Г. Димков. Гама, лад, тоналност – що е то? В: Т. Атанасова (Редактор), Сборник "Моделиране и управление на информационните процеси", София, България, 2009, КТП, София, 2009, ISBN: 978-954-9332-55-1, стр. 117-122

ГАМА, ЛАД, ТОНАЛНОСТ – ЩО Е ТО?

н.с. I ст. д-р Георги Димков
Институт по математика и информатика – БАН
gdimkov@math.bas.bg

Настоящата статия е един опит, тръгвайки от абстрактни обекти и условия, да стигнем, без естетически съображения, до необходимостта от въвеждане на понятия, представляващи паралел на понятията гама, лад и тоналност в Теория на музиката.

Увод. Понятията гама, лад и тоналност са продукт на хилядолетното развитие на музикалната естетика. Днес те са обекти на Елементарна теорияна музиката, където за тях се дават съответните определения. Тези определения са плод по-скоро на музикалната творческа и изпълнителска практика, отолкото на строго научни изследвания. Все пак трябва да имаме предвид че, музиката е изкуство и важността на естетическото и психологическото въздействие надделява над задължението за спазване на правила, рамки и прочее, които понякога не са съвсем естествени.

Абстрактна конструкция. Нека $A = \{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ е множество от елементи със следните свойства:

а) $a_i \neq a_j$, ако $i \neq j$;

б) съществува функция $D(\cdot,\cdot)$ такава, че

$$D(a_i, a_j) = j - i;$$

в) за поне едно естествено число n съществува функция $E_n(\cdot)$, за която

$$E_n(a_i) = E(a_{i+n})$$

за всяко цяло число i.

В такъв случай елементите a_i и a_{i+n} ще наричаме еквивалентни $(a_i \approx a_{i+n})$ по отношение на функцията E_n. Следователно можем да напишем, че

$$a_i \approx a_{i+\lambda.n},$$

където λ е цяло число.

Съществуването на функцията $E_n(\cdot)$ ни дава възможност, вместо с цялото множество A, да работим с произволно негово крайно подмножество, съдържащо $n+1$ последователни елемента. Така за произволно цяло число i да означим

$$C(i) = \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n}\} \subset A.$$

Да означим с $s_k(i), 1 \le k \le n$ множеството от всички подмножества на $C(i)$ от вида

$$\sigma = \{a_{i+\lambda_j}\}_{j=0}^{k},$$

където $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k = n$ и $1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} \le n-1$.
Ясно е, че

$$s_1(i) = \{a_i, a_{i+n}\} \text{ и } s_n(i) = C(i).$$

Във всеки елемент $\sigma \in s_k(i)$ на местата $i+1, i+2, \dots, i+n-1$ са разположени k-1 елемента на $C(i)$, различни от a_i, a_{i+n}. В такъв случай $s_k(i)$ съдържа $\binom{n-1}{k-1}$ елемента. Тогава множеството $S(i) = \{s_k(i)\}_{k=1}^{n}$ се състои от

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

елемента. Най-накрая да означим

$$\Sigma = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} S(i).$$

Да вземем два произволни елемента $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ и да разгледаме въпроса кога те съвпадат. От структурата на Σ следва съществуването на две числа $k_1, k_2 \in [1, n]$ и две цели числа i_1, i_2 такива, че

$$\sigma_1 \in s_{k_1}(i_1), \sigma_2 \in s_{k_2}(i_2).$$

1. $k_1 \ne k_2$. Тогава $\sigma_1 \ne \sigma_2$, тъй като имат различен брой елементи.

2. $k_1 = k_2 = k$. Равният брой на елементите на σ_1 и σ_2, както това може да се види на съвсем прости примери, не ни дава достатъчна информация за решаване на поставения въпрос. Нека

$$\sigma_1 = \{a_{i_1+\lambda_j}\}_{j=0}^{k},$$

където, както и по-горе, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k = n$ и $1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k-1} \le n-1$. За разстоянията между последователните му елементи имаме

$$D(a_{i_1+\lambda_{j-1}}, a_{i_1+\lambda_j}) = (i_1 + \lambda_j) - (i_1 + \lambda_{j-1}) = \lambda_j - \lambda_{j-1} = d_j,\ j = 1, 2, \dots, k.$$

За сумата на тези разстояния получаваме

$$d_1 + d_2 + \dots + d_k = (\lambda_1 - \lambda_0) + (\lambda_2 - \lambda_1) + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k-1}) = \lambda_k - \lambda_0 = n.$$

Така на всеки елемент на $s_k(i_1)$ съответства един k-мерен вектор $\mu = (d_1, d_2, \dots, d_k)$, чиито координати са естествени числа и сумата им е n и обратно. Ще отбележим двата специални случая k=1 и k=n. Тогава $\mu = (n)$ и съответно $\mu = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n})$.

Числата $d_1, d_2, \dots, d_k$ или са равни помежду си, или се разпределят в няколко групи от равни числа. Наборът от по един представител от всяка група ще наричаме *състав* на елемента σ, а самата поредица от разстояния $d_1, d_2, \dots, d_k$ – негова *структура*.

Да разгледаме $\tilde{\sigma}_1 = \{a_{(i_1+1)+\lambda_j}\}_{j=0}^{k} \in s_k(i_1 + 1)$. За него

$$D(a_{(i_1+1)+\lambda_{j-1}}, a_{(i_1+1)+\lambda_j}) = (i_1 + \lambda_j + 1) - (i_1 + \lambda_{j-1} + 1) = \lambda_j - \lambda_{j-1} = d_j,\ j = 1,2,\dots,k\ .$$

Това означава, че на него съответства същият вектор $\mu = (d_1, d_2, \dots, d_k)$, т.е. σ_1 и $\widetilde{\sigma}_1$ имат едни и същи състав и структура. Но $\sigma_1 \neq \widetilde{\sigma}_1$, тъй като те съдържат различни елементи.

Да означим с m_k, $k \in [1,n]$ съвкупността от всички вектори от вида μ. Ясно е, че съществува еднозначно-обратимо съответствие както между елементите на $s_k(i_1)$ и m_k, така и между елементите на $s_k(i_1+1)$ и m_k. Това означава, че това съответствие не е достатъчно за съвпадението на два елемента на Σ.

Нека $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ е една наредена n-торка от обекти, които ще наричаме *названия*. С елементите на $C(0)$ и T да съставим следните двойки:

$$(a_0, t_1), (a_1, t_2), \dots, (a_{n-1}, t_n).$$

Всеки от останалите елементи на A ще получи названието на съответно еквивалентния си елемент от $C(0)$.

Сега сме в състояние да изкажем следното твърдение:

Ако $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$

- имат равен брой елементи – k,
- имат едни и същи състав и структура
- названията на първите им членове съвпадат,

тогава те или съвпадат или са съставени от съответно еквивалентни елементи.

Хроматична гама. В теорията на тонообразуването специална роля играят двойки тонове, чиито честоти се отнасят както 1:2. За такива тонове се казва, че образуват интервал една *октава*. В европейската музикална практика обикновено между тях се вместват 11 нови тона, следвайки следното правило. Честотите на тоновете от тази редица образуват геометрична прогресия с частно $\sqrt[12]{2}$. Съвкупността от тези тонове, независимо от височината на тона, от който започваме, се нарича *хроматична гама*.

Към „гама, лад, тоналност”. Да разгледаме множество A, чиито елементи са тонове с честоти, образуващи геометрична прогресия с частно $\sqrt[12]{2}$. Разстоянието (интервала) между два последователни елемента е прието да се нарича полутон и ние ще го използваме за единица мярка за разстояние (дължина на интервал) между два произволни елемента. (В частност дължината на октавата е 12.) Нека A съответства на клавиатурата на пианото. Тогава то съдържа 85 или 88 елемента в зависимост от конкретния инструмент. За елементите на A можем да кажем, че:

а) $a_i \neq a_j$, ако $i \neq j$;

б) $D(a_i, a_j) = 12.\log_2 \dfrac{f_j}{f_i} = j - i$

в) съществува функция $E_{12}(\cdot)$, за която

$$E_{12}(a_i) = E(a_{i+12})$$

за всяко цяло число i.

Множеството $C(i)=\{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n}\}$ е хроматичната гама с начален тон $a_i \in A$ и краен тон $a_{i+12} \in A$, който е на една октава разстояние (с една октава по-висок) от a_i. Подмножеството на *C(i)*

$$\sigma=\{a_{i+\lambda_j}\}_{j=0}^{k}, 1\le k\le n, \text{ където } \lambda_0=0,\ \lambda_k=n \text{ и } 1\le\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_{k-1}\le n-1$$

ще наричаме *k-степенна тонова стълбица* (накратко *k*-стълбица); $s_k(i)$ е множеството на всички *k*-стълбици с начален тон a_i и съдържа $\binom{11}{k-1}$ елемента.

Разглеждайки въпроса за идентичността на два елемента на множеството Σ, ние достигнахме до необходимостта от въвеждане на названия на елементите. В конкретния случай, когато елементите на множеството *A* са музикални тонове, ще използваме следните 12 названия:

до, до♯, ре, ре♯, ми, фа, фа♯, сол, сол♯, ла, ла♯, си.

Да означим с a_0 онзи тон, чиято честота е най-близка до 440 Hz и да го наречем *ла*. Така образуваме двойките:

(a_0, ла), (a_1, ла♯), (a_2, си), (a_3, до), (a_4, до♯), (a_5, ре),

(a_6, ре♯), (a_7, ми), (a_8, фа), (a_9, фа♯), (a_{10}, сол), (a_{11}, сол♯).

Разбира се същите названия носят тоновете, съответно еквивалентни на тоновете (елементите) на $C(0)$.

Повече от две хилядолетия европейската музика използва 7-стълбици (елементи на $s_7(i)$). От горната формула се вижда, че техният брой е $\binom{11}{6}=462$.

На $s_7(i)$ съответства множеството m_7 на всички вектори от вида $\mu=(d_1,d_2,\ldots,d_7)$, за които $d_1+d_2+\cdots+d_7=12$. Лесно може да се установи, че съществуват следните възможности за състава на една 7-стълбица:

$$\langle 1,2\rangle, \langle 1,6\rangle, \langle 1,2,3\rangle, \langle 1,2,4\rangle, \langle 1,2,5\rangle, \langle 1,3,4\rangle.$$

(Символът $\langle 1,2\rangle$ означава, че разстоянията между елементите на съответните 7-стълбици са *единици* и *двойки*.)

Векторите, чиито координати са възможните вариации от координатите на вектора (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2), определят структурата на всички 7-стълбици със състав $\langle 1,2\rangle$. Те са общо 21 на брой.

Сега с помощта на вектора (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1) можем да съставим 7-стълбици – гами с един и същи състав и структура – лад . Първите тонове на тези гами се наричат *тоники* и носят различни названия.

С $m_7^* \subset m_7$ да означим множеството на онези вектори, чиито координати са циклични пермутации на координатите на $\mu^*=(2,2,1,2,2,2,1)$. Елементите на m_7^* определят структурите на едно множество от 7-стълбици, което ще означим със $s_7^*(i)\subset s_7(i)$.

Елементите на $s_7^*(i)$ се наричат *(диатонични) гами,*

а техните структури – *ладове.*

Ладовете носят имена, произлизащи от областите в Древна Елада, в които са били използвани:

(2, 2, 1, 2, 2, 2, 1) – йонийски
(2, 1, 2, 2, 2, 1, 2) – дорийски
(1, 2, 2, 2, 1, 2, 2) – фригийски
(2, 2, 2, 1, 2, 2, 1) – лидийски
(2, 2, 1, 2, 2, 1, 2) – миксолиийски
(2, 1, 2, 2, 1,2, 2) – еолийски
(1, 2, 2, 1, 2, 2, 2) – локрийски.

Два от тях – йонийският и еолийският – векове наред са използвани в несравнимо по-голяма степен, отколкото останалите и са познати под по-разпространените им имена *мажорен* лад и съответно *минорен* лад.

За произволно цяло число *i* първият елемент на всяка гама съвпада с един от елементите на $C(0)$, носи съответно неговото название и се нарича *тоника*. Сега, комбинирайки името на лада с името на тониката, стигаме до понятието *тоналност.* Да вземем за пример хроматичната гама $C(5)$. Нейният първи елемент е a_5, който в $C(0)$ носи названието *ре*. Ако сега изберем гама, чийто лад е минор, тоналността на тази ама ще бъде *ре минор*. По този начин се образуват 12 мажорни и 12 минорни тоналности.

Заключителни бележки. Съществуването на връзка между понятия, обекти, правила и други от Теория на музиката и някои дялове на природните науки, в частност математика, е известно от векове. Изследванията на Питагор, както твърди преданието, са комбинация от абстрактни идеи и емпирично получени резултати. Във всеки отделен случай има нещо, което е най-малкото изглежда любопитно като факт. В този смисъл в нашия случай можем да посочим необходимостта от въвеждане на *състав* и *структура* на определени обекти и известен паралел със ладовото устройство на мажорната и минорната гама. Без съмнение още много други паралели могат да бъдат намерени и да станат обект на подобни разглеждания.

Литература

1. Л.Красинская, В.Уткин, *Элементарная теория муыки*, Москва, 1983
2. К.Куратовскси, *Въведение в теория на множествата и топология*, София, 1979

SCALE, MODE, TONALITY – WHAT IS THIS?

Georgi Dimkov
Institute of Mathematics and Informatics
Sofia, Bulgaria
gdimkov@math.bas.bg

The notions scale, mode and tonality are products of the development of musical aesthetics. They are part of The Elementary Theory of Music where their definitions are stated. The aim of the present paper is to construct parallels of these notions, starting from an abstract set of elements with prescribed properties, but without any music theoretical and aesthetical considerations.