

Турнири

1. В турнир по футбол участвали 7 отбора, като всеки два отбора се срещнали точно веднъж. Ако седемте отбора събрали общо 53 точки, колко мача са завършили с равенство? (За победа се дават 3 точки, за равен - 1 точка и за загуба не се дават точки.)

Решение. Всеки отбор се е срещнал с всеки от останалите шест, това прави $7 \cdot 6 = 42$ срещи. По този начин всеки мач се брои два пъти, следователно броят на срещите в турнира е $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

Нека с равенство са завършили x мача; те носят общо $2x$ точки. Останалите $21 - x$ срещи носят общо $3(21 - x)$ точки. От равенството $2x + 3(21 - x) = 53$ намираме, че броят на равенствата е $x = 10$.

2. Във футболен турнир участвали 5 отбора, като всеки два отбора се срещнали точно веднъж. В крайното класиране отборите събрали съответно 7, 6, 5, 4, 3 точки. Да се определи как е завършила срещата между втория и петия в класирането.

Решение. Както в задача 1, определяме, че броят на срещите е 10 и тъй като събраните точки са $7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 25$, равните мачове са 5. Ясно е, че сборът от равните мачове на всички отбори е $2 \cdot 5 = 10$.

Отборът с 4 точки има или четири ремита, или една победа и едно реми.

Ако този отбор има четири ремита, то всеки отбор има поне по едно реми. Тогава отборът със 7 точки има 2 победи и 1 реми; отборът с 6 точки има 1 победа и 3 ремита; отборът с 5 точки има 1 победа и 2 ремита; и отборът с 3 точки има 3 ремита. Но сборът от равните мачове на всички отбори става $1 + 3 + 2 + 4 + 3 = 13$, което е противоречие. Следователно отборът с 4 точки има 1 победа и 1 реми.

Тъй сборът от равните мачове на всички отбори е 10, то единствената възможност е: отборът с 7 точки – 2 победи и 1 реми; отборът с 6 точки – 1 победа и 3 ремита; отборът с 5 точки – 1 победа и 2 ремита; отборът с 4 точки – 1 победа и 1 реми и отборът с 3 точки – 3 ремита.

Ако отборът с 5 точки е победил отбора с 3 точки, то тези два отбора имат ремита с всички останали отбори, която е невъзможно, тъй като отборът с 7 точки има само едно реми. Следователно вторият в класирането е завършил реми с петия.

Решете сами!

3. Четири футболни отбора изиграли турнир, като всеки два отбора се срещнали точно веднъж. Два от отборите събрали по 3 точки, като единият имал три равенства. Колко точки е събрал победителят в турнира, ако четирите отбора събрали общо 13 точки?

4. Пет футболни отбора изиграли турнир, като всеки два отбора се срещнали точно веднъж. Четири отбора събрали съответно 1, 2, 5 и 7 точки. Да се определи колко точки е събрал петият отбор.