

ЗА МЯСТОТО НА МАТЕМАТИЧЕСКОТО МОДЕЛИРАНЕ В УЧИЛИЩНИЯ КУРС ПО МАТЕМАТИКА

Невена Събева – Колева

Секция Телекомуникации, ИМИ – БАН,
newena@math.bas.bg

***Резюме.** Въпреки, че в учебните програми по математика моделирането е едно от ядрата на учебното съдържание, заложените стандарти не са достатъчно пълни и конкретни. Затова в учебниците, особено за класовете от гимназиалната степен, липсват задачи за моделиране на реални ситуации. На практика в учебния процес моделирането често се изчерпва с илюстрация на съществуващи математически модели.*

От друга страна, бързото развитие на технологиите изисква от учениците да развият умения за аналитично мислене и активно моделиране на реални ситуации.

Статията разглежда възможностите за изграждане на компетентности за моделиране чрез проектно обучение, в рамките на специализирани курсове и e-learning.

Ключови думи: 97M10 Modeling and interdisciplinarity.

Причината голяма част от учебното време в момента да се отделя на математиката е, че тя развива умения да се решават задачи извън математиката. Всяка тема от учебното съдържание е включена в него затова, че в даден момент тези знания са били необходими за решаване на определени практически задачи. Поставени извън този контекст, математическите знания стават в голяма степен фрагментарни и се пропуска целта, губи се центърът.

В центъра на образователния процес винаги е стоял ученикът и неговите образователни потребности. Целите на обучението са

свързани с “развиване в максимална степен на потенциала на всяко дете и ученик и постигане на ключовите компетентности за пълноценна личностна и социална реализация” [5]. Но ако в предишната епоха училището, “функциониращо в духа на фабриката” [11], е осигурявало необходимите компетентности за реализация, днес ситуацията е различна. В анализа на Световната банка “България - образование и умения за икономиката на знанието” [4], като първа препоръка е посочена необходимостта от повишаване на качеството и *приложимостта* на знанията и уменията.

За да могат учениците да *прилагат* математически знания в нематематически контекст, е необходимо обучение в духа на математическото моделиране. От значение е не само учениците да познават някои математически приложения и стандартни модели, но и да имат опит в процеса на *активно моделиране*.

Математическо моделиране, етапи и компетентности

Уменията (компетентностите) при моделиране са свързани с основните етапи на този процес. Ако разгледаме модела на процеса на моделиране, предложен в [3] (фиг. 1),



Фиг. 1

тези компетентности са свързани с:

- Формулиране на задача
 - да се направят допускания и да се опрости ситуацията;
 - да се определят основните данни;
 - да се конструират връзките между данните;

- Съставяне на математически модел
 - да се изберат подходящи математически обекти;
 - да се изразят и опростят връзките между тях;
 - да се въведат подходящи математически означения и графично представяне;
- Решаване на математическата задача
 - да се използват евристични стратегии (разделяне на задачата на подзадачи; използване на връзки с аналогични или подобни задачи, преформулиране на задачата и т.н.);
 - да се използват математически знания ;
- Интерпретиране на резултата
 - да се интерпретират математическите резултати в нематематически контекст;
 - да се обобщят получените частни решения;
- Валидиране
 - рефлексивни умения за оценка на полученото решение и процеса на решаване;
 - анализ на възможността за други решения.

Съществуват различни подходи за изграждане на тези компетентности, като могат да се споменат *холистичния* (при който решението на всяка задача минава през целия процес на моделиране) и *атомарния* подход. Както може да се очаква, резултатите от проведените изследвания показват, че най-добри резултати се получават при съчетаване на двата подхода [2].

Примери от педагогическата практика

В реалностите на съществуващото обучение, най-пълно процесът на математическо моделиране се реализира в извънкласните форми. Ще се спрат на две от тях – проектно обучение и школите за подготовка за олимпиади. Доколкото това са нетрадиционни форми на обучение, педагогическите изследвания в тази област се насочват към *case studies*, анализи на отделен случай, при които не използват стандартизирани процедури и статистическа обработка на данните, а методи като разговори, наблюдение и теоретичен анализ.

В рамките на Лятната изследователска школа на Ученическият институт бях научен ръководител на Симон Симеонов, ученик в 9. клас в НПМГ, по темата Дискретни хармонични функции. Работата по проекта започна на *атомарно* ниво, със запознаване с понятието дискретна хармонична функция и доказване на някои основни

свойства на тези функции, както и на свързаната с тях дискретна задача на Дирихле. Обемът на “теоретичната” част не беше голям (3 стр.), като свойствата бяха доказани от Симон самостоятелно.

Съществената част от работата по проекта започна със задачи от три различни области на физиката и теорията на вероятностите. Задачата на Симон включваше съставяне на реален модел (дискретизация), математически модел (избор на променливи, въвеждане на означения, изразяване на връзките между променливите), решаване на получената математическа задача и интерпретиране на резултата в дадената реална ситуация.

При моделиране на температурно разпределение при топлинно равновесие Симон директно приложи математическия модел за дискретната задача на Дирихле. Интересно е да се отбележи, че изчислителните трудности при работата с математическия модел (в случая система линейни уравнения) Симон реши с помощта на подходящ софтуер.

Втората задача може да се определи като “занимателна”: *На остров има 19 пристанищни и 99 вътрешни града, които са свързани с пътища така, че от всеки град може да се стигне до всяко пристанище. При две преброявания на населението установили, че броят на жителите във всяко пристанище се е запазил и броят на жителите във всеки град е средно аритметичен на броя на жителите на непосредствено свързаните с него градове. Да се докаже, че броят на жителите във всеки град се е запазил.* При тази задача съставянето на математически модел се затрудни на етапа на въвеждане на означения, които позволяват да се изразят връзките между обектите.

Процесът на моделиране при третата задача (определяне на потенциалите във възлите на електрическа верига) бе затруднен в началния си етап, поради *неразбиране на физичната същност на задачата*. Тази задача бе описана много кратко, писмената аргументация на решението беше недостатъчна.

Както при всеки изследователски процес, и при моделирането *мотивацията* е много важна. За Симон беше важно “приятелите му да харесат задачите” и това определи предпочитанието към атрактивни формулировки, каквито предлага задачата за блуждаене в граф. Симон състави задачите “пияница в беда” и “буболечка върху цилиндър”, като описа подробно решенията им. При задачата “буболечка върху кубче”, Симон разшири областта на приложение на дискретните хармонични функции върху граф.

Работата по този проект още веднъж ми показва, че с навлизането на информационните технологии намалява значението на процедурните умения, традиционно свързвани с училищната математика. Така и в обучението по математика би трябвало ударението да се измести от тях, следвайки тенденциите за пренасочване на вниманието от решаването на задачата към способността за формулирането и.

При обучение в този дух се променя ролята на учителя. Методите са различни; обучението е по-малко структурирано, често индиректно. Според изследванията от последните години [2], точно такъв вид обучение развива аналитични умения и мислене от по-високо ниво.

Друга възможност за включване на учениците в процес на активно моделиране дават препоръчителните програми за свободно-избираема подготовка. *Евристичните стратегии* за решаване на “състезателни” задачи всъщност следват етапите на математическото моделиране [7]. Такава е и същността на *изследователския подход* при преподаване на математика.

Математическо моделиране в учебната програма, учебниците и учебните помагала

В рамките на началния и прогимназиалния етап, моделирането е една от основните дейности в обучението по математика. Решаването на т.нар. текстови задачи преминава през някои от етапите на процеса на моделиране. Акцентира се на решаването на математическата задача (уравнение, неравенство и т.н.), като важността на етапа на опростяване на реалната ситуация и формулиране на задача, както и на етапа на интерпретация на резултата, остава недооценена [10].

По-подробно ще разгледаме моделирането в гимназиалния курс. Учебните програми по математика [8] включват съдържателно ядро *Моделиране*, но заложените стандарти като цяло се изчерпват с повтарящи се формулировки като:

- ”Умее да оценява съдържателно получения резултат и да го интерпретира”.
- ”Предвижда в определени рамки очакван резултат.”
- “Умее да моделира геометрична ситуация с уравнение (система уравнения).”

Някои стандарти към ядро *Моделиране* са неподходящо формулирани, а в други теми отсъстват. Например, към тема *Вектори* в 8 клас съответният стандарт е “Знае понятието вектор, операциите

събиране и изваждане на вектори, умножение на вектор с число”, а в тема *Еднаквости* няма стандарти както в 8. клас, така и в програмата за профилирана подготовка за 9. клас. В същото време, подходящите задачи за моделиране в гимназиалния курс са от *интердисциплинарен характер*; за тях не се споменава никъде в съответното ядро.

Липсата на визия за мястото на математическото моделиране в обучението по математика се пренася от учебните програми в учебниците. Например, стандартът за *Моделиране* към тема *Рационални уравнения* включва “решават задачи от икономика, финанси и др.” Такава задача няма в нито един (!) от одобрените от МОН учебници.

Изолирани са случаите на учебни помагала, включващи елементи от математическо моделиране. Такъв опит частично е осъществен в Учебна тетрадка по математика за 8-и клас за практически умения [6]. Към всяка тема от учебното съдържание са предложени идеи за интердисциплинарен проект, както и задачи за моделиране, вкл. от областта на икономиката.

Помагалото намеква идеята за математическо моделиране, но като третостепенна цел в обучаващия процес. Затова са включени неголям брой задачи за моделиране, решенията им пропускат някои етапи от процеса на моделиране, а заданията на проектите не са достатъчно подробни и конкретни.

Това помагало е показателно за начина, по който се “вмъкват” елементи от математическо моделиране в обучението по математика. Те остават встрани от общата *представа* за математика и обучение по математика и се възприемат негативно както от учителите, така и от учениците. Не случайно темата *Комбинаторика*, разглеждаща елементарни дискретни модели, не се разбира, пренебрегва се от учителите и дори напълно се пропуска (според резултатите от зрелостните изпити).

Въпреки приложния си характер, задачите за моделиране в момента се възприемат от учениците като “неуместни”, екстравагантни. Но навярно най-голяма съпротива среща идеята за преподаване в духа на математическото моделиране от страна на учителите по математика. Според едно наблюдение в рамките на проведен експеримент за обучение по моделиране [1], най-добри резултати са постигнати от учителите по изкуства, а математиците са сред последните. Както коментира Хенри Полак, освен че обучението в моделиране изисква различна методика, “за математиците е особено трудно да погледнат на математиката отвън”.

Скептицизмът относно възможностите за преподаване в дух на математическо моделиране в българските училища има и други корени. В процеса на обучение по математика се е запазила една тенденция, описана от Петър Добрев в [9] във връзка с масовизацията на образованието в епохата след 1944 г. Тогавашната политика е насочвала вниманието към достъпността на обучението, за да стане то постижимо за най-слабите, като е обвързвала оценката за работата на учителя с постиженията на учениците. При тези условия цел на учителя по математиката става намирането на алгоритъм за решаване на повече класове задачи. Тези алгоритми стават център на обучението, а рутинните упражнения – негова същност. Днес това е философията на най-тиражираните и предпочитани учебници в България.

Заклучение

Все още широко разпространено е мнението, че математиката е множество факти и процедури, които се изпълняват, за да се пресметне отговор. В същото време у родителите се затвърждава впечатлението, че училището не дава на децата необходимите умения за прилагане на математически знания в не-математически контекст. Поставянето на този вид умения за математическо моделиране като образователни цели налага промяна на съществуващите представи и нагласи относно обучението по математика.

Едно възможно решение е обучение по математика, при което моделирането е не фрагмент, а обща философия. Това предполага както промяна на дизайна на учебното съдържание, така и разработване на методика за преподаване, учебници и учебни помагала, а също използване на богатството от възможности, които предлага проектното и електронното обучение.

Литература

- [1] Burkhardt, H., H. Pollak. (2006) *Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future*. ZDM 2006 Vol. 38 (2), pp.178-195.
- [2] Мааß К. (2006) *What are modelling competencies?* ZDM Vol. 38 (2), pp. 113-142
- [3] Blum, W. et al. (2002). ICMI Study 14: *Application and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document*. Journal für Mathematik-Didaktik, 23(3/4), pp. 262-280.

- [4] България, образование и умения за икономиката на знанието, Доклад от Световната банка <http://siteresources.worldbank.org/BULGARIAINBULGARIANEXTN/Resources/EducationPolicyNote-Bg.pdf>
- [5] Закон за училищното образование,
- [6] Събева, Н., М. Аврамова, Н. Чарадкова. (2009) *Тетрадка по математика за 8. клас за практически умения. Азбуки-Просвета, София.*
- [7] Събева, Н. (2010) *На игра с късмет ... или с таблица!* Математика, 6, стр. 46-47.
- [8] Учебни програми по математика,
http://www.minedu.government.bg/top_menu/general/educational_programs/
- [9] Добрев, П. (2008) *Българският интелект през вековете.* Славика РМ, София.
- [10] Чехларова, Т. *За задачите от моделиране в обучението по математика.* Научни трудове на СУБ, Пловдив, 2002. стр. 287 – 290
- [11] Тофлър, А. (2007) *Революционното богатство.* Обсидиан, София.