

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. дмн Иван Ланджев
относно дисертационен труд
за придобиване на научната степен “Доктор на науките”

Тема: ”Екстремални задачи в комбинаторната евклидова геометрия”

Автор: доц. д-р Данила Дмитриевич Черкашин

Област на висше образование: “4. Природни науки, математика и информатика”

Професионално направление: “4.5. Математика”

1. Обща характеристика на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд е посветен на задачи от област на математиката, известна като комбинаторна геометрия. Целта на дисертанта е да докаже нови характеризационни и структурни резултати за различни задачи от комбинаторната геометрия, някои от които се считат за класически и привличат голям интерес у изследователите. Общото ми впечатление е, че дисертантът е много добре запознат със състоянието на изследванията през последните години. Всички разглеждани задачи се считат за теоретично значими в полето на комбинаторната геометрия.

Работата обобщава изследвания на дисертанта през последните 10 години.

2. Основни научни резултати на дисертационния труд

Дисертационният труд е в обем от 148 нестандартни машинописни страници и се състои от увод, шест глави и списък на използваната литература, включващ 128 заглавия.

Първата глава е уводна. В нея е направен преглед на задачите, които се разглеждат в дисертацията. Описани са целите, които авторът си поставя и е представен списък на публикациите, въз основа на които е написан дисертационният труд. Оригиналните резултати са описани в следващите шест глави, които са относително самостоятелни. Във всяка от тях се описват няколко резултата по проблем, които се считат за класически в комбинаторната геометрия.

В глава 2 авторът разглежда задачата за намиране на Шайнерови дървета в евклидовата равнина. Той се концентрира върху решаването на следните две задачи:

- (1) Дадено е крайно множество P от точки в $\mathbb{R}^d$. Да се намери свързано множество St с минимална дължина, свързващо точките на P .
- (2) Дадено е компактно множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$. Да се намери множество St с минимална дължина, за което $St \cup \mathcal{A}$ е свързано.

Централният резултат в тази глава се състои в доказателство на твърдението, че множеството от n -точкови конфигурации, за които решението на планарната задача на Шайнер не е единствено, има хаусдорфова размерност, която не надхвърля $2n - 1$ (Теорема 2.1.1). Авторът изследва конфигурациите от n точки в $\mathbb{R}^d$, за които решението е единствено. По втората задача авторът конструира няколко неразложими примера.

В глава 3 се разглежда т.нар. задача на Гилбърт-Шайнер, отнасяща се до намиране на минимума на специалния израз

$$\sum_{\{x,y\} \in E} C(|m(x,y)|) \cdot \rho(x,y),$$

наречен функционал на Гилбърт за (μ^+, μ^-) -потока за специално теглова функция $C(x) = x^p$, $p \in (0, 1)$. Дисертантът намира условия за тази теглова функция, при които всички точки на разклоняване в произволно планарно решение са от степен 3. В Теорема 3.1.2 се доказва, че не съществуват точки на разклоняване, които са от степен 4 или по-голяма. Основният резултат в тази глава е Теорема 3.3.1. Съгласно тази теорема за всеки две мерки μ^+, μ^- в $\mathbb{R}^2$ и допустима теглова функция C наличието на точка на разклоняване от степен поне 4 налага съществуването на (μ^+, μ^-) -поток със строго по-малка стойност на функционала на Гилбърт.

В глава 4 се разглежда задачата за минимизиране на максималното разстояние до зададено компактно множество. По-специално, нека са дадени компактно множество $M \subset \mathbb{R}^d$ и константа $l > 0$. Задачата е да се намери компактно множество Σ с дължина l , което минимизира максималното разстояние до точка y от M . Тази глава е най-голямата в дисертацията и е структурирана в осем раздела. Главният резултат тук е Теорема 4.3.2, която описва множеството, минимизиращо максималното разстояние за широк клас от изпъкнали затворени криви, по-специално криви с радиус на кривината поне $5r$ във всяка точка. В този случай произволно минимизиращо решение за M е обединение на арка M_r и два линейни сегмента, допирателни до M_r в края на дъгата (такава фигура се нарича подкова).

В глава 5 се разглежда задачата за определяне на числото на независимост на специални графи от тип графи на Джонсън. Тези графи, които се означават с $J_{\pm}(d, k, t)$, имат за върхове всички вектори от $\{0, 1, -1\}^d$ с точно k ненулеви компоненти; два върха са съседни тогава и само тогава, когато скаларното им произведение е t . С тези графи са свързани и графите $K_{\pm}(d, k, t)$, които имат същото множество от върхове, но за които съседство се задава с условието скаларното произведение да е най-много t . В тази глава дисертантът определя числото на независимост (мощност на максимална антиклика) на $J_{\pm}(d, k, t)$ за нечетни отрицателни t , когато d е по-голямо от някаква константа, която зависи от k и t .

Главните резултати от тази глава се съдържат в теореми 5.1.7–5.1.9 (публикувани в работата [15]) и теореми 5.1.10–5.1.12 (публикувани в [23]).

В първата група от теореми се определят точните стойности на числата на независимост $\alpha[J_{\pm}(d, k, -1)]$, $\alpha[J_{\pm}(d, k, t)]$, d - отрицателно, нечетно, и $\alpha[J_{\pm}(d, k, 0)]$

за големи стойности на d . В теорема 5.1.7 се доказва, че за $d > k2^{k+1}$ числото на независимост на $J_{\pm}(d, k, -1)$ се задава с биномния коефициент $\binom{d}{k}$. Теорема 5.1.8 обобщава този резултат, като замества -1 с произволно нечетно отрицателно t :

$$\alpha[J_{\pm}(d, k, t)] = S(k, |t| - 1) \binom{d}{k},$$

където $S(d, D)$ е определена сума от биномни коефициенти. Най-накрая в теорема 5.1.9 се твърди, че за $d > \frac{9}{2}k^32^k$

$$\alpha[J_{\pm}(d, k, 0)] = 2 \binom{d-1}{k-1}.$$

Доказателствата на тези резултати се основават на т.нар. метод на Катона за усредняване.

Втората група от резултати се отнася до хроматичното число на графите $J_{\pm}(d, 2, -1)$, $J_{\pm}(d, 3, -1)$ и $J_{\pm}(d, 3, -2)$. Теорема 5.1.9. и 5.1.10 дават асимптотичните граници:

$$\log_2 d \leq \chi(J_{\pm}[d, 2, -1]) \leq \log_2 d + \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \log 2 \log_2 d,$$

и

$$c \log_2 d \leq \chi(J_{\pm}[d, 3, -1]) \leq C \log_2 d,$$

където c и C са константи. Теорема 5.1.12 дава долна и горна граница за хроматичното число на графите $J_{\pm}(d, 3, -2)$:

$$\lceil \log_2 \lceil \log_2 d \rceil \rceil \leq \chi(J_{\pm}[d, 3, -2]) \leq 4 \lceil \log_2 \lceil \log_2 d \rceil \rceil + 6.$$

Глава 6 посветена на задачата за определяне на хроматичното число на двумерните сфери $S^2(r)$. Едно оцветяване на такава сфера се счита за правилно, ако при него не съществува двойка от монохроматични върхове, които са на разстояние 1. Интересните случаи са при радиуси $r > 1/2$. Относително лесно е да се покаже, че за такива r е в сила $\chi(S^2(r)) \geq 3$. За да се види това е достатъчно да се вземе цикъл с нечетна дължина от точки, разположени върху окръжност от $S^2(r)$ с радиус $r_1 < r$, при който последователните точки са на разстояние 1 една от друга. В една своя статия Г. Симонс доказва, че за $r \geq \sqrt{3}/3$ е в сила по-добра оценка, а именно $\chi(S^2(r)) \geq 4$. Той изказва и хипотезата, че това е в сила за всички сфери с радиус $r > 1/2$.

Централният резултат в тази глава е доказателството на хипотезата на Симонс: за всяко оцветяване в три цвята на 2-мерната сфера с радиус $> 1/2$ съществува двойка от върхове, които са едноцветни и са на разстояние 1. В тази глава е включено и красивото следствие, че за $1/2 < r \leq \sqrt{3} - \sqrt{33}$ хроматичното число $\chi(S^2(r))$ е точно равно на 4.

В глава 7 авторът изследва задачата за определяне на хроматичното число на т.нар. 3-мерни слоеве Слице(3, 6, ε), където Слице(d, k, ε) се дефинира като $\mathbb{R}^d \times [0, \varepsilon]^k$. Тези хроматични числа се оказват значими при определяне на хроматичното число на реалното d -мерно пространство поради очевидните неравенства:

$$\chi(\mathbb{R}^d) \leq \chi(\text{Slice}(d, k, \varepsilon)) \leq \chi(\mathbb{R}^{d+k}).$$

Главните резултати тук се съдържат в теореми 7.1.2 и 7.1.3. В първата е доказано, че съществува такова положително ε_0 , че за всяко $\varepsilon < \varepsilon_0$ е в сила неравенството

$$10 \leq \chi(\mathbb{R}^3 \times [0, \varepsilon]^6).$$

Във втората теорема е доказано, че за всяко правилно оцветяване на $\mathbb{R}^d$ в краен брой цветове съществува точка от регулярен симплекс $T \subset \mathbb{R}^d$ с дължина на реброто $a = \sqrt{2d(d+1)}$, което принадлежи на изпъкналите обвивки на поне $d+1$ цвята.

Тази глава съдържа и интересното следствие $\chi_\varepsilon(\mathbb{R}^3) \geq 10$, където $\chi_\varepsilon(\mathbb{R}^d)$ за минималния брой вектори, за които съществува оцветяване на $\mathbb{R}^d$ без двойка върхове на разстояние, съдързащо се в интервала $[1, 1 + \varepsilon]$.

Всяка от главите в дисертационния труд завършва със списък от нерешени задачи, които дисертантът разглежда като значими.

3. Публикации свързани с дисертационния труд

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в 10 статии. Осем от статиите са публикувани или приети за публикуване, а две са депозирани в arXiv и са представени за публикуване, като се очаква приемането им в близките месеци. Пет от статиите са в списания с импакт-фактор, две са в списания с SJR, а една в списание, реферирано в Zentralblatt. Статиите са публикувани както следва:

- Optimization and Calculus of Variations (Q2, IF 1.295) – 1 статия
- Fractal and Fractional (Q1, IF 5.4) - 1 1 статия
- Bulletin of the Brazilian Math. Society (Q3, IF 0.7) – 1 статия
- Discrete and Computational Geometry (Q3, IF 0.8) – 1 статия
- Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI (SJR 0.314, Q3) – 1 статия
- International Mathematics Research Notices (Q2, IF 1.000) – 1 статия
- St. Petersburg Math. Journal – 1 статия (submitted)
- Pure and Applied Functional Analysis – 1 статия (to appear)
- Serdica Math. Journal – 1 статия (submitted)

В една от публикациите Данила Черкашин е единствен автор, в шест от статиите той има един съавтор и в три – трима съавтори. Приемам, че във всички публикации приносът на Данила Черкашин е равностоеен на този на останалите съавтори.

Кандидатът е представил списък с 24 цитирания, които са в статии, публикувани в реферирани списания. Това показва, че резултатите му са известни и добре оценени в професионалната общност.

Представените публикации и цитирания удовлетворяват и дори надхвърлят минималните национални изисквания, описани в Закона за развитие на академичния състав, правилника за прилагането му и специфичните правилници на БАН и ИМИ-БАН. В представените публикации няма установено плагиатство.

4. Бележки и коментари по дисертационния труд

Във връзка с дисертационния труд имам следните забележки, въпроси и коментари:

- (1) Дисертацията е оформена отлично. Изловението е ясно и разбираемо. Към текста са приложени повече от 50 чертежа, които онагледяват доказателствата и позволяват по-лесното им проследяване.
- (2) Номерацията на твърденията - Теореми, Леми, Забележки и пр. – е малко объркваща. Така например, в текста има Лема 2.4.1, Дефиниция 2.4.1, Теорема 2.4.1 и Забележка 2.4.1. разбира се, това е въпрос на вкус, но за мен лично е за предпочитане единно номериране всички твърдения в рамките на всяка глава..
- (3) Струва ми се, че долната граница в теорема 5.1.10. (стр.101) е $\log_2 d$. (Това вероятно се дължи на промяна на означенията.)
- (4) Намирам за много положително, че всяка глава завършва със списък от нерешени задачи, които набелязват насоки за бъдещи изследвания.

Направените бележки не са по същество и не променят общото ми много добро впечатление от големите по обем и задълбочени изследвания, проведени от автора.

5. Автореферат и авторска справка

Авторефератът и авторската справка са направени съгласно изискванията и отразяват правилно резултатите и приносите в дисертационния труд.

6. Заключение

Представеният дисертационен труд, авторефератът и свързаните с тях научни трудове и документи показват, че доц. д-р Данила Дмитриевич Черкашин е ут-

върден специалист в комбинаторната геометрия със съществени лични приноси по темата на дисертационния труд.

Анализът на дисертационния труд показва, че той съдържа резултати, които представляват оригинални приноси в комбинаторната геометрия. В него дисертантът показва задълбочени теоретични познания в различни области на математиката като комбинаторната геометрия, класическата комбинаторика, топологията, реалния анализ и др. С това той отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ, на Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и Правилниците за условията и реда на придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности на БАН и на ИМИ при БАН. Представените от кандидата научни трудове не повтарят такива от предишни процедури за придобиване на научно звание и заемане на академична длъжност. В представените научни трудове няма доказано по законоустановено ред плагиатство.

Гореизложеното ми дава основание да дам положителна оценка на дисертационния труд “Екстремални задачи в комбинаторната евклидова геометрия” и убедено да препоръчам на Научното жури да присъди на доц. д-р Данила Дмитриевич Черкашин научната степен “доктор на науките” в област на висше образование “4. Природни науки, математика и информатика”, професионално направление “4.5. Математика”.

София, 28.04.2024 г.

Рецензент:

(проф. д.м.н. Иван Ланджев)