Игри и стратегии

Задача 1. Числата $1, 2, \ldots, 2002$ са записани на 2002 картончета. Двама играчи поред избират по едно картонче до изчерпването им и накрая всеки пресмята сбора от числата на неговите картончета. Победител в играта е този, който е получил сбор с по-голяма цифра на единиците. Кой от играчите има печеливша стратегия и каква е тя?

Решение: От значение за играта са само цифрите на единиците, затова ще смятаме, че има по 201 от картончетата с цифрите 1 и 2 по 200 картончета с всяка от останалите цифри. Първият играч има следната печеливша стратегия: започва с 2 и след това повтаря ходовете на първия. Ако в даден момент първият вземе последното картонче с цифрата 1, вторият избира коя да е цифра x и повтаря ходовете на втория, докато вторият вземе последното картонче с x. По този начин първият ще получи сбор с последна цифра 2, а първият - с последна цифра 1.

Задача 2. Дъска е съставена от 23×23 полета. В долното ляво и горното дясно полета поставили по една бяла фигура, а в горното ляво и долното дясно - по една черна фигура. Редуват се ходове на белите и черните фигури, като започват белите. На всеки ход една фигура се премества в свободно съседно (по страна) поле. Могат ли черните фигури да попречат на белите да заемат две съседни по страна полета?

Решение: Ще докажем, че черните фигури могат да играят така, че след техен ход всички фигури да са във върховете на правоъгълник с успоредни на страните на дъската страни, като в срещуположните върхове стоят едноцветни фигури.

В началото на играта това условие е изпълнено. След това черните играят симетрично: ако бяла фигура прави хоризонтален (вертикален) ход, намиращата се преди това в същия вертикал (хоризонтал) черна фигура се придвижва по същия начин. Така фигурите отново се намират във върховете на правоъгълник и едноцветните фигури са в срещуположните върхове. Следователно белите не могат да застанат в съседни полета.

Задача 3. В началото на една игра на дъската е записано числото $2004! = 1.2.3...2004$. Двама играчи редуват ходовете си. За един ход всеки играч изважда от написаното на дъската число X някое естествено число $Y \leq X$, което има не повече от 20 различни прости делители; записва на дъската разликата $X - Y$ и изтрива старото число X. Печели играчът, който получи 0. Кой от играчите (който прави първия ход или неговият съперник) има печеливша стратегия и каква е тя?

Решение: Нека P е произведението на първите 21 прости числа. Вторият играч има печеливша стратегия, ако винаги оставя на противника си кратно на P число. Това му гарантира успех, тъй като 2004! и 0 са кратни на P.

Ще покажем, че такава стратегия е изпълнима. Нека първият играч е получил кратно на P число n и избере да извади от него m. Получената разлика d не е кратна на P, тъй като в обратен случай и m трябва да е кратно на P, а m има не повече от 20 прости делителя. Тогава вторият играч избира остатъка $r > 0$ на d при деление с P. Тъй като $r < P$, е сигурно, че r има не повече от 20 прости делителя.

Задача 4. Борис и Кирил играят следната игра: Борис намисля цяло число по-голямо от 100, а Кирил му казва цяло число d, по-голямо от 1. Ако числото на Борис се дели на d, Кирил печели; в обратен случай Борис изважда от своето число d и играта продължава. Кирил няма право да казва едно и също число няколко пъти. Ако числото на Борис стане отрицателно, Кирил губи. Може ли Кирил да играе така, че със сигурност да спечели?

Решение: Ще покажем стратегия, която винаги ще води Кирил до успех.

1. Кирил избира $d = 2$. Ако не спечели, то числото на Борис е нечетно.

2. Кирил продължава с $d = 3$. Ако не спечели, то първоначално избраното от Борис число е от вида $6k + 1$ или $6k + 3$. След този ход числото на Борис е $6k + 1 - 2 - 3$ или $6k + 3 - 2 - 3$, т.е. от вида $6k + 2$ или $6k + 4$.

3. Кирил избира $d = 4$. Ако не печели, това би означавало, че непосредствено преди неговия ход числото на Борис е било от вида $12k+2$ или $12k + 10$. След този ход то става $12k + 10$ или $12k + 6$.

4. Кирил избира $d = 6$. Ако не печели, това означава, че преди неговия ход числото на Борис е било от вида $12k + 10$ и след този ход то става $12k + 4$.

5. Кирил избира $d = 16$. Ако $12k + 4$ не се дели на 16, Борис получава число от вида $12k+4-16 = 12k-12$ и на следващия си ход Кирил казва 12 и печели. (Сборът от изважданите числа 2+3+4+6+16=31 е по-малък от 100, което гарантира, че числото на Борис не е отрицателно.)

Задача 5. Двама играчи поред вземат камъни от купчина. При всеки свой ход първият играч може да вземе или 1, или 10 камъка, а вторият може да вземе или m, или n камъка. Губи този, който не може да направи ход. Ако първият има стратегия, която му гарантира победа независимо от първоначалния брой камъни в купчината, намерете m и n.

Решение: Ще докажем, че числата m и n са не по-малки от 9, като модулът на разликата им не е равен на 9.

Да допуснем, че някое от числата m и n е по-малко от 9 (например m). Тогава ако имаме купчина с $m+1$ камъка, първият ще е длъжен с първия си ход да вземе 1 камък (тъй като $m+1 < 10$), след което вторият взема m камъка и печели – противоречие. Следователно и m, и n са по-големи или равни на 9.

Да допуснем, че $m - n = 9$. Тогава ако имаме купчина с $m + 1 = n + 10$ камъка, първият взема 1 камък, вторият m камъка или първият взема 10 камъка, вторият n камъка, като и в двата случая вторият печели – противоречие. Следователно $|m - n| \neq 9$.

Ще докажем, че при останалите стойности на m и n първият печели.

Нека в купчината има k камъка и първият е на ход. Ако $k \leq 10$, първият печели с един ход (вземайки 10 камъка, ако $k = 10$, или 1 камък, ако $k \leq 9$).

Ако $k > 10$, след своя ход първият оставя в купчината или $k - 1$, или $k - 10$ камъка. Ако в единия случай се получава m, а в другия – n, то модулът на разликата между m и n ще бъде равен на 9 – противоречие. Следователно първият може да направи ход така, че вторият след това да не спечели с един ход. Тъй като броят на камъните в купчината намалява, накрая ще спечели първия.

Задача 6. Даден е шоколад с форма на равностранен триъгълник със страна n, разделен на еднакви триъгълни блокчета със страна 1 (като всяка страна е разделена на n равни части и точките деление на всяка двойка страни са свързани с успоредни на третата страна улейчета). Двама математици играят следната игра: за един ход всеки от тях отчупва от шоколада триъгълно парче (по някое от улейчетата), изяжда го и предава парчето на другия. Побеждава този, който получи триъгълно парче със страна 1. Ако по време на играта някой от играчите не може да направи ход, той преждевременно губи. За всяко n определете кой от играчите има печеливша стратегия и каква е тя.

Решение: Ясно е, че по улейчетата могат да се отчупват само равностранни триъгълници. Ще докажем, че ако n е просто число, печели вторият, а ако е съставно - първият.

След като първият отчупи триъгълник със страна x, остава парче с форма на равнобедрен трапец с основи x и n, бедро $(n - x)$ и ъгъл 60^o.

Ако вторият отчупи от единия остър ъгъл на трапеца триъгълно парче със страна по-малка от $n - x$, първият може да отчупи същото парче от другия остър ъгъл на трапеца. Така вторият играч ще получи шестоъгълно парче и ще загуби.

Нека вторият отчупи триъгълник със страна $n-x$. Пред първия е парче с форма на успоредник със страни x и $n-x$. За да не получи шестоъгълник и да загуби, той трябва да отчупи равностранен триъгълник със страна $\min\{x, n-x\}$. Така вторият играч отново получава трапец и е поставен в аналогична ситуация.

Забелязваме, че тази операция е аналогична на алгоритъма на Евклид за числата x и n. Следователно след определен брой ходове вторият ще получи триъгълно парче със страна, равна на НОД(n, x) и ако n и x са взаимнопрости, той ще победи. Следователно при просто число n вторият винаги побеждава.

Ако n е съставно число, първият може да избере x като един от простите делители на n. Когато вторият получи триъгълно парче със страна, равна на НОД$(n, x) = x$, той е в позицията на първия за n - просто, която е губеща. Следователно печели първият.

Задача 7. Емил и Иван си делят купчина от 25 монети с тегла $1, 2, 3, \ldots, 25$ грама. Първи на ход е Емил, а по-нататък на ход е този, който е събрал монети с по-голямо общо тегло от монетите на другия. Ако теглата на монетите и на двамата са равни, на ход е този, който е бил на ход преди това. Този, който е на ход избира монета от купчината, а противникът му казва на кого да бъде дадена тя. Може ли Емил да играе така, че теглото на събраните от него монети в края на играта да бъде по-голямо от теглото на монетите на Иван, или Иван винаги може да предотврати това?

Решение: Първо ще отбележим, че тази игра не може да завърши с равенство, тъй като общото тегло на монетите е нечетно. Това означава, че един от играчите има печеливша стратегия (докажете!).

Да допуснем, че Емил има печеливша стратегия. Нека той е направил първия ход. Тогава Емил трябва да може да отговори на всеки ход на Иван така, че в крайна сметка да спечели. Но ако Иван каже, че избраната от Емил монета трябва да се даде на Иван, то той ще се окаже в същата ситуация, в каквато би се оказал Емил, ако Иван беше казал монетата да се даде на Емил (и Емил при това щеше да знае как да спечели). Следователно Иван може да се възползва от тази стратегия и да спечели – противоречие. Следователно Емил няма печеливша стратегия, което означава, че печеливша стратегия има Иван.