_1} \wedge \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \wedge \overrightarrow{A_1C_2} = \overrightarrow{0}.$$

Преобразуваме израза

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{A_1B_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1C_1} \wedge \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \wedge \overrightarrow{A_1C_2} = \\
= \ & \overrightarrow{A_1B_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_2A_1} \wedge \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \wedge \overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \wedge \overrightarrow{A_1C_2} = \\
= \ & (\overrightarrow{A_1B_2} + \overrightarrow{A_2A_1}) \wedge \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \wedge (\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1C_2}) = \\
= \ & \overrightarrow{A_2B_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \wedge \overrightarrow{A_2C_2}\ .
\end{aligned}$$

Тъй като

$$\angle(\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_1C_1}) = \angle(\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_2C_2}) + \angle(\overrightarrow{A_2C_2}, \overrightarrow{A_1B_1}) + \angle(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}),$$

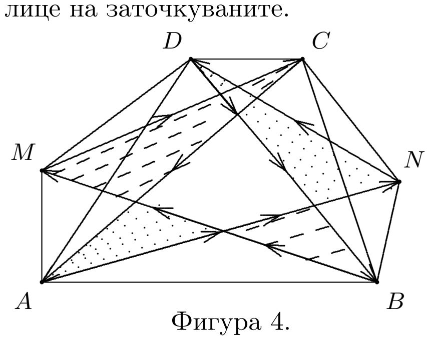
а от противоположната ориентация на дадените триъгълници следва, че $\angle(\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_2C_2}) + \angle(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) = 0$, получаваме

$$\angle(\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_1C_1}) = \angle(\overrightarrow{A_2C_2}, \overrightarrow{A_1B_1}) = -\angle(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2C_2}).$$

Освен това, от подобието на дадените триъгълници имаме $A_2B_2 = k.A_1B_1$ и $A_2C_2 = k.A_1C_1$. Следователно $\overrightarrow{A_2B_2} \wedge \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \wedge \overrightarrow{A_2C_2} = \overrightarrow{0}$ и по обратен път следва твърдението на задачата.

Забележка. Полученото равенство означава, че при обхождане $A_1 \to B_2 \to C_1 \to A_2 \to B_1 \to C_2 \to A_1$, сборът от лицата на многоъгълниците, чиито граници са обходени по посока на часовниковата стрелка, е равен на сбора от лицата на многоъгълниците с обходени в противоположна посока граници. Задача 3. илюстрира един такъв пример.

Задача 3. Даден е трапец $ABCD$. Външно за трапеца са построени триъгълниците ADM и BCN, като $\angle ADM = \angle BCN$ и $\angle DAM = \angle CBM$. Докажете, че триъгълниците BCM и DAN имат равни лица.
Решение. Триъгълниците ADM и BCN са подобни и противоположно ориентирани. Следователно $[ANDBMC] = 0$. Като използваме горната забележка, заключаваме, че на фиг. 4 общото лице на защрихованите многоъгълници е равно на общото лице на заточкуваните.



Фигура 4.

Тъй като $ABCD$ е трапец, в сила е равенството $[AOD] = [COB]$ (където O е пресечната точка на диагоналите AC и BD). Като прибавим към заточкуваната част триъгълник AOD, а към защрихованата – триъгълник COB, получаваме лесно желаното равенство.

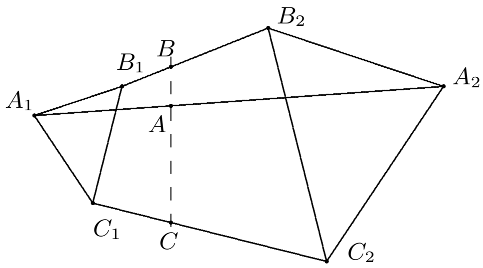
Еквивалентен запис на равенството $[A_1B_2C_1A_2B_1C_2] = 0$ се получава след преобразуване, основано на свойство (8):

$$\begin{aligned}
&[A_1B_2C_1A_2B_1C_2] = \\
= \quad &[A_1B_2C_1] + [A_1C_1A_2B_1C_2] = [A_1B_2C_1] + [C_1A_2B_1C_2A_1] = \\
= \quad &[A_1B_2C_1] + [C_1A_2B_1] + [C_1B_1C_2A_1] = [A_1B_2C_1] + [A_2B_1C_1] + [B_1C_2A_1C_1] \\
= \quad &[A_1B_2C_1] + [A_2B_1C_1] + [B_1C_2A_1] + [B_1A_1C_1] = \\
= \quad &[A_1B_2C_1] + [A_2B_1C_1] + [A_1B_1C_2] - [A_1B_1C_1],
\end{aligned}$$

т.е. $[A_2B_1C_1]+[A_1B_2C_1]+[A_1B_1C_2] = [A_1B_1C_1]$. От съображения за симетрия и $[A_1B_2C_2]+[A_2B_1C_2]+[A_2B_2C_1] = [A_2B_2C_2]$. Тези равенства ще използваме в задача 4.

Задача 4.(Задача на Б. Михайлов) Дадени са подобните и противоположно ориентирани триъгълници $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точките A, B, C делят съответно отсечките A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 в отношение λ. Докажете, че точките A, B и C са колнеарни тогава и само тогава, когато отношението λ е равно на коефициента на подобие на дадените триъгълници.

Решение. Използването на ориентирани лица позволява да се избегне разглеждането на всички взаимни разположения на триъгълниците. Една възможна конфигурация е показана на фиг. 5.



Фигура 5.

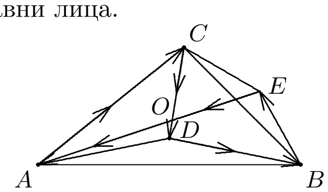
Условието за колнеарност на точките A, B и C е еквивалентно на $[ABC] = 0$. От свойство (6) и горните равенства имаме:

$$\begin{aligned}
[ABC] &= \frac{1}{\lambda+1}[A_1BC] + \frac{\lambda}{\lambda+1}[A_2BC] \\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^2}[A_1B_1C] + \frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}([A_1B_2C] + [A_2B_1C]) + \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}[A_2B_2C] \\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^3}[A_1B_1C_1] + \frac{\lambda^3}{(\lambda+1)^3}[A_2B_2C_2] + \\
&+ \frac{\lambda}{(\lambda+1)^3}\underbrace{([A_2B_1C_1] + [A_1B_2C_1] + [A_1B_1C_2])}_{[A_1B_1C_1]} + \\
&+ \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^3}\underbrace{([A_1B_2C_2] + [A_2B_1C_2] + [A_2B_2C_1])}_{[A_2B_2C_2]} \\
&= \frac{1}{(\lambda+1)^2}[A_1B_1C_1] + \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2}[A_2B_2C_2].
\end{aligned}$$

Условието $[ABC] = 0$ е еквивалентно на $[A_1B_1C_1] = -\lambda^2[A_2B_2C_2]$, откъдето следва твърдението на задачата. (Можете да сравните с решението в [1].)

Задача 5. (53. НОМ, Областен кръг) Даден е $\triangle ABC$. Точките D и E са от симетралите съответно на страните AB и BC, като D е вътрешна за $\triangle ABC$, а E – външна, и $\angle ADB = \angle CEB$. Ако пресечната точка на AE и CD е O, докажете, че $\triangle ACO$ и $DBEO$ имат равни лица.

Решение. Забелязваме, че равнобедрените триъгълници ABD и BCE са подобни и, така записани, са обратно ориентирани. Тогава $[ACDBE] = 0$. Оттук $[ACO] + [ODBE] = 0$ (виж обхождането на фиг. 6).



Фигура 6.

Задача 6. (по задача 7 за 10. клас от Всерусийска олимпиада, 2001 г.) Даден е триъгълник ABC с ортоцентър H. Окръжност през H пресича правите AH, BH, CH съответно в точки A_1, B_1, C_1. Да се докаже, че

$$[ABC_1] + [AB_1C] + [A_1BC] = [ABC].$$

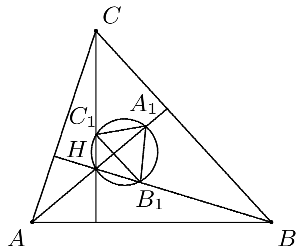
Решение. Триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са обратно ориентирани и подобни при всеки избор на окръжността. На фиг. 7. подобието следва от равенствата

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1HC_1 = \angle ABC$$

и

$$\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1HB_1 = \angle ACB.$$

Тогава от задача 2. имаме равенството $[AB_1CA_1BC_1] = 0$. Като го преобразуваме с помощта на свойство (8), получаваме:



Фигура 7.

$$\begin{aligned}
0 &= [AB_1CA_1BC_1] = \\
&= [AB_1C] + [ACA_1BC_1] = [AB_1C] + [CA_1BC_1A] = \\
&= [AB_1C] + [CA_1B] + [CBC_1A] = [AB_1C] + [A_1BC] + [BC_1AC] = \\
&= [AB_1C] + [A_1BC] + [BC_1A] + [BAC] = \\
&= [AB_1C] + [A_1BC] + [ABC_1] - [ABC],
\end{aligned}$$

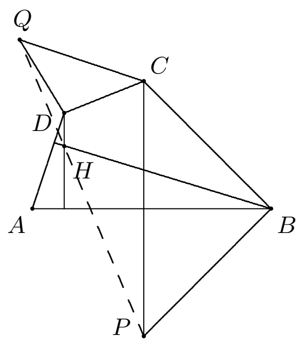
откъдето следва твърдението на задачата.

Задача 7. (LXVI Московска олимпиада) Даден е вписаният четириъгълник $ABCD$. Точките P и Q са симетрични на C относно правите AB и AD съответно. Да се докаже, че правата PQ минава през ортоцентъра H на $\triangle ABD$.

Решение. От условието, че $ABCD$ е вписан четириъгълник директно следва, че $\angle DCQ = \angle BCP$, т.е. обратно ориентираните равнобедрени триъгълници QCD и CPB са подобни (фиг. 8). Тогава $[QPDCB] = 0$ и от свойство (7) при $O \equiv H$ получаваме

$$[HQP]+[HPD]+[HDC]+[HCB]+[HBQ]=0.$$

Но от $BH||CQ$ лесно следва равенството $[HPD]+[HDC]=0$; аналогично от $DH||CP$ имаме $[HCB]+[HBQ]=0$. Следователно $[HQP]=0$, т.е. $H \in PQ$.



Фигура 8.

Използвана литература

[1] Михайлов Б., Задачи по "елементарна"геометрия, Веди, София, 1995.
[2] Tabov, J.B., Taylor P.J. Methods of Problem Solving, Book 1. Belconnen, ACT, 1996.
[3] Табов, Й., К. Банков. Математически състезания по света. София, ЎНаука и изкуствоЎ, 1988.