Институт по математика и информатика
Българска академия на науките

ПРИЛОЖЕНИЕ НА СТОХАСТИЧНИ И ОПТИМИЗАЦИОННИ МЕТОДИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ НА РИСКА И ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ФИНАНСОВИ ИНСТРУМЕНТИ

Драгомир Колев Неделчев

Автореферат на дисертация

за присъждане на научна и образователна степен

ДОКТОР

в професионално направление 4.5 Математика
(Теория на вероятностите и математическа статистика)

Научен ръководител
доц. дн Цветелин Заевски

София, 2025г.

Предговор

Пазарният риск заема специално място сред финансовите рискове, тъй като се намира на кръстопътя на екзогенни и ендогенни фактори. Струва си да се спомене ролята на надзорните органи сред екзогенните фактори и взаимодействията на различни рискови фактори на съвременните финансови пазари. Пример за ендогенен фактор е рисковата мярка, която пазарният участник прилага, и интерпретацията, която се дава на стойността на рисковата мярка. Пазарните участници се различават по свободата да избират рисковата мярка. Колкото по-регулиран е един пазар, толкова по-малка е тази свобода. Следователно, екзогенните и ендогенните фактори се преплитат.

Коя рискова мярка да се приложи е избор, който зависи от това къде е насочен фокуса ни. Ако се интересуваме от една точка в лявата част на разпределението на доходността или ако трябва да спазваме финансови регулации, тогава избираме застрашената стойност (Value-at-Risk или VaR). В случай че се нуждаем от информация как лявата опашка се държи под определен праг и не е необходимо да правим бек-тестове, тогава ползваме очаквания недостиг (Expected Shortfall или ES). Експектилната рискова мярка (ERM) се избира, когато се очаква рисковата мярка да предоставя информация за двете опашки едновременно и когато се нуждаем от рискова мярка, която е както кохерентна така и оценима (elicitable). Ентропичният VaR ($EVaR$) е предпочитаната рискова мярка, когато трябва да идентифицираме горната граница на VaR и рисковата мярка трябва да бъде кохерентна.

Но изборът на рискова мярка не е достатъчен за смекчаване на пазарния риск. Пазарният участник оперира на конкретен пазар, който се описва с определени модели. Затова, инструментариумът за управление на риска трябва адекватно да отразява стилизираните факти на този пазар. Тук се намесват моделите за описание на динамиката на доходността. Множество стохастични процеси могат да бъдат използвани, за да се получи необходимата еволюция на цените. Търси се оптимална комбинация от модел на доходност и рискова мярка, например цената на основния актив следва модела на Хестън, докато пазарният риск се измерва чрез ERM.

Дисертацията има следната стуктура: Мотивацията на този труд е представена в Глава 1. Глава 2 описва основните елементи на обсъжданите рискови мярки и прилаганите стохастични процеси. Моделите, използвани за описване на динамиката на цените, са разгледани в Глава 3. Към момента надзорниците изискват банките да прилагат две квантилни рискови мярки (VaR и ES), които се обсъждат в Глава 4. Глава 5 представя ERM като рискова мярка, която преодолява слабите страни на VaR и на ES, понеже е както кохерентна така и оценима. При модела на Хестън имаме работа с началната волатилност, която не се наблюдава пряко на пазара. Глава 6 е посветена на подход, който прилагаме към модела на Хестън и неговите производни, когато не можем да измерваме този параметър. През последните години нараства броя на рискови мярки, предназначени да отговорят на специфични изисквания. Така например, ентропичният VaR е създаден да представлява горната VaR граница. Тази рискова мярка е представена в Глава 7. Дисертацията съчетава теоретични и практически аспекти на измерването на пазарния риск. В Глава 8 емпирично изследваме някои теоретични въпроси, обсъдени в предишни глави. Конституирането на нови стилизирани факти изисква разработването на подкрепящите ги теоретични модели. Глава 9 разглежда грапавата волатилност (rough volatility) като характеристика на финансовите пазари през последното десетилетие. Дисертацията приключва с Глава 10.

Съдържание

Глава 1

Въведение

1.1 Цел на дисертацията

Дисертацията има за цел да изследва приложението на усъвършенствани мярки за пазарен риск към модели на логаритмизирана доходност на активите, които обхващат различни аспекти на пазарните реалности. Тя изследва традиционно прилаганите рискови мярки, като VaR и ES, тяхните предимства и недостатъци, които се наблюдават през последните десетилетия. Дисертацията допринася за актуалното търсене на рискови мярки, които отговарят на нарастващите бизнес изисквания. През последните години ERM и $EVaR$ привличат вниманието на академичната общност поради някои свои предимства, като комбинирането на кохерентност с оценимост (такъв е случаят на ERM) или защото мярката представлява горната VaR граница (в случая на $EVaR$).

За постигане на тази цел, в дисертацията се използват нови теоретични подходи, които дисертацията проверява емпирично чрез данни за индекса S&P500 за дълъг период от време. Тази проверка включва калибриране на пет стохастични модела.

1.2 Актуалност на темата

Рисковите мярки се намират в дневния ред на финансовите математици по две основни причини: осигуряване на капиталови буфери в случай на кризи и портфейлна оптимизация чрез минимизиране на рисковата експозиция. Кредитните институции следват задължителни за изпълнение препоръки, които са приети от регулатора на основата на т.нар. допустими множества (acceptance set). По тази причина, риск мениджърите прилагат рисковата мярка, която отговаря на регулаторните изисквания.

В навечерието на президентските избори в края на 2024 г. американските надзорници отложиха въвеждането на нови изисквания. С други думи, дисертацията се появява в момент, когато има несигурност относно това в каква посока ще поемат надзорниците.

1.3 Методология

Дисертацията ползва следната методология:

1. Бъдещата стойност на финансова позиция се представя като случайна величина.
2. Налагаме изискването рисковата мярка да бъде кохерентна и/или оценима (т.е. поддава се на бек-тестове).
3. Анализираме дали сложните рискови мярки (ERM и $EVaR$) превъзхождат доминиращите в момента мярки (квантилния VaR и ES).
4. Сравняваме възможностите на 5 стохастични модела да улавят някои стилизирани факти на съвременните финансови пазари.
5. Ние считаме, че индексът S&P500 е движен от стохастичен процес, вместо да изследваме статистическите му свойства чрез емпирични данни.
6. Калибрираме стохастични модели спрямо исторически данни.
7. Прилагаме обратна трансформация на Фурие към характеристичните функции на модели, тъй като някои модели нямат PDF в явен вид.
8. За да се отчетем грапавата волатилност (rough volatility) като съвременен стилизиран факт, заместваме стандартното Брауново движение като стохастичен двигател на моделите с дробно Брауново движение.

9. Прилагаме линейна регресия към логаритмизираните доходности, за да изведем стойността на индекса на Хърст и да проверим по този начин дали днешните финансови пазари имат грапава волатилност.

10. Базираме $EVaR$ на функцията пораждаща моменти (ФПМ), извеждаме ФПМ за петте обсъждани модела и намираме множеството, в което тя е дефинирана.

11. Вместо с ненаблюдаваната начална волатилност работим с нейната стойност, интегрирана по стационарното разпределение на процеса.

1.4 Оригинални приноси

Дисертацията съдържа следните новости:

1. Разглежданите рискови мярки се изследват при предположението, че изследваният обект (актив, акция, стока, индекс, др.) се движи от стохастичен процес.

2. ES и ERM се извеждат чрез използване на отрязано очакване (truncated expectation);

3. определено е множеството, в което е дефинирана ФПМ за доходността по Хестън, осреднена спрямо началната волатилност;

4. изведени са уравнения, които описват $EVaR$, и са доказани условията за съществуване и единственост на решенията;

5. емпирично се изследват исторически данни за индекса S&P500, като анализът е направен както по рискова мярка, така и по стохастичен модел;

6. намерени са емпирични доказателства, че а) волатилността на индекса S&P500 е грапава, тъй като стойността на индекса на Хърст е по-малка от $\frac{1}{2}$, б) профилът на тази стойност варира в определен диапазон, и в) се движи в пакети.

7. потвърденси са заключенията на Gatheral[6], че при индекса S&P500 съществува линейна връзка между скалиращия фактор и стойността на индекса на Хърст. Обаче, установено е, че тази връзка е нелинейна за други индекси - напр. STOXX50E, FTSE, и KSE.

Глава 2

Основни резултати

Глава 2 от дисертацията представя рисковата мярка и използваните стохастични процеси.

2.1 Рискова мярка

Дисертацията дефинира рисковата мярка по следния начин:

Дефиниция 1. *Рисковата мярка ρ на позицията ζ е изображението $\rho(\zeta) : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, където $\mathcal{G}$ е множеството от всички рискове (случайни величини).*

Използваме дефиницията на Artzner et al.[2] за кохерентност на рискова мярка:

Дефиниция 2. *Рисковата мярка $\rho(\cdot)$ е кохерентна, ако отговаря на следните условия:*

1. *инвариантност: Ако ζ е случайна величина и $x \in \mathbb{R}$, то $\rho(\zeta + x) = \rho(\zeta) - x$.*

2. *субадитивност: Ако ζ_1 и ζ_2 са случайни величини, то $\rho(\zeta_1 + \zeta_2) \leq \rho(\zeta_1) + \rho(\zeta_2)$.*

3. *монотонност: Ако ζ_1 и ζ_2 са случайни величини и за всички пътеки $\zeta_1 \leq \zeta_2$, то $\rho(\zeta_1) \geq \rho(\zeta_2)$.*

4. *положителна еднородност: Ако ζ е случайна величина и c е положителна константа, то $\rho(c\zeta) = c\rho(\zeta)$.*

Използваме Дефиниция 2.2 на Föllmer and Schied[5] за допустимото множество $\mathcal{A}_\rho$ на рискова мярка $\rho(\zeta)$:

Дефиниция 3. *Допустимото множество $\mathcal{A}_\rho$ за рискова мярка $\rho(\zeta)$ включва позициите за които*

$$\mathcal{A}_\rho = \{\zeta \in \mathcal{G} \mid \rho(\zeta) \leq 0\}.$$

Тази дефиниция позволява рисковата мярка да има отрицателна стойност, когато говорим за печалба (profit), а не за загуба (loss). Понеже вероятностната мярка не приема отрицателни значения, заключаваме, че рисковата мярка е различна от вероятностната мярка по своята природа. Допустимото множество е полезен инструмент, тъй като позволява да се изведе рисковата мярка от него:

Твърдение 1. *На допустимото множество $\mathcal{A}$ съответства рискова мярка $\rho(\zeta)$*

$$\rho(\zeta) = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m + \zeta) \in \mathcal{A}\},$$

където m е минималната стойност на безрисков актив (например облигация с нулев купон - see Zaevski et al.[15]), който ако бъде добавен към позицията ζ, прави общата позиция $m + \zeta$ приемлива за регулатора.

Доказателство 1. *Виж доказателството на Твърдение 4.6 от Föllmer and Schied[5].*

Дисертацията се позовава на дуалното представяне на кохерентна рискова мярка:

Твърдение 2. *Изображението $\rho(\zeta) : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ е кохерентна рискова мярка тогаа и само тогава когато съществува подмножество $\mathcal{S} \subset \mathcal{Q}$, такова че*

$$\rho(\zeta) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-\zeta], \zeta \in \mathcal{G},$$

където $\mathcal{Q}$ е множество от вероятностни мярки $\mathbb{Q}$, които са еквивалентни на реалната вероятностна мярка $\mathbb{P}$.

Доказателство 2. *Виж доказателството на Твърдение 4.15 от Föllmer and Schied[5].*

2.2 Модели на логаритмизираната доходност на активи

Глава 3 представя 5 модела, използвани за описание на динамиката на логаритмизираната доходност на активи. Тези модели използват следните стохастични процеси: стандартно Брауново движение, дробно Брауново движение, процеси на Леви и по-конкретно Поасонов както и сложен Поасонов процес, и модифициран устойчив процес (tempered stable process).

2.3 Квантилни рискови мярки

Глава 4 изследва традиционните рискови мярки, които се основават на квантила.

2.3.1 Застрашена стойост (Value at Risk)

VaR се изчислява за разпределението на логаритмизираната доходност. Прилагаме формула (6.5) от Rachev et al. [10], за да формулираме VaR:

$$VaR\left(\epsilon;\zeta\right) = -\inf\left\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\left(\zeta < x\right) > \epsilon\right\} \equiv -F^{-1}\left(\epsilon\right) \equiv -q_{\zeta}\left(\epsilon\right),$$

където ζ е логаритмизираната доходност, нивото на значимост (significance level) $\epsilon \in (0,1)$, F^{-1} е обратната на CDF, $\mathbb{P}$ е реалната вероятностна мярка, а q - квантилната функция. Дефинираме VaR като противоположното по знак на квантила. Тази мярка има следните свойства:

- кохерентност: VaR не е кохерентна рискова мярка, тъй като не е субадитивна, т.е. не отразява правилно резултатите от диверсифициране на портфолиото. Поради своята некохерентност, VaR няма дуално представяне;

- оценимост: VaR е оценима, тъй като съществува оценяваща функция (scoring function) (виж формула 5.2 от Thomson [11]).

- Недостатък на VaR е невъзможността да отразява поведението на опашката на разпределението отвъд нивото на значимост.

2.3.2 Очакван недостиг (Expected Shortfall)

Очакваният недостиг ES (познат също като осреднен VaR или условен VaR) е създаден да измерва пазарния риск чрез осредняване на VaR отвъд нивото на значимост. Дисертацията използва общоприетото определение за очаквания недостиг

$$ES(\epsilon;\zeta) = \frac{1}{\epsilon}\int\limits_0^\epsilon VaR(x;\zeta)dx.$$

Дисертацията извежда ES чрез отрязаното очакване по следния начин:

$$ES\left(\epsilon;\zeta\right) = \frac{\mathbb{E}\left[\left(\zeta - q\left(\epsilon\right)\right)^-\right]}{\epsilon} - q\left(\epsilon\right).$$

ES има следните свойства:

- кохерентност: ES е кохерентна рискова мярка (виж Acerbi and Tasche[(1)] за подробности).
- оценимост: Дисертацията представя гледните точки на автори, които твърдят, че ES е оценима при някои допълнителни условия, както и препратки към противоположни мнения.

2.4 Експектилна рискова мярка (ERM)

Глава 5 въвежда базираната на експектил застрашена стойност.

2.4.1 Експектили

Експектилът $\phi(\epsilon;\ \zeta)$ е представен като решение на квадратична оптимизационна задача (за подробности виж Newey and Powell[(9)]):

$$\phi(\epsilon;\ \zeta) = \arg\min_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[\epsilon((\zeta - x)^+)^2 + (1-\epsilon)(((\zeta - x)^-)^2].$$

Алтернативно експектилът може да се представи по следния начин:

Твърдение 3. *(виж формула (2) от Bellini and Bernardino[(3)]) Експектилът е решението на равенството*

$$\epsilon\mathbb{E}\left[(\zeta - x)^+\right] = (1-\epsilon)\,\mathbb{E}\left[(\zeta - x)^-\right].$$

2.4.2 Въвеждане на ERM и неговите свойства

$ERM(\epsilon;\ \zeta)$ е дефинирана като противоположното по знак на експектила $\phi(\epsilon;\ \zeta)$. Става дума за кохерентна мярка (ако $\epsilon \in (0, 1/2]$), която е също оценима. Разглеждаме ERM като единствената рискова мярка, която отговаря и на двата критерия, при условие, че $\epsilon \leq \frac{1}{2}$.

2.4.3 Теоретични резултати

Отрязаното очакване е представено по следния начин:

Твърдение 4. *(Твърдение 3.2 от Zaevski and Nedeltchev[12]) Ако константите $a_1 \leq 0 \leq a_2$ удовлетворяват условието $\mathbb{E}\left[e^{-a_{1,2}\zeta}\right] < \infty$ и $a_1 \leq b_1 < 0 < b_2 \leq a_2$, то*

$$\mathbb{E}\left[(\zeta - x)^-\right] = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ib_2-\infty}^{ib_2+\infty}\frac{\Psi_\zeta(u)\,e^{-ixu}}{u^2}du = -\frac{e^{b_2 x}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Re\left(\frac{e^{-ixv}\Psi_\zeta(v+ib_2)}{(b_2-iv)^2}\right)dv$$

$$\mathbb{E}\left[(\zeta - x)^+\right] = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ib_1-\infty}^{ib_1+\infty}\frac{\Psi_\zeta(u)\,e^{-ixu}}{u^2}du = -\frac{e^{b_1 x}}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Re\left(\frac{e^{-ixv}\Psi_\zeta(v+ib_1)}{(b_1-iv)^2}\right)dv,$$

където $x^- = max(-x, 0)$, $x^+ = max(0, x)$, и $\Psi(\cdot)$ е характеристичната функция. Прилагаме горните формули, за да изведем ES и ERM:

Теорема 1. *(Теорема 3.2 от Zaevski and Nedeltchev[12]) Нека $0 < b_2 < a_2$ и $\epsilon < \frac{1}{2}$. Тогава очакваният недостиг може да бъде изведен като*

$$\begin{aligned} ES(\epsilon;\zeta) &= -q_\zeta(\epsilon) - \frac{e^{b_2 q_\zeta(\epsilon)}}{\epsilon\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Re\left(\frac{e^{-iq_\zeta(v)v}\Psi_\zeta(v+ib_2)}{(b_2-iv)^2}\right)dv \\ &= \frac{(1-2\epsilon)\,q_\zeta(\epsilon) + i\Psi'_\zeta(0)}{2\epsilon} - \frac{1}{\epsilon\pi}\lim_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{+\infty}\Re\left(\frac{e^{-iq_\zeta(\epsilon)v}\Psi_\zeta(v)}{v^2}\right)dv. \end{aligned}$$

ϵ-експектилът може да се получи като решение на следното уравнение спрямо величината x

$$x = \frac{2(1-2\epsilon)}{\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{+\infty} \Re \left(\frac{e^{-ixv} \Psi_{\zeta}(v)}{v^2} \right) dv.$$

2.5 Осредняване по волатилност

Моделът на Хестън описва динамиката на волатилността чрез процеса на Кокс-Ингерсол-Рос (CIR):

$$dV_t = \xi(\eta - V_t)dt + \theta\sqrt{V_t}d\tilde{B}_t,$$

където Брауновото движение на цената на актива B_t е корелирано с Брауновото движение на процеса на волатилност $\tilde{B}_t$; ξ е скоростта на връщане на процеса към неговата дългосрочна средна стойност η и θ е волатилността на волатилността.

Глава 6 представя подход да се работи с началната стойност на волатилността V_t, т.е. v. Предизвикателството тук е, че v не е наблюдаема на пазарите величина; това е проблем понеже тя фигурира във формулата за характеристичната функция и за ФПМ. Дисертацията решава това предизвикателство, като интегрира волатилността по стационарното Гама разпределение на CIR процеса.

2.5.1 Интегриране на волатилност

Знаем, че CIR процесът има стационарно Гама разпределение с параметри $\alpha = \frac{2\xi}{\theta^2}$ и $\beta = \frac{2\xi\eta}{\theta^2}$. Неговата плътност е $f_\gamma(u) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} u^{\beta-1} e^{-\alpha u} I_{u \geq 0}$, където $\Gamma(\cdot)$ е Гама-функцията.

За да се осредни началната волатилност v в характеристичната функция по стационарното разпределение (виж Dragulescu and Yakovenko[(4)]), доказваме:

Твърдение 5. *(Твърдение 3.1 от Zaevski and Nedeltchev[(13)])*

Съществува случайна величина $\widetilde{V}$ с характеристична функция

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}(u) &= \int_0^\infty \Psi_{Heston}(u;v)\, f_\gamma(v)\, dv \\
&= \int_0^\infty e^{C(u)+vD(u)} f_\gamma(v)\, dv \\
&= e^{C(u)} \Psi_\gamma(-iD(u)),
\end{aligned}$$

където $\Psi_\gamma(\cdot)$ е характеристичната функция на Гама-разпределението

$$\Psi_\gamma(u) = \left(1 - \frac{iu}{\alpha}\right)^{-\beta} \equiv \left(1 - \frac{i\theta^2 u}{2\xi}\right)^{-\frac{2\xi\eta}{\theta^2}}$$

$$\begin{aligned}
C(t,u) &= \mu uit + \frac{\xi\eta}{\theta^2}\left[(\xi - \rho\theta ui + d(u))\, t - 2\log\left(\frac{1 - g(u)\exp(d(u)t)}{1 - g(u)}\right)\right] \\
D(t,u) &= \frac{\xi - \rho\theta ui + d(u)}{\theta^2} \frac{1 - \exp(d(u)t)}{1 - g(u)\exp(d(u)t)} \\
g(u) &= \frac{\xi - \rho\theta ui + d(u)}{\xi - \rho\theta ui - d(u)} \\
d(u) &= \sqrt{(\rho\theta ui - \xi)^2 + \theta^2(ui + u^2)}.
\end{aligned}$$

След това се фокусираме върху областта $\mathcal{D} \equiv (\widetilde{x}^-, \widetilde{x}^+)$ на ФПМ на случайната величина $\widetilde{V}$. Доказваме, че $\mathcal{D}$ е подмножество на областта на сходимост на ФПМ на оригиналните логаритмизирани доходности на Хестън $(x^-,\ x^+)$.

Лема 1. *(Лема 3.2 от Zaevski and Nedeltchev[13]) Имаме $\mathcal{D} \subset (x^-,\ x^+)$.*

Също така:

Теорема 2. *(Теорема 3.1 от Zaevski and Nedeltchev[13]) Абсцисите на сходимост $\widetilde{x}^-$ и $\widetilde{x}^+$ за случайната величина $\widetilde{V}$ са единствените корени на уравнението $\kappa(x) = \frac{2\xi}{\theta^2}$ в интервалите $(x^-, 0)$ и $(1, x^+)$, съответно. За всяко $x \in (\widetilde{x}^-, \widetilde{x}^+)$, ФПМ е*

$$\widetilde{M}(x) = e^{\omega(x)} \left(1 - \frac{\theta^2 \kappa(x)}{2\xi}\right)^{-\frac{2\xi\eta}{\theta^2}},$$

функциите $\omega(\cdot)$ и $\kappa(\cdot)$ са дефинирани като

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \frac{2\xi\eta}{\theta^2}\left((\xi-\rho\theta z)\frac{t}{2}-\ln f(z)\right)+t\mu z\\ \kappa(z) &= \left(z^2-z\right)\frac{f_2(z)}{f(z)}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

2.5.2 Позиции на абсцисите на сходимост

Нека обозначим функцията

$$\begin{aligned}p(x) &= (\xi-\rho\theta x)^2+\theta^2\left(x-x^2\right)\\ &\equiv -x^2\theta^2\left(1-\rho^2\right)+x\theta(\theta-2\rho\xi)+\xi^2.\end{aligned}$$

Тя има два реални корена, възможно безкрайно малки (големи), $-\infty \leq x_1 < 0 < x_2 \leq \infty$, $p(x) > 0$ когато $x \in (x_1, x_2)$, и $p(x) < 0$ ако $x < x_1$ или $x > x_2$:

$$x_{1,2} = \frac{\theta-2\rho\xi \pm \sqrt{\theta^2-4\rho\theta\xi+4\xi^2}}{2\theta(1-\rho^2)}.$$

Нека $P(x) = \sqrt{|p(x)|}$ и функцията $g(\cdot)$ е дефинирана като

$$\begin{aligned}g(x) &= g_1(x)+(\xi-\rho\theta x)g_2(x)\\ g_1(x) &= \cosh\left(\frac{P(x)t}{2}\right)I_{x\in(x_1,x_2)}+\cos\left(\frac{P(x)t}{2}\right)I_{x\notin(x_1,x_2)}\\ g_2(x) &= \frac{1}{P(x)}\left[\sinh\left(\frac{P(x)t}{2}\right)I_{x\in(x_1,x_2)}+\sin\left(\frac{P(x)t}{2}\right)I_{x\notin(x_1,x_2)}\right].\end{aligned}$$

ФПМ на логаритмизираните доходности може да се запише като

$$M(z;v) = e^{\omega(z)+v\kappa(z)},$$

където v е началната стойност на волатилността.

Дисертацията разглежда позицията на $\widetilde{x}^-$ и $\widetilde{x}^+$ спрямо x_1 и x_2. Обсъждаме случая, когато $|\rho| < 1$ и когато $|\rho| = 1$.

Дефинираме константите $y_{1,2}$ и $t_{1,2}$ чрез

$$y_{1,2} = \pm \frac{2\rho^2 - 1}{\rho}$$
$$t_{1,2} = \frac{4\xi}{\theta^2 \left(x_{1,2}^2 - x_{1,2}\right) - 2\xi \left(\xi - \theta\rho x_{1,2}\right)}.$$

За позицията на $\widetilde{x}^-$ спрямо x_1 когато $|\rho| < 1$ заключаваме, че

Теорема 3. *(Теорема 3.2 от Zaevski and Nedeltchev[13])*
Имаме $\widetilde{x}^- \in (x^-, x_1)$ *в следните случаи:* $\left\{\rho \le \frac{1}{2}\right\}$, $\left\{\rho > \frac{1}{2},\ \frac{\theta}{\xi} \ge y_1 + 2\rho\right\}$, *и* $\left\{\rho > \frac{1}{2},\ \frac{\theta}{\xi} < y_1 + 2\rho, t < t_1\right\}$. *Ако* $\left\{\rho > \frac{1}{2},\ \frac{\theta}{\xi} < y_1 + 2\rho, t > t_1\right\}$, *тогава* $\widetilde{x}^- \in (x_1, 0)$. *Равенството* $\widetilde{x}^- = x_1$ *е в сила когато* $\left\{\rho > \frac{1}{2},\ \frac{\theta}{\xi} < y_1 + 2\rho, t = t_1\right\}$.

Разгледана е също позицията на $\widetilde{x}^+$ спрямо x_2 за случая $|\rho| < 1$:

Теорема 4. *(Теорема 3.3 от Zaevski and Nedeltchev[13]) Следните твърдения характеризират позицията на* $\widetilde{x}^+$ *спрямо* x_2.

1. *Ако* $\xi \ge \rho\theta$, *то*

   (а) $\widetilde{x}^+ \in (x_2, x^+)$ *когато*

   - $\{\rho \ge 0\}$,
   - $\left\{\rho \in (-0.5, 0), \frac{\theta}{\xi} \le 2\rho - y_2\right\}$,
   - $\left\{\rho \in (-0.5, 0), \frac{\theta}{\xi} > 2\rho - y_2, t < t_2\right\}$, *или*
   - $\{\rho \le -0.5, t < t_2\}$.

   (б) $\widetilde{x}^+ \in (1, x_2)$ *когато* $\left\{\rho \in (-0.5, 0), \frac{\theta}{\xi} > 2\rho - y_2, t > t_2\right\}$ *или* $\{\rho \le -0.5, t > t_2\}$.

   (в) $\widetilde{x}^+ = x_2$ *когато* $\left\{\rho \in (-0.5, 0), \frac{\theta}{\xi} > 2\rho - y_2, t = t_2\right\}$ *или* $\{\rho \le -0.5, t = t_2\}$.

2. *Да предположим, че* $\xi < \rho\theta$. *Важно е да се подчертае, че* $t_2 < \bar{t}$ *(*$\bar{t}$ *се определя от формула* $\bar{t} = \frac{2}{\rho\theta x_2 - \xi}$*), защото функцията* $\kappa(x_2; t)$ *нараства спрямо* t *и е безкрайна за* $\bar{t}$.

   (а) *Ако* $t < t_2$, *то* $\widetilde{x}^+ \in (x_2, x^+)$.

(б) Ако $t = t_2$*, то* $\widetilde{x} = x_2$*.*

(в) Ако $t_2 < t$*, то* $1 < \widetilde{x}^+ < x_2 < x^+$*.*

Получени са и съответните резултати в граничния случай когато $|\rho| = 1$, т.е. Брауновото движение на доходността е напълно корелирано с Брауновото движение на волатилността.

2.6 Ентропичен VaR (EVaR)

Глава 7 въвежда и обсъжда основания на ентропия VaR за финансовата област и неговите свойства.

2.6.1 Ентропичен VaR за доходността на актив

Като начало дефинираме тази рискова мярка за финансовата област по следния начин:

Дефиниция 4. *Ентропичният VaR на ниво* $\epsilon \in (0,1)$ *на случайната величина* ζ *е*

$$EVaR\,(\epsilon;\zeta) = \inf_{z>0} d\,(\epsilon, z;\zeta) \equiv \inf_{z>0} \frac{1}{z} \ln\left(\frac{M\,(-z;\zeta)}{\epsilon}\right).$$

Извеждаме допустимото множество на $EVaR$ със следното твърдение:

Твърдение 6. *(Твърдение 2.9 от Nedeltchev and Zaevski*[8]*) Нека* $\epsilon^*(\zeta)$ *е дефинирано за случайната величина* ζ *като*

$$\epsilon^*(\zeta) = \inf_{0 \le z \le c_\zeta} M\,(-z;\zeta),$$

където $c_\zeta = \arg\sup_{z>0} M\,(-z;\zeta) < \infty$ *е абсцисата на сходимост на ФПМ. Допустимото множество за* $EVaR$ *при ниво* ϵ *е* $\mathcal{A}_\epsilon = \{\zeta : \epsilon^*(\zeta) \le \epsilon\}$*.*

2.6.2 Извеждане на ентропичния VaR

$EVaR$ е изведен по следния начин:

Теорема 5. *(Теорема 3.3 от Nedeltchev and Zaevski[8]) Нека функциите* $\phi(\cdot)$ *and* $h(\cdot)$ *са дефинирани чрез ФПМ по следния начин*

$$\begin{aligned} \phi(z;\zeta) &= \ln M(-z;\zeta) \\ h(z,\epsilon;\zeta) &= \phi'(z)\,z - \phi(z) + \ln\epsilon. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ако $h(c_\zeta,\epsilon;\zeta) \leq 0$*, то*

$$EVaR(\epsilon;\zeta) = \frac{1}{c_\zeta} d(-c_\zeta,\epsilon;\zeta) \equiv \frac{1}{c_\zeta}\left(\phi(c_\zeta;\zeta) - \ln\epsilon\right)$$

където a_ζ *е стойността, при която* $EVaR(\epsilon;\zeta)$ *се достига чрез минимума по-горе.*
Иначе, ако $h(c_\zeta,\epsilon;\zeta) > 0$*, то уравнението* $h(z,\epsilon;\zeta) = 0$ *има единствено решение в интервала* $(0,c_\zeta)$ *което е* a_ζ *и затова*

$$EVaR(\epsilon;\zeta) = d(-a_\zeta,\epsilon;\zeta) \equiv \frac{1}{a_\zeta}\left(\phi(a_\zeta;\zeta) - \ln\epsilon\right).$$

2.6.3 EVaR на разглежданите стохастични модели

- Модел на Блек-Шоулс

  Гаусовата ФПМ е винаги дефинирана и има вида

  $$M(z) = e^{t\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right)}.$$

  Ето защо, $c_{BS} = +\infty$. Затова функции (2.2) се преобразуват в следния вид

  $$\begin{aligned} \phi(z;\zeta) &= t\left(-\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right) \\ h(z,\epsilon;\zeta) &= \phi'(z)\,z - \phi(z) + \ln\epsilon. \end{aligned}$$

  Заключаваме, че стойностите на минимизатора a_{BS} и на $EVaR$ са

  $$\begin{aligned} a_{BS} &= \frac{1}{\sigma}\sqrt{-\frac{2\ln\epsilon}{t}} \\ EVaR(\epsilon;BS) &= \left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu\right)t + \sigma\sqrt{-2t\ln\epsilon}. \end{aligned}$$

- Експоненциален модифициран устойчив модел

  ФПМ е дефинирана в интервала $(-\lambda_1, \lambda_2)$ и затова абсцисата $c_{ETS} = \lambda_1$. Записваме

$$M_{TS}(z) = e^{t(\mu z + \psi_1(z) + \psi_2(z))},$$

къдeто

$$\psi_1(z) = \begin{cases} \Gamma(-\alpha_1)\lambda_1^{\alpha_1} c_1 \left(\left(1 + \frac{z}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1} - 1 - \frac{z\alpha_1}{\lambda_1}\right), & if \quad \alpha_1 \neq 1 \\ -zc_1 + c_1(\lambda_1 + z)\ln\left(1 + \frac{z}{\lambda_1}\right), & if \quad \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

$$\psi_2(z) = \begin{cases} \Gamma(-\alpha_2)\lambda_2^{\alpha_2} c_2 \left(\left(1 - \frac{z}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2} - 1 + \frac{z\alpha_2}{\lambda_2}\right), & if \quad \alpha_2 \neq 1 \\ zc_2 + c_2(\lambda_2 - z)\ln\left(1 - \frac{z}{\lambda_2}\right), & if \quad \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Затова, функцията $\phi(\cdot; ETS)$ от (2.2) е $\phi(z; ETS) = t(-\mu z + \psi_1(-z) + \psi_2(-z))$. По тази причина, $\phi'(z; ETS) = -t(\mu + \psi_1'(-z) + \psi_2'(-z))$, където

$$\psi_1{}'(z) = \begin{cases} \Gamma(-\alpha_1)\lambda_1^{\alpha_1 - 1} c_1\alpha_1 \left(\left(1 + \frac{z}{\lambda_1}\right)^{\alpha_1 - 1} - 1\right), & if \quad \alpha_1 \neq 1 \\ c_1 \ln\left(1 + \frac{z}{\lambda_1}\right), & if \quad \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

$$\psi_2'(z) = \begin{cases} \Gamma(-\alpha_2)\lambda_2^{\alpha_2 - 1} c_2\alpha_2 \left(\left(1 - \frac{z}{\lambda_2}\right)^{\alpha_2 - 1} + 1\right), & if \quad \alpha_2 \neq 1 \\ -c_2 \ln\left(1 - \frac{z}{\lambda_2}\right), & if \quad \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Доказано е следното Твърдение:

Твърдение 7. *(Твърдение 3.4 от Nedeltchev and Zaevski[8])*

Нека $D(x)$ е дигама-функция и $D^{-1}(x)$ е нейната обратна функция в интервала $(-2, -1)$. Тя съществува понеже дигама-функцията нараства между -∞ и +∞ в този интервал. Нека константата b е дефинирана като $b = c_1\Gamma\left(d^{-1}(\ln\lambda_1)\right)\lambda_1^{-D^{-1}(\ln\lambda_1)}$. Тогава е в сила твърдението:

1. *Ако* $b - \psi_2'(-\lambda_1)\lambda_1 - \psi_2(-\lambda_1) + \frac{\ln\epsilon}{t} > 0$*, тогава* $a_{ETS} < c_{ETS}$.

2. *Ако* $b - \psi_2'(-\lambda_1)\lambda_1 - \psi_2(-\lambda_1) + \frac{\ln\epsilon}{t} \leq 0$*, тогава съществуват константи* b_1 *и* b_2, $1 < b_1 < -d^{-1}(\ln\lambda_1) < b_2 < 2$*, за които* $a_{ETS} < c_{ETS}$ *когато* $\alpha_1 \in (0, b_1) \cup (b_2, 2)$ *и* $a_{ETS} = c_{ETS}$ *когато* $\alpha_1 \in [b_1, b_2]$.

$EVaR$ *се получава чрез Теорема 5.*

- Модел на Хестън

Използваме

$$d(\epsilon, -z; \zeta) = \frac{1}{z}\left(\phi(z;\zeta) - \ln\epsilon\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(d(\epsilon, -z;\zeta)\right) = \frac{h(z,\epsilon;\zeta)}{z^2},$$

за да изведем следното твърдение:

Твърдение 8. *(Твърдение 3.5 от Nedeltchev and Zaevski[8]) Нека* x^* *е най-големият корен на* $f(\cdot)$*, който е по-малък от* x_1*. Абсцисата на* $EVaR$ *е* $c_{Heston} = -x^*$.[1] *Функциите (2.2), свързани с ФПМ на логаритмизираната цена, могат да бъдат записани като*

[1] Всъщност, x^* е лявата абсциса на сходимостта на ФПМ на логаритмизираната цена в модела на Хестън.

$$
\begin{aligned}
\phi(z;\xi) &= -x_0 z - \mu t z + \frac{2\xi\eta}{\theta^2}\left((\rho\theta z + \xi)\frac{t}{2} - \ln f(-z)\right) + v_0 \frac{z+z^2}{g(-z)} g_2(-z) \\
h(z,\epsilon;\xi) &= \phi'(z) z - \phi(z) + \ln\epsilon \\
&= \ln\epsilon + \frac{2\xi\eta}{\theta^2}\left(-\frac{\xi t}{2} + \frac{g'(-z)}{g(-z)} z + \ln g(-z)\right) \\
&\quad + v z^2 \left(\frac{g(-z) + (1+z) g'(-z)}{g^2(-z)} g_2(-z) - \frac{1+z}{g(-z)} g_2'(-z)\right) \\
g'(x) &= g_1'(x) - \rho\theta g_2(x) + (\xi - \rho\theta x) g_2'(x) \\
g_1'(x) &= \frac{t}{4} g_2(x) p'(x) \\
g_2'(x) &= \operatorname{sgn}(p(x)) \frac{p'(x)}{2P^2(x)}\left[\frac{t}{2} g_1(x) - g_2(x)\right] \\
p'(x) &= -2x\theta^2\left(1-\rho^2\right) + \theta(\theta - 2\rho\xi).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Получаваме минимизатора, който определя стойността на $EVaR$ (a_ξ или c_ξ), чрез Теорема 5, по-точно чрез знака на $h(c_\xi, \epsilon; \xi)$.

- Модели със стохастична волатилност и скокове

  ФПМ на скоковата компонента в модела на Бейтс винаги е дефинирана и се записва като $M(z) = e^{t\psi_{CP}(z)}$, където $\psi_{CP}(u)$ е

$$
\psi_{CP}(z) = \lambda\left(e^{\frac{\beta^2 z^2}{2} + \alpha z} - 1\right).
$$

  Скоковете в алтернативния модел (виж Zaevski et al.[(14)]) са представени чрез модифициран устойчив процес. Формулираме следните резултати:

Твърдение 9. *(Твърдение 3.6 от Nedeltchev and Zaevski[(8)]) Областта на ФПМ на доходностите на модела със стохастична волатилност и скокове е сечението на областите на непрекъснатата и скоковата част. По-специално, дефиниционното множество за модела на Бейтс съвпада с тази на Хестън. По този начин, абсцисите на сходимост $c_{Bates} = c_{Heston}$ и $c_{SVTS} = \min\{c_{Heston}, \lambda_1\}$,* *където индексът $SVTS$ означава модел със стохастична волатилност и модифицирани устойчиви скокове.*

Въз основа на Твърдение 9, извеждаме минимизатора за $EVaR$, както и неговата стойност чрез Теорема 5. Функциите (2.2) се превръщат в

$$\begin{aligned} \phi\left(z;\right) &= \ln M_{Heston}\left(-z\right) + \ln M_J\left(-z;\xi\right) \\ h\left(z,\epsilon\right) &= \left[\phi'_{Heston}\left(z\right) + \phi'_J\left(z\right)\right] z - \phi_{Heston}\left(z\right) - \phi_J\left(z\right) + \ln\epsilon. \end{aligned}$$

Долният индекс J е за скоковата компонента.

2.6.4 Осредняване по волатилност

Този Раздел следва подхода и ползва заключенията, направени в Раздел 2.5. Използвайки Теорема 2, извеждаме лявата абсциса на сходимост c_{av} на ФПМ:

Твърдение 10. *(Твърдение 3.7 от Nedeltchev and Zaevski[8]) За фиксирано t, уравнението $\kappa\left(t,x\right) = \frac{2\xi}{\theta^2}$ има единствен корен в интервала $\left(-c_{Heston}, 0\right)$. Границата c_{av} е противоположната стойност на този корен. Функцията κ е въведена с формула (2.1).*

Функцията $h\left(z,\epsilon;\zeta\right)$, която описва минимизатора за $EVaR$, се превръща в

$$\begin{aligned} h\left(z,\epsilon;\xi\right) &= \phi'\left(z\right) z - \phi\left(z\right) + \ln\epsilon \\ \phi\left(z,\epsilon;\xi\right) &= \omega\left(-z\right) - \frac{2\xi\eta}{\theta^2} \ln\left(1 - \frac{\theta^2\kappa\left(-z\right)}{2\xi}\right) \\ \phi'\left(z,\epsilon;\xi\right) &= -\omega'\left(-z\right) - \frac{2\xi\eta}{2\xi - \theta^2\kappa\left(-z\right)}\kappa'\left(-z\right) \\ \omega'\left(x\right) &= -\frac{2\xi\eta}{\theta^2}\left(\frac{\rho\theta t}{2} + \frac{g'\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right) + t\mu \\ \kappa'\left(x\right) &= \frac{\left(2x-1\right) g_2\left(x\right) + \left(x^2 - x\right) g_2'\left(x\right)}{g\left(x\right)} - \left(x^2 - x\right) \frac{g_2\left(x\right) g'\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}. \end{aligned}$$

Производните $f'\left(x\right)$ и $f_2'\left(x\right)$ могат да бъдат намерени чрез формули (2.3).

2.7 Изчисления и анализиране на емпиричните резултати

В Глава 8 проверяваме някои теоретични аспекти от предходните глави, като ги прилагаме към реални данни и правим заключения на тази основа.

2.7.1 Исторически данни

Използваме исторически данни за индекса S&P500 за периода между 2 януари 2003 г. и 19 февруари 2025 г. Периодът е избран така, че да включва както нормално функциониране на финансовия пазар, така и финансови сътресения (като Глобалната финансова криза от 2008 г. и COVID-19 пандемията). Работим с дневните коригирани стойности при затваряне (Adjusted Close) и прилагаме пълзящ прозорец с дължина от 1000 дни.

2.7.2 Методология на калибриране

Обозначаваме с $S_1,\ S_2,...,S_N,\ i = 1, 2, ..., N - 1$ стойностите на индекса S&P500 за дадена извадка. Извеждаме логаритмизираните доходности по обичайния начин $r_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i)$. Извеждаме емпиричната PDF, като разделяме интервала $(-0.25, 0.25)$ на $M = 250$ части с дължина $\Delta = 0.002$. Интервалът е избран по този начин, защото най-голямото отклонение в логаритмизираните доходности е -0.2290 в Черния понеделник, 19 октомври 1987 г. Обозначаваме с $n_i,\ i = 1, 2, ..., 250$ броя на логаритмизираните доходности, принадлежащи на всеки интервал. Емпиричната PDF в центъра на i-тия интервал се апроксимира с $\frac{n_i}{N\Delta}$.

За калибриране на моделите се нуждаем и от теоретичната PDF. С изключение на модела на Блек-Шоулс, PDF в явен вид не е налична за разглежданите модели, следователно трябва да я изведем чрез характеристичните функции. За да намерим относително добро приближение, извеждаме PDF в 500 точки, равномерно разпределени в интервала $(-0.5, 0.5)$ – дължината на интервалите отново е $\Delta = 0.002$. Апроксимираме PDF, използвайки кубични сплайнове.

Калибрираме чрез подхода на най-малките квадратични грешки (LSqE). Обозначаваме с Υ множеството от всички възможни стойности на параметрите на даден теоретичен модел, а с υ – една конкретна реализация, $\upsilon \in \Upsilon$. По отношение на ERM прилагаме следния критерий за минимизиране на LSqE

$$\min_{\upsilon\in\Upsilon}\left\{\sum_{i=1}^{250}\left(\ln\left(p_{th,i}+1\right)-\ln\left(p_{emp,i}+1\right)\right)^2\right\},$$

където $p_{th,i}$ и $p_{emp,i}$ са съответните стойности на теоретичната PDF, базирана на набора от параметри υ, и емпиричната PDF. Използваме логаритъм, за да дадем относително еднакво влияние на точките в центъра на разпределението и опашките. Единицата се добавя към PDF, защото някои емпирични стойности може да са равни на нула.

Калибрираме $EVAR$, като решаваме следния минимизиращ проблем

$$\min_{\upsilon\in\Upsilon}\left\{\sum_{n=1}^{230}\left(p_{th,n}-p_{emp,n}\right)^2+10^3\sqrt{\sum_{n=1}^{6}\left(EVaR_{th}\left(\epsilon_n\right)-EVaR_{emp}\left(\epsilon_n\right)\right)^2}\right\},$$

Втората компонента на целевата функция е свързана с разликите между емпиричните и теоретичните $EVaR$. За относително изравняване на теглата на двете компоненти, умножаваме $EVaR$ частта по 10^3.

При ERM улавяме само опашките, докато при $EVaR$ работим с цялото разпределение.

2.7.3 Валидиране и сравняване на калибрацията

Валидираме качеството на калибрацията чрез подход, който прилича на метода на максималното правдоподобие, но се прилага за прогнозиране. Обозначаваме с $p(x;i)$ калибрираната PDF за един модел към i-тата дата. Използваме следната функция за прогнозиране

$$\sum_{i=1}^{N-j}\ln\left(p\left(r_{i+j},i\right)\right). \tag{2.4}$$

По този начин можем да оценим съответствието на прогнозата към дата i и стойността към дата $i+j$. Изчисляваме стойностите, които функцията (2.4) генерира за $j=1$ (един ден), 5 (една седмица) и 20 (приблизително един месец). Виждаме, че всички модели (с изключение на този на Блек-Шоулс) дават относително еднакви прогнози. Също така наблюдаваме, че моделите с модифициран устойчив процес дават по-добра прогноза, независимо от наличието или отсъствието на стохастична волатилност.

2.7.4 Анализиране на калибрацията на модела на Хестън

Вниманието в този раздел е фокусирано върху поведението на модела на Хестън. Най-важното наблюдение относно дрифта μ е, че той променя знака си; достига най-ниските стойности по време на COVID19 пандемията и има рекордно високи стойности от края на 2012 г. до края на 2016 г. Скоростта на връщане към средната дългосрочна стойност на процеса ξ е много волатилен параметър. Параметърът η е с много ниска стойност до началото на Глобалната финансова криза от 2008г.; стойността му намалява от края на 2012 г. до средата на 2015 г. и нараства постоянно през останалите периоди. Наблюдаваме, че профилът на ξ и θ е изненадващо идентичен, макар и с различен мащаб. Коефициентът на корелация ρ има много стабилно поведение през периодите на пазарно спокойствие и е значително волатилен по време на финансови турбуленции.

Не на последно място, сравняваме пазарния риск, измерен чрез експектилния VaR и ентропичния VaR. Виждаме добро съвпадение за дрифта μ, включително по време на Глобалната финансова криза и COVID19. Отбелязваме, че ξ и θ имат стойности от много различен мащаб. Волатилността на θ е еднаква от втората половина на 2015 г. до началото на COVID19. През останалата част от периода мярките произвеждат различаващи се стойности за θ. Освен това забелязваме, че коефициентът на корелация ρ за ентропичния VaR е сравнително стабилен, докато той е по-волатилен за експектилния VaR.

2.8 Грапава волатилност: нов стилизиран факт

Глава 9 представя грапавата волатилност като характеристика на съвременните финансови пазари.

Моделираме волатилността по време на COVID19 периода като $\sigma_t =$

$c\exp\left(vB_t^H\right)$, където c, v са положителни константи, а B_t^H е дробно Брауново движение (fBM).

Използваме данните достъпни онлайн от библиотеката на Oxford-Man. Те включват 31 индекса от Северна и Южна Америка, Европа и Азия. Времевият диапазон е от януари 2000 г. до март 2021 г. Използват се високочестотни серии за 5-минутна реализирана вариация (RV), 10-минутна RV, като за интегриране на RV са приложени различни кернели (Tukey-Hanning, Two-Scale/Bartlett и Non-Flat Parzen).

Изчислени са моментите на логаритмизираните разлики на волатилността:

$$m(q,\Delta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |\ln\sigma_{k\Delta} - \ln\sigma_{(k-1)\Delta}|^q,$$

където m е моментът от порядък q, Δ е времевия лаг (в дни) и σ е волатилността. Предвид монофракталното свойство на fBM за различни q, очакваме да изведем стойността на индекса на Хърст чрез линеен регресионен анализ спрямо скалиращия фактор. Дисертацията потвърждава монофракталното свойство, което е в съответствие с изследването Gatheral et al.[7]. Анализът показва, че връзката между скалиращия фактор и индекса на Хърст е линейна за индекс S&P, докато за индекс STOXX50E, FTSE и KSE тя е нелинейна. Правим заключението, че няма основание индексът на Хърст да се оценява чрез *линейна* регресия. Ето защо е използвана регресия $\ln(1-\kappa(\Delta)) = a + 2H\ln\Delta$ за достатъчно малки $\frac{\Delta}{t}$, където $\kappa(\Delta) = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(1+\frac{\Delta}{t}\right)^{2H} - \left(\frac{\Delta}{t}\right)^{2H}\right\}$. За да се изключи евентуално влияние на прилагания кернел за интегриране на RV, резултатите са потвърдени за два различни кернела.

Глава 3

Заключение и бъдещи разработки

Дисертацията разглежда ERM като рискова мярка, която е противоположна по знак на експектила, който от своя страна се намира чрез квадратична оптимизация. ERM има предимството да е единствената рискова мярка, която е едновременно кохерентна и оценима, когато са изпълнени определени ограничения за нивото на значимост. Предлага се отрязаното очакване да се изчислява чрез характеристичната функция и резултатите да се използват за определяне на ES и ERM.

Числените експерименти в дисертацията се базират на данни за индекса S&P500 за дневната коригирана цена при затваряне, варираща през последните 23 години. Приложен е пълзящ прозорец от 1000 наблюдения. Началната дата и дължината на прозореца са избрани по начин, който използва калибрационите резултати от предишни изследвания.

Установено е задоволително добро съответствие между теоретичните и емпиричните стойности на VaR, ES и ERM. За сравняване на теоретичните с емпиричните данни се използва коефициент, който коригира съотношенията VaR/ES и VaR/ERM. На основата на множество емпирични тестове е предложена стойност от 0.6 за първия коефициент и 1.25 за втория. Всички модели (с изключение на модела на Блек-Шоулс) дават добро съответствие, като най-добро съответствие се постига от модела със стохастична волатилност и модифицирани устойчиви скокове.

Поради липсата на PDF в явен вид за разглежданите модели (с изключение на модела на Блек-Шоулс) прилагаме бърза трансформация на Фурие към характеристичните функции. Теоретичните стойности на

VaR са изчислени като квантил, докато тези за ES са получени чрез интегриране на стойностите на VaR, както и чрез отрязаните очаквания.

Качеството на калибрираните стойности на PDF (goodness of fit) е проверено чрез подход, който наподобява оценката за максимална правдоподобност. Открито е относително добро съответствие на всички модели; най-добро съответствие се постига от модела със стохастична волатилност и модифициран устойчив процес, докато моделът на Блек-Шоулс дава най-лошо съответствие. Направената проверка потвърждава ефекта на ливъридж като стилизиран факт. Също така е установено, че моделът на Бейтс дава резултати с относително голям интензитет на малки скокове, поведение характерно за процесите на Леви с безкрайна активност, напр. модифициран устойчив процес. Вижда се, че калибрираните резултати имат относително големи отклонения в центъра на разпределението и силно съответствие в опашките.

Дисертацията преобразува първоначалния начин на представяне на $EVaR$ от дясната опашка на разпределението (т.е. печалбата) към лявата (т.е. загубите), която представлява интерес за финансите. Тази рискова мярка се дефинира чрез минимизиране на функция свързана с ФПМ, което изисква да се определи интервала, където тя е дефинирана, тъй като за разлика от характеристичната функция, ФПМ не е дефинирана навсякъде.

Дисертацията представя $EVaR$ като кохерентна рискова мярка и описва нейното дуално представяне. Принос на дисертацията е извеждането на допустимото множество на $EVaR$.

При модела на Хестън и моделите, които го включват (като модела на Бейтс и модела със стохастична волатилност / модифицирани скокове), началната волатилност е ненаблюдаем параметър, който присъства във формулата за ФПМ. Този проблем е решен като се използва факта, че волатилността е процес на Кокс-Ингерсол-Рос, който има Гама стационарно разпределение. Волатилността е осреднена по това разпределение, а също е намерена дефиниционната област на осреднената ФПМ.

Дисертацията изчислява стойностите на $EVaR$ за 6 нива на значимост, на основата на параметрите от калибрацията на ERM както за прозореца, така и за цялата извадка. Виждаме разминавания между теоретичните и емпиричните стойности, които отдаваме на свръхадаптиране (overfitting) и затова добавяме към целевата функция част, свързана с $EVaR$. Откриваме добра способност на $EVaR$ да улавя рисковия профил на индекса S&P500: зоните с по-висок пазарен риск са добре видими.

Също така дисертацията обобщава способността на калибрираните модели да генерират приемливи стойности на VaR, ES, ERM и $EVaR$. Установяваме, че приложеният подход дава добри резултати. При всички модели (с изключение на Блек-Шоулс) се наблюдават известни разминавания.

Анализираме времевите серии на параметрите на калибрирания модел на Хестън. Виждаме, че параметрите променят качествено поведението си по време на сътресения (Глобалната финансова криза и периода на COVID-19). Забелязваме идентичен профил за ξ и θ. Отбелязваме, че волатилността на параметъра ρ се увеличава по време на финансови кризи.

Дисертацията сравнява калибрираните резултати за ERM и $EVaR$. Заключаваме, че $EVaR$ по-добре отразява финансовите кризи.

Теоретичните аспекти, обсъдени в дисертацията, и направените емпирични изчисления ни позволяват да проведем следното сравнение на ERM и $EVaR$:

1. ERM е едновременно кохерентна (при условие, че нивото на значимост $\epsilon < 0.5$) и оценима, докато $EVaR$ е кохерентна;

2. ERM е добре дефинирана само за случайни величини с краен втори момент;

3. Към експектила можем да прилагаме целия инструментариум, свързан с квантила;

4. Веднъж определена, стойността на отрязаното очакване може да се използва за изчисляване както на $EVaR$, така и на ES;

5. Стойността на $EVaR$ се изчислява чрез минимизиране на функция свързана с ФПМ. Следователно, трябва да определим дефиниционното й множество и да имаме предвид, че осредняването на волатилността свива този диапазон;

6. $EVaR$ реагира по-добре на финансови кризи.

Относно грапавата волатилност, дисертацията стартира от позицията, че доминиращият начин за оценяване на волатилност (като стандартното отклонение на логаритмизираната доходност) усложнява извеждането на стилизирани факти, свързани с волатилността. Стилизираните факти за финансова криза са представени като пазарна неефективност (т.е. отклонение от хипотезата за ефективния пазар), пазарни провали и др. Стилизираните факти за историческата/реализираната волатилност са по-добре проучени от характеристиките на имплицитната волатилност (implied volatility).

Въз основа на представителен набор от данни за продължителен период от време, наблюдаваме свойството на мащабиране на логаритмизираната волатилност за голям брой пазарни индекси. Също така, потвърждаваме, че има връзка между скалиращия коефициент и индекса на Хърст, която е линейна за някои индекси, но е нелинейна за други. Нашите изчисления показват съществено увеличение на стойностите на индекса на Хърст по време на COVID19; не наблюдаваме подобно увеличение по време на други сътресения, като например Глобалната финансова криза от 2008 г.

Дисертацията извежда нови стилизирани факти, свързани с волатилността. Потвърждаваме, че логаритмизираната волатилност е грапава, тъй като стойността на индекса на Хърст е $H < \frac{1}{2}$. Освен това, стойността на този индекс варира в определен диапазон и се движи в пакети с преходен период между тях. Забелязваме, че логаритмизираната волатилност става по-гладка по време на пазарни кризи. Наблюдаваме, че изборът на кернел определя стойността на индекса на Хърст, но не променя горните заключения.

Предлагаме да се проведат по-нататъшни изследвания за създаване на екосистема от стилизирани факти, свързани с волатилността, които може да доведат до заключения с академични и практически ползи. Необходими са допълнителни усилия за обособяване на изследванията на волатилността и следователно е необходимо ново поколение методи за нейната оценка.

Глава 4

Научни приноси

- Основен принос е прилагането на стохастични модели (модел на Блек-Шоулс, модел на Хестън, модел на Бейтс, модел базиран на експонента от модифициран устойчив процес (exponential tempered stable model), модел със стохастична волатилност и модифициран устойчив процес) към различни рискови мярки (Застрашена Стойност (Value at Risk), Очакван Недостиг (Expected Shortfall), Експектилна Рискова Мярка (Expectile Risk Measure), Ентропична Застрашена Стойност (Entropic VaR)).

- Отрязаното Очакване (Truncated Expectation) е изведено чрез характеристичната функция на процеса (Твърдение 5.4). На тази основа са дадени формули за изчисляване на Очаквания Недостиг и на Експектилната Рискова Мярка чрез Отрязаното Очакване (Теорема 5.2).

- Логаритмизираните доходности в модела на Хестън са представени като нови случайни величини (Твърдение 6.2) чрез усредняване по стационарното разпределение на процеса на волатилност. Тяхните абсциси на сходимост са определени като подмножество от абсцисите на изходния процес (Лема 6.2, Теорема 6.1). Разгледани са всички варианти на позициониране на абсцисите (Лема 6.4, Теорема 6.2, Теорема 6.3, Теорема 6.4). Подходът е приложен също към модели, които надграждат модела на Хестън, напр. модел на Бейтс и модел със стохастична волатилност и скокове, представени от модифициран устойчив процес.

- Дисертацията разглежда и Ентропичната Застрашена Стойност при управлението на риска. Изведена е формула за приемливото множество (Acceptance Set) на мярката (Твърдение 7.2). Доказана е теорема за изчисляване стойността на Ентропична Застрашена Стойност чрез минимизиране на функция, свързана с ФПМ (Теорема 7.1). Изведени са формули за Ентропичната Застрашена Стойност за отделните модели: модел на Блек-Шоулс (формули (7.18) и (7.19)), модел на Хестън (Твърдение 7.5), модел на Бейтс (Твърдение 7.6), модел, базиран на експонента от модифициран устойчив процес (Твърдение 7.4), модел със стохастична волатилност и модифициран устойчив процес (Твърдение 7.7).

- Емпирично е изследвано поведението на рисковите мярки при 5-те модела за индекса S&P500 за последните 23 години като са включени периоди на нормално функциониране на пазара и на финансови кризи. Като основен извод се налага по-добрата реакция на Ентропичната Застрашена Стойност в условия на кризи, а също по-доброто представяне на модели със стохастична волатилност и скокове за целия изследван период.

- На основата на емпирични данни е проучена стойността на индекса на Хърст за логаритмизираната моментна волатилност за 4 водещи пазарни индекса (S&P500, STOXX50E, FTSE, KSE). Изчисленията показват, че между скалиращия коефициент и стойността на индекса на Хърст има линейна зависимост при индекса S&P500 и нелинейна зависимост при останалите индекси. Резултатите свидетелстват, че индексът на Хърст е по-малък от 0.5 през последните 21 години, т.е. волатилността е грапава (rough volatility). Установено е, че стойността на този индекс варира в определени граници и се движи на пакети. Стойността на индекса се повишава при финансови кризи, т.е. волатилността става по-малко грапава.

Глава 5

Благодарности

Тази дисертация би била невъзможна без комфорта, който моята жена Снежина и моят син Никола създадоха за мен вкъщи през последните 4 години. Благодаря на двама Ви за непрестанното насърчаване да продължа усърдно да работя над дисертацията!

Позволете ми да изкажа огромна благодарност на моя научен ръководител доц. дн Цветелин Заевски за съпричастността и вещото методологическо ръководство при разработването на дисертацията. Съвместната работа по статиите към дисертацията ме научиха на много неща.

Бих искал да благодаря и на всички от Института по математика и информатика за прекрасната възможност да бъда част от института и особено на членовете на секция „Изследване на операциите, вероятности и статистика“ за подкрепата.

Библиография

[1] C. Acerbi and D. Tasche. On the coherence of expected shortfall. *Journal of banking & finance*, 26(7):1487–1503, 2002.

[2] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999.

[3] F. Bellini and E. Di Bernardino. Risk management with expectiles. *The European Journal of Finance*, 23(6):487–506, 2017.

[4] A. Dragulescu and V. Yakovenko. Probability distribution of returns in the heston model with stochastic volatility. *Quantitative finance*, 2(6): 443, 2002.

[5] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic finance: an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter, 2004.

[6] J. Gatheral. Rough volatility. *Eventos do IMPA*, 2018. URL https://impa.br/en_US/eventos-do-impa/eventos-2018/research-in-options-2018/.

[7] J. Gatheral, T. Jaisson, and M. Rosenbaum. Volatility is rough. In *Commodities*, pages 659–690. Chapman and Hall/CRC, 2022.

[8] D. Nedeltchev and T.S. Zaevski. Measuring market risk through entropic var. *Working Paper*, x:y, 2025.

[9] W.K. Newey and J.L. Powell. Asymmetric least squares estimation and testing. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 819–847, 1987.

[10] S. Rachev, S. Stoyanov, and F. Fabozzi. *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization: The Ideal Risk, Uncertainty, and Performance Measures*. Wiley, New York, 2008.

[11] W. Thomson. Eliciting production possibilities from a well-informed manager. *Journal of Economic Theory*, 20(3):360–380, 1979.

[12] T.S. Zaevski and D. Nedeltchev. From BASEL III to BASEL IV and beyond: Expected shortfall and expectile risk measures. *International Review of Financial Analysis*, 87:102645, 2023. ISSN 1057-5219. doi: https://doi.org/10.1016/j.irfa.2023.102645. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1057521923001618.

[13] T.S. Zaevski and D. Nedeltchev. Moment generating function of the averaged log-returns in the heston's stochastic volatility model. In *Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences*, volume 78, pages 321–330, 2025.

[14] T.S. Zaevski, Y. S. Kim, and F. J. Fabozzi. Option pricing under stochastic volatility and tempered stable lévy jumps. *International Review of Financial Analysis*, 31:101 – 108, 2014. ISSN 1057-5219. doi: https://doi.org/10.1016/j.irfa.2013.10.004. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1057521913001403.

[15] T.S. Zaevski, O. Kounchev, and M. Savov. Two frameworks for pricing defaultable derivatives. *Chaos, Solitons & Fractals*, 123:309–319, 2019. ISSN 0960-0779. doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.04.025. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077919301365.