Н. Недялков. Толерантные множества как модели в коммуникациях. В: Т. Атанасова (Редактор), Сборник "Моделиране и управление на информационните процеси", София, България, 2010, КТП, София, 2010, стр. 78-84

ТОЛЕРАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА КАК МОДЕЛИ В КОММУНИКАЦИЯХ

Недялко Недялков

Коллеж Телекоммуникаций и Почт
n_nedialkov@hctp.acad.bg

Аннотация

Цель этого изложения - анализировать математическую структуру толерантных множеств и пространств. Толерантные множества рассматриваются в качестве модели двух основных факторов в телекоммуникациях:

- процесс компрессии данных в изображениях;

- признаки принадлежности при формировании множеств информации разного рода.

Произведен сравнительный анализ с вероятностными и нечеткими моделями. Основные свойства толерантных множеств рассмотрены в контексте выбранных моделей. Понятие «толеранс» использовано в качестве метрики толерантных множеств. Представлена интерпретация характерных точек аналитической формы модели. Коротко рассмотрены приложные аспекты моделей.

Ключевые слова*: толерантные множества, толерантные пространства, толеранс, компрессия, признаки принадлежности.*

В контексте темы этой статьи любая математическая задача может быть представлена в 4-х этапах развития: формулирование задачи; выбор модели; решение задачи; интерпретация результатов. На первом этапе задаются начальные условия, раскрывается сущность проблемы. При наличии готовых моделей выбирается наиболее подходящая. При сложных объектах составляется модель из более простых моделей или составляется принципиально новая модель. Этим выбирается стратегия и средства решения задачи. На третьем этапе осуществляется решение задачи, получаются окончательные результаты при соблюдении заданных правил. Первые три этапа - это по существу математическая часть задачи, а последний этап – *интерпретация результатов*, отражает приложные аспекты задачи в целом. Последний этап не менее важен и критичнее остальных. Он определяет значимость задачи и масштабы ее приложения. Могут быть приведены множество примеров, в которых интересные и содержательные результаты остаются незамеченными в *латентном состоянии.* Яркий пример преобразования Радона, опубликованные в 1918 году. Было необходимо более 40 лет, чтобы быть заново открытыми как одно из наиболее мощных информационных средств– *томография*. В некоторой степени в латентном состоянии остаются толерантные множества, хотя они были впервые использованы полвека назад.

Цель этой статьи анализировать математическую структуру – толерантные множества, как средство моделирования процессов, протекающих в информационных системах. Объект внимания - процесс *компрессии* потока, соответственно объему данных при *анализе, передачи записи и синтезе* изображений. Встает вопрос о компрессии более двух порядков (более 200–250 раз), которая используется в современных информационных технологиях, цифровых, видео и телевизионных коммуникациях. Потенциально возможна компрессия более трех порядков, которая бы изменила существенно концепцию связи с помощью технических средств. Есть основания полагать, что такая компрессия осуществляется в мозгу, но нет прямых доказательств, поскольку неизвестно как осуществляется сам процесс записи и сохранения информации.

Сущность проблемы можно свести к тому, что понятие *информация* - первично, т.е. не подлежит определению. Многие специалисты разделяют это мнение. Оно удобно при рассмотрении общих вопросов информации и может быть вызвано двумя разными причинами:

1. Многообразие приложений порождает многообразие моделей, которые нередко несопоставимы, в результате чего они не могут быть охвачены достаточно коротким и ясным определением.
2. Существует значительное количество признаков, указывающих на то, что сущность информации и ее влияние на живую природу не раскрыты до конца, хотя имеются весьма весомые теории.

Математическая теория связи (К. Шеннон, 1948) развивается и получает свой окончательный вид в первой половине 20-того века. Она отражает состояние коммуникаций с помощью технических средств того времени и ее можно рассматривать как отклик на тенденции в естественных науках середины 19-го и начала 20-го века. Как хорошо известно, в то время возникает и развивается *индетерминизм* как новый подход в науке. Окончательно он утверждается вместе с принципом *неопределенности* (В. Гейзенберг, 1928). Вероятность p становится основным фактором и аргументом в моделях. Статистические методы входят в расцвет своего развития. Информация, как понятие, превращается в научную категорию. Это предполагает переход от первичного понятия в новую дефинитивную форму. Это постигается для сравнительно широко приложимого, но частного случая – *символьные коммуникации*, которые в начале 20-го века занимают доминирующее положение. В широком смысле - информация остается синонимом понятий *сведения* и *данные*. В узком смысле вводятся детали, которые отражают специфику области применения.

Для ясности и наглядности удобно использовать понятия *адресованная* и *неадресованная информация, естественные коммуникации* и *коммуникации с помощью технических средств.* Неадресованная информация возникает в результате естественных процессов, протекающих в окружающей среде, а естественные коммуникации осуществляются органами чувств без технических средств. Математическая теория связи построена на адресованной информации в символьных коммуникациях с помощью технических средств.

Информационный поток в широком смысле, т.е. поток сведений и данных представляется как твердый, дискретный флюид – зернистая структура с одинаковыми размерами отдельных зерен, объемом в один бит. В первой информационной модели (Хартли, 1928), в узком смысле, относительное количество информации в каждом символе определяется вероятностью его появления в совокупности символов, и точнее, по эмпирическим соображениям, от логарифма вероятности

$$I=-log\,\boldsymbol{p}.$$

Модель предельно проста, но абстрактна и приложима только для событий с одинаковым распределением вероятности.

В модели Шеннона (1948), которая является основой современной теории связи, с введением понятия *энтропия H*

$$H=-\sum p_i \log p_i ,$$

как мера относительного количества информации, существенно расширяется область приложения теории на объекты с неравномерным распределением вероятности. Модель отличается своей общностью, но не менее абстрактна, чем модель Хартли. Модель успешно используется при решении ряда общих вопросов, таких как *пропускная способность канала связи, шумоустойчивость, эффективность кодирования* и т. д. Приложение модели в телефонной связи, телевидении, современных технологиях иногда дает неудовлетворительные результаты. По известным причинам модель неприложима при одиночных событиях, многопараметрических объектах и обучаемых системах. Часто результаты сложны и трудно поддаются интерпретации.

Статья "Бандвагон", в которой Шеннон указывает на частный характер своей модели, вызывает появление множества моделей, из которых наиболее интересны модели Брюлиена, Фано, Фишера, Майлса, Колмогорова, Кулбака, Вайса и др. В них раскрывается многообразие специфических условий, многие из которых противоречивы, что указывает на невозможность достижения ясной и краткой дефиниции информации в смысле вероятностной модели.

Во второй половине 20-го века среди множества достижений в области математики появились две структуры, которые интересны с точки зрения моделирования процессов в информатике. Это *нечеткие множества* (Заде, Zadeh, 1962) и *толерантные множества* (Зиман, Zeeman, 1962).

Нечеткие множества (Fuzzy Sets) утвердились как основной математический инструмент. Им посвящен обширный литературный фонд. Интерес к этим множествам обусловлен тем, что понятия *нечеткость, размытость* интуитивны и легко интерпретируются в различных конкретных приложениях. С математической точки зрения нечеткие множества вносят больше общности, в сравнении с классическими множествами и этим становятся *надмножествами*. *Характеристическая функция* множества

$$\eta_A = \begin{cases} 1, & ако\ x \in X, \\ 0, & ако\ x \notin X. \end{cases}$$

трансформируется в *функцию принадлежности*. Кроме множества и его дополнения появляется третье множество - *граничное подмножество*, содержащее граничные элементы, для которых характеристическая функция принимает промежуточные значения $0<\eta<1$. В классических множествах граничное подмножество пусто. Граничное подмножество позволяет наглядно представить граничные условия и их влияние на конечные результаты. Нечеткие множества очень удобны в частотной области сигналов и изображении при моделировании временных и пространственных фильтров, в матричной оптике, при моделировании геометрических параметров изображений.

Толерантные множества (Tolerant Sets) первоначально появились в областях, трудно поддающихся формализации; в физиологии и психологии при моделировании зрения [2], [3]. Впоследствии толерантные множества приобретают вид математической структуры [4], [5]. В широком смысле понятие толерантности связано с интуитивным представлением о терпимости. В узком смысле, как математическое понятие *толерантность* связано с представлением о *сходстве, неразличимости, непрерывности* (идея Пуанкаре, [1]). *Отношение толерантности* на множестве *S* можно задать условием: *два подмножества X и Y толерантны, если они содержат хотя бы один общий элемент. Это означает, что* $X\boldsymbol{T}Y$ *при условии* $X\cap Y\neq\varnothing$.

Сходство между различными объектами имеет смысл только тогда, когда указана совокупность признаков, относительно которой это сходство устанавливается. Два объекта сходны (толерантны), если они обладают хотя бы одним общим признаком. В узком смысле сходство и толерантность - *синонимы*.

Отношение толерантности *рефлективно,* поскольку каждый объект не различим от самого себя. Отношение толерантности *симметрично,* поскольку сходство двух объектов не зависит от того, в каком порядке они сравниваются. Отношение толерантности в общем случае *не транзитивно*. Если один объект сходен со вторым, а второй сходен с третьим, то вовсе не следует, что первый сходен с третьим:

$$x\sim y;\ \ y\sim z;\ \ \because x\sim z,$$

где ~ знак сходства; ∵ - знак “не следует”. Таким образом, отношение толерантности оказывается более общим, чем отношение эквивалентности. Толерантность переходит в эквивалентность при

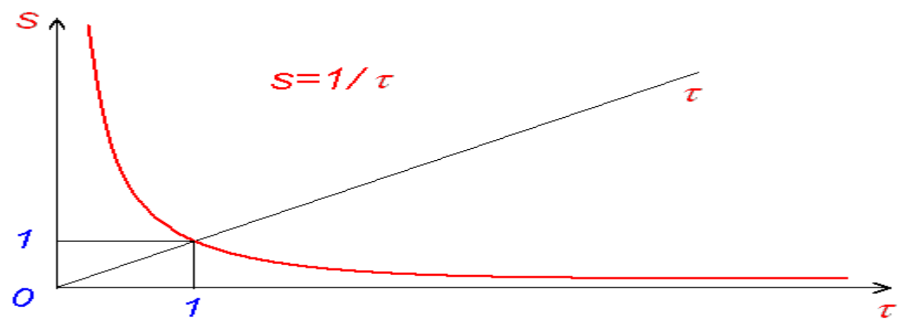
$$x\sim z.$$

Разные формы представления множеств (аналитические, графичные, табличные, метрические и топологические пространства), присущи и толерантным множествам, что предоставляет большие удобства и гибкость при моделировании разного рода объектов.

Процесс компрессии информации связан с понятиями *количество* и *качество*. Понятие *количество* объективно в своей сущности и предполагает возможность измерения в модели, т. е. модель должна быть выражена метрическим пространством. Для этой цели необходимо представить *сходство* ***s*** как метрическое пространство. В качестве меры используется понятие *толеранс* –***τ***, которое в технике означает отклонение от предварительно заданной нормы. Большие возможности моделирования содержит отношение между сходством ***s*** и мерой ***τ*.** Тут принято простейшее отношение – *обратная пропорциональность*

$$s=1/\tau \,,$$

графически представленное на фигуре:



На графике можно определить три сингулярные области:

1. $\tau\to 0$; $s\to\infty$; - область полного сходства;
2. $\tau\to\infty$; $s\to 0$; - область несопоставимости;
3. $\tau=1$; $s=1$; - область необходимой достаточности.

Все три области размыты с нечеткими границами, что предоставляет определенные удобства при трудно формализуемых задачах как компрессия данных в изображениях при заметном ухудшении качества, а также при учете субъективного фактора. Наглядно могут быть представлены такие понятия как *необходимые и достаточные условия, информационная недостаточность, информационный излишек*. При многопараметрических объектах очень удобна табличная форма. Понятие *сходство* позволяет учесть форму помехи на эффект помехи.

Эта модель дает положительный результат как единый подход при рассмотрении записи, сохранения, передачи и защиты информации в учебных курсах.

Толерантные множества и связанные с ними понятия легко используются при рассмотрении общих философских вопросов. Сходство можно рассматривать как промежуточное состояние детерминизма и индетерминизма в смысле неопределенности.

Бесконечная толерантность позволяет осуществить логический переход к символике в информации к распознаванию образов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. О науке.//М.: Наука, 1990
2. Zeeman E. The topology of the brain and visual perception. Preutice Hall, 1962
3. Зиман Э., Бьюнеман О. Толерантные пространства и мозг. М.: Мир, 1970
4. Шрейдер Ю. Равенство, Сходство, Порядок. М.:Наука, 1974
5. Сигорский В. Математический аппарат инженера. Киев, Техника, 1977

TOLERANT SETS AS MODELS IN COMMUNICATIONS

Nedialko Nedialkov, Ph D
College of Telecom and Post
n_nedialkov@hctp.acad.bg

Abstract

The purpose of this presentation is to analyze the mathematical structure of tolerant sets and spaces as models of two fundamental factors in communications:

- *the process of compression of data in the pictures;*
- *the signs of belonging in forming various sets of information.*

A comparison with probability and fuzzy models is being used.

The base properties of tolerant sets are considered in the context of the chosen models.

The tolerance is used as a metrics in the tolerant sets.

An interpretation of the character points in the analytical presentation is given.

The application aspects are briefly discussed.

Key words: *tolerant sets, tolerant spaces, tolerance, information model, compression, sign of belonging.*