БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на

Д И С Е Р Т А Ц И Я

ОПТИМАЛНИ КОДОВЕ И ЗАДАЧИ ЗА ТЪРСЕНЕ

на Емил Миланов Колев

за придобиване на научната степен

„доктор на математическите науки“

по научна специалност

01.01.02 – Алгебра и теория на числата

БАН, София, 2014 г.

Теорията на кодирането възниква с фундаменталната работа на Клод Шенон „A Mathematical Theory of Communication " от 1948 г. Основните задачи, които възникват с развитието на теорията на кодирането, са свързани с намирането на кодове с определени параметри. За решаване на тези задачи се използват знания от различни области на математиката – алгебра, геометрия, комбинаторика, информатика. Разработването на различни методи и подходи за атакуване на проблематиката на теорията на кодирането води до обогатяване и на всяка от използваните области на математиката.

От друга страна, успоредно с решаването на основните задачи от теорията на кодирането възникват проблеми, чието решаване представлява чисто математическо предизвикателство.

Настоящият труд е посветен на изследвания, свързани с:

- намиране на точни стойности за мощността на оптимални двоични кодове със зададена дължина и минимално разстояние и определяне на броя на нееквивалентните оптимални кодове със съответните параметри;
- намиране на точни стойности и получаване на граници за мощността на оптимални покриващи кодове;
- намиране на точни стойности за мощността на покрития на $\mathbb{F}_3^n$ със сфери и определяне броя на нееквивалентните оптимални покрития;
- задачи за неадаптивно търсене на неизвестен елемент с множества с равни тегла;
- една двумерна задача за адаптивно търсене.

В Глава 1 са въведени основните понятия и дефиниции.

Нека $\mathbb{F}_q$ е поле с q елемента, а $\mathbb{F}_q^n$ е n-мерното векторно пространство над $\mathbb{F}_q$. Под *разстояние по Хеминг* между два вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_2, y_2, \ldots, y_n)$ от $\mathbb{F}_q^n$ разбираме броят на координатите, в които те се различават, т.е.

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|.$$

Вяко подмножество C на n-мерното векторно пространство $\mathbb{F}_q^n$ наричаме q-ичен код. Минимално разстояние d на код C наричаме най-малкото от разстоянията между две различни кодови думи. С $(n, M, d)_q$ означаваме код над $\mathbb{F}_q$ с дължина n, минимално разстояние d и мощност M. Във връзка с коригиращите възможности на един код основната задача на теорията на кодирането е при зададени n, q и d да се намери най-голямото M, за което съществува $(n, M, d)_q$ код. Тази най-голяма стойност се бележи с $A_q(n, d)$. Това означава, че търсим стойността на функцията $A_q(n, d)$, където:

$$A_q(n, d) = \max\{M \mid \text{съществува } (n, M, d) \ q\text{–ичен код } \}.$$

С $B_q(n, d)$ означаваме броя на нееквивалентните оптимални кодове със съответните параметри.

В Глава 2 са представени резултатите, получени в [1], [35], [61]. Основният резултат е намирането на точните стойности $A(10, 3) = 72$ и $A(11, 3) = 144$, както и определянето на всички 562 нееквивалентни $(10, 72, 3)$ кода и всички 7398 нееквивалентни $(11, 144, 3)$ кода. За целта са класифицирани кодове с по-малка дължина, след което съответните кодове са разширявани и тествани за еквивалентност.

За опростяване на записването, използваме означенията $A(n, d) = A_2(n, d)$ и $B(n, d) = B_2(n, d)$.

Изучаването на функцията $A(n, d)$ предизвиква значителен интерес, особено в първите години на развитие на теорията на кодирането. На тази задача са посветени значителен брой изследвания, като във всеки момент особен интерес предизвиква най-малката стойност на n, за която съответната стойност на $A(n,d)$ не е определена [6], [9], [25], [28], [56].

Всяко, макар и малко, подобрение на съществуващите граници се оказва стъпка към постигане на крайната цел – определяне на точната стойност на $A(n,d)$ за съответното n. За целта се търсят горни и долни граници, като тяхното подобряване евентуално води до намиране и на точната стойност.

Долните граници за $A(n,d)$ са винаги конструктивни, т.е. съществуването на (n,M,d) код означава, че $A(n,d) \geq M$. За намирането на подходящи кодове (такива с голяма мощност) се използват различни подходи. При „малки“ стойности на n построяването на оптимален код може да се извърши с помощта на комбинаторни съображения. Оказва се, че с увеличаването на n трудността на задачата нараства експоненциално, т.е. получаването на кодове с голяма мощност с използването на чисто комбинаторни разсъждения рядко води до намирането на оптимални кодове.

За намиране на горни граници за $A(n,d)$ се използват комбинаторни методи. За доказване, че $A(n,d) < M$ трябва да се докаже, че не съществува (n,M,d) код. Основната трудност е свързването на „локалната“ характеристика минимално разстояние d с „глобалната“ характеристика брой на кодовите думи M.

Стандартният комбинаторен подход за доказване на несъществуване на (n,M,d) код включва подходящо разделяне на кодовите думи на този код на групи в зависимост от някоя от следните характеристики.

1. Брой на кодовите думи, които имат дадена стойност в една или повече фиксирани координати.

2. Брой на кодовите думи с определено тегло.

3. Брой на кодовите думи, които се съдържат в дадено фиксирано множество (например обединение на няколко сфери).

Ако чрез разглеждане на броя на кодовите думи в различните множества и връзките между тях се достигне до противоречие, то е изпълнено неравенството $A(n, d) < M$.

След започване на масовото използване на компютрите за решаването на задачи от теория на кодирането, комбинаторните подходи за намиране на оптимални кодове се съчетават с компютърни пресмятания. Особено важно в това направление става намирането на ефективни алгоритми за търсене.

Намирането на $A(n, 3)$ за малки стойности на n (например до $n \leq 7$) не представлява особена трудност. В [2] е намерена точната стойност $A(8, 3) = 20$. По-късно в [3] е построен $(10, 40, 4)$ двоичен код на Best, което доказва равенството $A(9, 3) = 40$, откъдето следва границата $A(10, 3) \leq 80$. В статията [75] на Wax се твърди, че $A(10, 3) \leq 78$, но както по-късно се показва в [2], това доказателство е грешно. Границата за $A(10, 3)$ е подобрявана няколко пъти: през 1980 г. Best в [3] доказва $A(10, 3) \leq 79$, след това през 1994 Litsyn и Vardy в [55] показват, че $A(10, 3) \leq 78$, през 1995 г. Klein, Litsyn и Vardy в [34] намират границата $A(10, 3) \leq 76$ и през 1998 г. Колев в [35] доказва, че $A(10, 3) \leq 74$.

Подробна информация за развитието на проблема може да се намери в [56]. Подобрения на някои от границите са публикувани в [6], [9] и [28].

Във втора глава е доказано, че за $A(n, 3)$, $B(n, 3)$ и $B(n+1, 4)$, за $n \leq 11$ са в сила стойностите от дадената таблица.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$A(n, 3) = A(n+1, 4)$	2	2	4	8	16	20	40	72	144
$B(n, 3)$	1	2	1	1	1	5	1	562	7398
$B(n+1, 4)$	1	2	1	1	1	3	1	96	1041

В Глава 3 са представени резултатите, получени в [36], [37], [38], [48], [49], [51] и [52].

Радиус на покритие на кода C се нарича най-малкото естествено число R, за което кълбетата с центрове кодовите думи и радиус R, покриват цялото пространство F_q^n. Основна задача е при зададени n, q и R да се намери минималното M, за което съществува q-ичен код C с дължина n, мощност M и радиус на покритие R. С $K_q(n, R)$ означаваме тази минимална стойност. За опростяване на означенията нека $K(n) = K_2(n, 1)$. Ще казваме, че код C е $(n, M)R$ код, ако C има дължина n, мощност M и радиус на покритие R.

Една тривиална долна граница за $K(n)$ се дава от неравенството

$$K(n) \geq \frac{2^n}{n+1}.$$

Когато n е четно число, горната граница може да бъде подобрена [76] до $K(n) \geq \frac{2^n}{n}$.

Долни граници за $K(n, R) = K_2(n, R)$ са получавани в [10], [11], [12], [22], [23], [65], [66], [67], [76]. В [36] е доказана границата $K(9, 1) \geq 56$. В дисертацията е представена получената в [38] граница $K(9, 1) \geq 57$.

Разглеждането на задачи за смесени кодове е естествено обобщение на съответните задачи за кодове над дадено поле. С особен интерес се отличават смесените кодове, в които имаме двоични и троични координати. Това е така поради пряката връзка на задачата за радиус на покритие на смесени кодове с играта ТОТО 1 на спортния тотализатор.

Класическата игра ТОТО 1 се описва по следния начин. Всеки участник дава предположение как ще завърши всяка една от дадени 13 срещи. Възможните предположения са: реми, победа за отбор А или победа за отбор Б. При познаване на определен брой срещи участникът получава парична награда.

Да допуснем, че участник в ТОТО 1 иска да си осигури 12 познати резултата, без да има никакво предположение как ще завършат срещите. За целта може да се използва съвършения троичен $[13, 10, 3]$ код на Хеминг, който има 3^{10} кодови думи. На всяка кодова дума съответства колонка с 13 предположения като 0 означава реми, 1 означава победа за единия отбор и 2 означава победа за другия отбор.

Сега да предположим, че знаем със сигурност как ще завършат част от срещите, за други b срещи знаем, че даден резултат е невъзможен и за някои t срещи не можем да предвидим нищо. Искаме да попълним минимален възможен брой предположения така, че да си гарантираме познаването на $13 - R$ срещи.

Ако разгледаме смесен двоичен-троичен код с b двоични и t троични координати, горната задача се формулира като:

Да се намери код с минимална мощност и радиус на покритие R. Тази най-малка стойност се бележи с $K(t, b, R)$.

Задачата за намиране на $K(t, b, R)$ за различни стойности на t, b и R е разглеждана в [19], [24], [31], [54], [59], [69], [78], [79]. Точните стойности за тези числа са известни само за малък брой стойности на n. В Глава 3 е предложен комбинаторен подход за намиране на долни граници за $K(t, b, R)$. В част от случаите тези долни граници се оказват достатъчни за намиране на съответните точни стойности.

В [37] и [49] са намерени долни граници и точни стойности за $K_{3,2}(t, b)$ – минималната мощност на смесен код с t троични и b двоични коодринати и радиус на покритие 1. Получените резултати са:

$$K_{3,2}(1, 5, 1) = 16,\ K_{3,2}(2, 4, 1) = 20,$$

$$K_{3,2}(4, 2, 1) = 36,\ K_{2,3}(5, 0, 2) = 8,\ K_{3,2}(4, 1, 2) = 6.$$

$$K_{3,2}(2, 2R + 1, R) = 6,\ K_{3,2}(2, 2R - 1, R) = 4,\ K_{3,2}(2, 2R, R) = 6.$$

В [48], [51] и [52] е разгледана задачата за намиране на оптимални покрития на $\mathbb{F}_3^n$ за $n \leq 13$ със сфери с радиус n. Това означава, че търсим код C

със следното свойство: за всеки елемент $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_3^n$ съществува $\mathbf{x} \in C$, за който $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n$. Минималната мощност на такъв код се бележи с $T(n)$. Кодът се нарича оптимален, ако $|C| = T(n)$.

Редицата от стойностите на $T(n)$ е част от The on-line encyclopedia of integer sequences, [73] номер A086676.

Да припомним, че задачата за намирането на минималния брой колонки при играта ТОТО 1, които ни осигуряват определен брой познати резултати, е известна като *the football pool problem* [20].

При разглежданата задача целта е, независимо от резултатите от срещите, винаги да имаме колонка без нито един познат резултат. Ето защо в [5] тази задача е наречена *inverse football pool problem.*

Първите известни резултати, свързани с определяне на стойностите на $T(n)$ са получени във Финландското списание Veikkaaja през 50-тте години на миналия век. В Таблица 1 за $n \leq 13$ са представени известните резултати за $T(n)$ от [5].

n	T(n)
1	2
2	3
3	5
4	8
5	12
6	18
7	29
8	44
9	66–68
10	99–104
11	149–172
12	224–264
13	336–408

Таблица 1.

Точните стойности на $T(n)$ са известни за $n \leq 8$, като за всяко $n \leq 7$ съществува единствено с точност до еквивалентност покритие [5].

В същата статия е отбелязано, че $T(8) = 44$ като не е известно колко нееквивалентни покрития съществуват. Първата неопределена стойност е $T(9)$.

За функцията $T(n)$ е в сила следната рекурсивна граница

$$T(n) \geq \frac{3}{2}T(n-1).$$

Известните резултати за $n \leq 6$ както и границите $T(7) \leq 29$ и $T(8) \leq 44$ са получени във Финландското списание Veikkaaja. Очевидно имаме $T(1) = 2$ и като използваме горното неравенство, получаваме $T(2) \geq 3$, $T(3) \geq 5$, $T(4) \geq 8$, $T(5) \geq 12$, $T(6) \geq 18$. В долната таблица е представено покритие на $\mathbb{F}_3^6$ с 18 елемента [5].

1.	0 0 0 0 0 0		10.	0 2 0 2 1 1
2.	1 1 1 1 0 0		11.	0 1 1 0 2 1
3.	2 2 1 0 1 0		12.	1 0 0 1 2 1
4.	1 0 2 2 1 0		13.	2 2 0 1 0 2
5.	0 2 2 1 2 0		14.	0 1 2 2 0 2
6.	2 1 0 2 2 0		15.	1 1 0 0 1 2
7.	1 2 2 0 0 1		16.	0 0 1 1 1 2
8.	2 0 1 2 0 1		17.	2 0 2 0 2 2
9.	2 1 2 1 1 1		18.	1 2 1 2 2 2

Таблица 2: Оптимално покритие на $\mathbb{F}_3^6$.

Следователно $T(2) = 3$, $T(3) = 5$, $T(4) = 8$, $T(5) = 12$, $T(6) = 18$.

Първата стойност на n, за която $T(n) \neq \left\lceil \frac{3}{2}T(n-1) \right\rceil$, е $n = 7$. С търсене с компютър в [5] е доказано, че $T(7) = 29$, докато рекурсивната граница дава $T(7) \geq 27$. Като използваме отново рекурсивната граница, получаваме $T(8) \geq 44$ и понеже съществува покритие на $\mathbb{F}_3^8$ с 44 елемента, то $T(8) = 44$. Горните граници за $n = 9$ и $n = 10$ са получени в [64] чрез т.н. *tabu search*.

След като сме определили точната стойност на $T(n)$ за някое n, се интересуваме колко оптимални нееквивалентни покрития съществуват.

В [5] е доказано, че при за всяко $n \leq 7$ с точност до еквивалентност съществува единствено покритие. Единственото покритие при $n = 7$ е дадено в Таблица 3.

1.	0 0 0 0 0 0 0	11.	2 2 2 2 2 2 0	21.	1 2 1 2 2 2 1
2.	1 1 1 1 0 0 0	12.	2 1 2 1 0 0 1	22.	0 1 1 0 2 0 2
3.	2 2 1 0 1 0 0	13.	0 2 0 2 0 0 1	23.	1 0 0 1 2 0 2
4.	1 0 2 2 1 0 0	14.	1 2 2 0 1 0 1	24.	0 2 2 1 2 1 2
5.	1 2 2 0 0 1 0	15.	2 0 1 2 1 0 1	25.	2 1 0 2 2 1 2
6.	2 0 1 2 0 1 0	16.	2 2 1 0 0 1 1	26.	1 1 0 0 0 2 2
7.	2 1 2 1 1 1 0	17.	1 0 2 2 0 1 1	27.	0 0 1 1 0 2 2
8.	0 2 0 2 1 1 0	18.	0 0 0 0 1 1 1	28.	2 2 0 1 1 2 2
9.	1 0 1 0 2 2 0	19.	1 1 1 1 1 1 1	29.	0 1 2 2 1 2 2
10.	0 1 0 1 2 2 0	20.	2 0 2 0 2 2 1		

Таблица 3: Единственото оптимално покритие при $n = 7$.

В [48] се доказва, че съществуват две нееквивалентни покрития на $\mathbb{F}_3^8$. Освен това в [51] и [52] е намерена точната стойност $T(9) = 68$, което води до подобряване на известните граници за $T(n)$, както следва $T(10) \geq 102$, $T(11) \geq 153$, $T(12) \geq 230$ и $T(13) \geq 345$.

В Глава 4 са разгледани задачи за търсене. Представени са резултати, публикувани в [14], [15], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [50], [53].

Общата постановка на класическата задача за търсене е следната: Дадено е множество A от което е избран неизвестен за нас елемент x. Можем да задаваме въпроси от вида: принадлежи ли елементът x на избрано от нас подмножество B на A. Отговорът на всеки от въпросите е „да“ или „не“. Целта е да намерим елемента x с възможно най-малко въпроси. Когато елементът x е намерен, казваме, че сме решили задачата за търсене.

При това за избор на множеството-въпрос B могат да бъдат наложени различни ограничения. Най-общо множеството B може да бъде избирано само от дадена фамилия $\mathcal{A}$ от подмножества на A. В зависимост от контекста на задачата множеството $\mathcal{A}$ се задава по различни начини. Възможно е ограниченията, наложени върху възможните въпроси, да правят съответната задача за търсене нерешима.

В зависимост от начина на задаване на въпросите са възможни следните видове търсене:

- **Адаптивно търсене.** Когато всеки въпрос се задава след като е получен отговора на предишния, говорим за адаптивно търсене. Тогава е възможно всеки следващ въпрос да използва получената от отговорите на предишните въпроси информация. По този начин използваната стратегия се адаптира към получените отговори.

- **Неадаптивно търсене.** Когато всички въпроси се задават едновременно, говорим за неадаптивно търсене.

В общия случай е ясно, че при една и съща задача за търсене при адаптивното търсене са необходими не по-голям брой въпроси в сравнение с неадаптивното търсене.

В зависимост от истинността на получаваните отговори са възможни следните видове търсене:

- Търсене, при което всички отговори са верни.
- Търсене, при което се допускат определен брой неверни отговори.
- Търсене, при което част от отговорите се „загубват“.

Ясно е, че когато се допускат неверни отговори за намиране на неизвестния елемент са необходими повече въпроси. В такива случаи задачата се моделира в термините на теорията на кодирането. Това позволява да се използват свойствата на кодове, поправящи грешки.

Възможни са разновидности на основната задача за търсене. Например, когато се търсят два или повече елемента от A, отговорите на въпросите могат да съдържат информация дали в B има поне един от търсените елементи или точно колко от търсените елементи се съдържат в B.

Известно е, че за решаване на класическата задача за търсене са необходими поне $\lceil \log_2 |A| \rceil$ въпроса.

При решаване на задачи за търсене основен е въпросът дали решението на съответната задача се реализира с минималния брой въпроси.

Разглеждаме произволно крайно множество A и функция $\mathrm{w} : A \to \mathbb{N}$, наречена *теглова функция* за множеството A. За произволно подмножество B на A дефинираме *тегло на подмножеството B* по следния начин:

$$\mathrm{w}(B) = \sum_{x \in B} \mathrm{w}(x).$$

За неизвестен елемент $x \in A$ и дадено естествено число S множествата-въпроси са онези подмножества B на A за които $\mathrm{w}(B) = S$. Ще наречем така описаната задача (A, w, S) задача за търсене. Естественото число S се нарича „добро“, ако съответната (A, w, S) задача е решима, т.е. неизвестният елемент x може да бъде намерен с неадаптивно търсене. Това означава, че съществува някакъв брой от множества-въпроси, с помощта на които се намира x. За различни добри стойности на S броят на множествата-въпроси за намиране на x е различен. Естественото число S се нарича *подходящо*, ако неизвестния елемент x може да бъде намерен с минималния възможен брой въпроси.

Основната задача, която ще разгледаме е намирането на всички добри и подходящи числа при $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}\}$ и теглова функция от вида:

$$\mathrm{w}_h(a_i) = \left[\frac{i-1}{2^h}\right] + 1$$

за $h = 1, 2, \ldots, n$, където $[x]$ е цялата част на x.

За различни стойности на h получаваме различни теглови функции и съответно различни по трудност задачи за търсене.

1. При $h = n$, т.е. $\mathrm{w}(a_i) = 1$ за $i = 1, 2, \ldots, 2^n$ задачата е тривиална, като добри са всички числа S, $1 \leq S < 2^n$, а единственото подходящо число S е $S = 2^{n-1}$.

2. При $h = 0$, т.е. $\mathrm{w}(x_i) = i$ for $i = 1, 2, \ldots, 2^n$ получената задача е решена в [42], [43]. Получените резултати са:

   1. Естественото число S е добро тогава и само тогава, когато
   $$S \in [2^n - 1, 2^{2n-1} - 2^{n-1} + 1].$$

   2. Ако $n \neq 2^k$, то числото S е подходящо тогава и само тогава, когато
   $$S \in \left[2^{2n-2} + 2^{n-2} - \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{2}; 2^{2n-2} + 2^{n-2} + \frac{\binom{2n-1}{n-1}}{2}\right].$$

   3. За $n = 2^k$, $k \geq 2$ числото S е подходящо тогава и само тогава, когато S е от интервала
   $$\left[2^{2n-2} + 2^{n-2} - \frac{1}{2}\left(\binom{2n-1}{n-1} - 1\right); 2^{2n-2} + 2^{n-2} + \frac{1}{2}\left(\binom{2n-1}{n-1} - 1\right)\right].$$

3. При $h = n-1$ и $n = 2t+1$, т.е. $\mathrm{w}(x_i) = 1$ за $i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ и $\mathrm{w}(x_i) = 2$ за $i = 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$. Доказано е, че S е подходящо тогава и само тогава, когато
$$S \in \left[3.2^{n-2} - \binom{n-2}{t}, 3.2^{n-2} + \binom{n-2}{t}\right].$$
4. При $h = n-2$ имаме $\mathrm{wt}(x_i) = 1$ за $i = 1, 2, \ldots, 2^{n-2}$, $\mathrm{wt}(x_i) = 2$ за $i = 2^{n-2}+1, \ldots, 2^{n-1}$, $\mathrm{wt}(x_i) = 3$ за $i = 2^{n-1}+1, \ldots, 3.2^{n-2}$ и $\mathrm{wt}(x_i) = 4$ за $i = 3.2^{n-2}+1, \ldots, 2^n$. Доказано е, че за четно $n = 2t$, множеството от подходящите числа S съдържа интервала
$$\left[2^{n+1} - \binom{n-2}{t-1}, 2^{n+1} - \binom{n-2}{t-1}\right].$$

Разгледана е задачата за търсене на два елемента [47]. Доказано е следното твърдение:

При неадаптивно търсене на два елемента без грешни отговори, числото S е добро тогава и само тогава, когато
$$S \in \left[2^n - 1, 2^{2n-1} - 2^{n-1} + 1\right].$$

Да допуснем, че в получените отговори е разрешен един неверен и неизвестният елемент се избира от крайно множество $\mathcal{A}$ с M елемента. Без ограничение можем да считаме, че
$$\mathcal{A} = \{1, 2, 3, \ldots, M\}.$$
За всеки елемент x от множеството $\mathcal{A}$ получените k отговора ще представляват стълб x от характеристичната матрица (когато няма грешен отговор) или ще се отличават само в една позиция от същия този стълб (когато има грешен отговор). За да можем да определим неизвестния елемент x, всеки два стълба трябва да се различават в поне 3 позиции. Това означава,

че двоичния код, образуван от стълбовете на характеристичната матрица, има дължина $n = k$, минимално разстояние $d = 3$ и мощност M, т.е. това е един двоичен $(n, M, d \geq 3)$ код. Скаларното произведение на всеки ред на G с $(1, 2, 3, \ldots, M)$ е равно на S. Матрица с горните свойства ще наричаме *подходяща матрица с тегло* S.

В [44] се доказва съществуването на подходяща матрица при използване на цикличен код с нечетна дължина. Нека C е двоичен цикличен $(n, M = 2^k, 3)$ код, който съдържа вектора съставен от единици. Съществува подходяща матрица $n \times M$ с тегло $\dfrac{\sum_{i=1}^{M} i.\mathrm{wt}(v_i)}{n}$ където $v_1, v_2, \ldots, v_M$ са кодовите думи от C и $\mathrm{wt}(v_i) \leq \mathrm{wt}(v_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, M-1$.

При $M = 2^{2^r - r - 1}$ минималното n, за което съществува $(n, M, 3)$ код е $n = 2^r - 1$. Следователно за да конструираме подходяща матрица трябва да използваме съвършен двоичен код с параметри $(n = 2^r - 1, M = 2^{2^r - r - 1}, 3)$. Тъй като кодът на Хеминг удовлетворява горните условия, то за всяко r можем да намерим подходящи граници за S. Да означим тези граници с S_{min} и S_{max}.

Оказва се, че с използването на съседен клас на кода на Хеминг можем да получим по-добри граници за подходящите числа S.

Доказано е, че при използване на код на Хеминг с дължина $n = 2^t - 1$ при t четно число всяко S от интервала $[S_{min}, S_{max}]$ е подходящо [50].

В Глава 4 е разгледана и една двумерна задача за търсене, предложена от Katona [30]. Това е задача за адаптивно търсене на неизвестен единичен квадрат в даден правоътълник. Първо ще дадем формално описание на задачата. Множеството

$$\mathcal{A}(m, n) = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbf{Z}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

се нарича правоъгълник с размери $m \times n$. Когато $m = n$ казваме, че е е даден квадрат с размерност n.

За два елемента $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathcal{A}(m,n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathcal{A}(m,n)$ записваме $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ тогава и само тогава, когато $a_1 \leq b_1$ и $a_2 \leq b_2$. Както в класическата задача за търсене нека е избран елемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{A}(m,n)$, който не ни е известен.

Искаме да намерим неизвестния елемент $\mathbf{x}$ с минимален брой въпроси от вида: Вярно ли е, че $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$?

Задаването на въпрос е еквивалентно на посочването на елемент $\mathbf{a}$ на $\mathcal{A}(m,n)$. Разглеждаме адаптивно търсене, което означава, че всеки въпрос се задава след като е получен отговора на предишния.

Да означим с $t(m,n)$ минималният брой въпроси, необходими за намиране на $\mathbf{x}$. В сила са следните неравенства [53], [72]

$$\lceil \log_2 m + \log_2 n \rceil \leq t(m,n) \leq \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil.$$

Лесно се доказва, че $\lceil \log m + \log n \rceil + \varepsilon = \lceil \log m \rceil + \lceil \log n \rceil$, където $\varepsilon = 0$ или 1.

Когато $\varepsilon = 0$ имаме $\lceil \log m + \log n \rceil = \lceil \log m \rceil + \lceil \log n \rceil$ и тогава задачата за определяне на $t(m,n)$ е решена. Когато $\varepsilon = 1$ за $t(m,n)$ има две възможности и в този случай задачата за определяне на $t(m,n)$ се оказва нетривиална.

Правоъгълник $\mathcal{A}(m,n)$ се нарича *разрешим* ако съществува алгоритъм, чрез който неизвестният елемент $\mathbf{x}$ от $\mathcal{A}(m,n)$ може да бъде намерен с $\lceil \log m + \log n \rceil$ въпроса. В противен случай правоъгълникът се нарича *неразрешим*.

В [53] е доказано, че за всяко m от вида $m = \dfrac{2^{si}-1}{2^s-1}$ и всяко n правоъгълникът $\mathcal{A}(m,n)$ е разрешим. Намерени са най-малкият неразрешим правоъгълник $\mathcal{A}(11,93)$ и най-малкият неразрешим квадрат $\mathcal{A}(181,181)$.

По мнение на автора, основните приноси в дисертационния труд са:

- Определени са точните стойности на функцията $A(n,3)$ (минималният брой кодови думи на двоичен код с дължина n и минимално разстояние 3) за първите два нереши случая: $A(10,3) = 72$ и $A(11,3) = 144$. Намерени са всички нееквивалентни 562 кода, за които се достига границата $A(10,3) = 72$ и всички нееквивалентни 7398 кода, за които се достига границата $A(11,3) = 144$.

- Изследвана е задачата за намиране на минималния брой кодови думи за двоични или смесени двоични/троични кодове с дадена дължина и даден радиус на покритие. Намерени са следните граници и точни стойности за оптимални покриващи кодове, както следва:

$$K_2(9,1,1) \geq 57, K_{3,2}(1,5,1) = 16, K_{3,2}(2,4,1) = 20, K_{3,2}(4,2,1) = 36,$$

$$K_{3,2}(5,0,2) = 8, K_{3,2}(4,1,2) = 6, K_{3,2}(2,2R+1,R) = 6,$$

$$K_{3,2}(2,2R-1,R) = 4, K_{3,2}(2,2R,R) = 6.$$

- Изследвана е задачата за определяне на минималния брой сфери с радиус n, необходими за покриване на $\mathbb{F}_3^n$. Доказано е, че съществуват две нееквивалентни покрития на $\mathbb{F}_3^8$. Решен е първвия нерешен случай $n = 9$, като е доказано, че минималният брой сфери с радиус 9, които покриват $\mathbb{F}_3^9$ е 68.

- Изследвана е задачата за неадаптивно търсене на неизвестен елемент с множества с равни тегла. Намерени са необходими и достатъчни условия едно число да е добро или подходящо при неадаптивно търсене на неизвестен елемент без грешни отговори. Намерени са необходими и достатъчни условия едно число да е добро при неадаптивно търсене на два неизвестни елемента без грешни отговори.

- Намерени са граници за подходящите числа при неадаптивно търсене с най-много един грешен отговор. Показана е връзката между цикличните кодове и конструиране на подходящи матрици.
- Доказано е, че за всяко m от вида $m = \dfrac{2^{si}-1}{2^s-1}$ и всяко n правоъгълникът $\mathcal{A}(m,n)$ е разрешим. Намерени са най-малкия неразрешим правоъгълник $\mathcal{A}(11,93)$ и най-малкия неразрешим квадрат $\mathcal{A}(181,181)$.

Апробация на резултатите

В дисертацията са включени резултати, получени в периода 1993 г. – 2013 г. Резултатите, представени в публикации [P3], [P5], [P6], [P9], [P10], [P11], [P12], [P15], [P16], [P17], [P18], [P19] и [P20] са получени самостоятелно. Останалите резултати са получени в съавторство, както следва:

Ланджев	[P1], [P2]
Hill	[P7]
Байчева	[P4], [P21], [P22]
Байчева, Östergård	[P8]
Дичев	[P13], [P14]

Част от резултатите са публикувани в научни списания, както следва:

Lecture Notes in Computer Science	[P1]
Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Corr. Codes	[P3]
Discrete Mathematics	[P7]
IEEE Trans on Information Theory	[P8]
CR Acad. Bulg. Sci.	[P5], [P20]
Central European Journal of Mathematics	[P12]
Utilitas Mathematica	[P22]
Serdica Mathematical Journal	[P2], [P11]

Част от резултатите са докладвани на международни научни конференции, както следва:

International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory: [P6], [P10], [P13], [P16], [P17], [P19];

International Workshop Optimal Codes and Related Topics: [P4], [P15], [P18], [P21];

International congress MASSEE: [P13];

Swedish-Bulgarian Government IT Security Conference Information Security in the 21th Century: Global Convergence: [P9];

British Combinatorial Conference, 1997, Milton Keyns, UK: [P7];

Eleventh Intern. Symposium AAECC, Paris 1995: [P3];

First French-Israeli Workshop on Algebraic Coding: [P1].

Отделни резултати от дисертацията са докладвани пред Националния семинар по теория на кодирането, както и на семинари в Институт по математика, Унгарска Академия на Науките, Salford University, University of East Anglia, Norwich, University of Bilbao.

Библиография

[1] T. Baicheva and E. Kolev, Binary Codes of Length Eight, Minimum Distance Three and Twenty Codewords, Proc. of the International Workshop on Optimal Codes, June 9-15, Sozopol, Bulgaria, 1998, 5-8.

[2] M. R. Best, A. E. Brouwer, F. J. MacWilliams, A. M. Odlyzko and N. J. A. Sloane and W. D. Smith, Bounds for binary code of length less than 25 , *IEEE Trans. Inform. Theory*, 24, 1978, 81-93.

[3] M. R. Best, Binary codes with a minimum distance of four *IEEE Trans. Inform. Theory*, 26, 1980, 738-742.

[4] A. Blokhuis and C. W. H. Lam, More coverings by rook domains, *J. Comnin. Theory, Ser. A* 36, 1984, 240-244.

[5] D. Brink, The inverse Football pool problem, *Journal of Integer Sequences* 14, article 11.8.8

[6] A. E. Brouwer, J. B. Shearer, N. J. A. Sloane and W. D. Smith, A new table of constant weight codes , *IEEE Trans. Inform. Theory*, 36, 1990, 1334-1380.

[7] W. A. Carnielli, On covering and coloring problems by rook domains,*Discrete Mathematics,* 57, 1985, 9-16.

[8] W. Chen and I. S. Honkala, Lower bounds for q-ary covering codes, *IEEE Trans. Infrom. Theory,* 36, 1990, 664-671.

[9] G. Cohen, I. Honkala, S. Litsyn and A. Lobstein, *Covering codes*, Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1997.

[10] G. D. Cohen, M. G. Karpovsky, H. F. Matson, Jr., and J. R. Schatz, Covering radius – survey and recent results, *IEEE Trans. Inform. Theory* 32, 1985, 328-343.

[11] G. D. Cohen, A. C. Lobstein, and N. J. A. Sloane, Further results on the covering radius of codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* 32, 1986, 680-694.

[12] G. D. Cohen, S. N. Litsyn, A. C. Lobstein and H. F. Mattson, Jr, Covering Radius 1985-1994, *Applicable Algebra in Engineering, Comunication and Computing,* vol.8, No.3, 1997, 173-239.

[13] J. Czyzowicz, D. Mundici and A. Pelc, Ulam's Searching Game With Lies , *J. Combin. Theory Ser. A* 52 1989, 62-76.

[14] N. Dichev, E. Kolev, Nonadaptive search with a lie, *Ninth International Workshop, Algebraic and Combinatorial Coding theory*, June 19-25, Kranevo, Bulgaria, 2004, 120-124.

[15] N. Dichev, E. Kolev, Search with a lie, *International congress MASSEE 2003* September 15-21, Bulgaria, 2003.

[16] B. Elspas, A conjecture on binary nongroup codes,*IEEE Trans. Inform. Theory*, 11, 1965, 599-600.

[17] T. Etzion and G. Greenberg, Construction for perfect mixed codes and other covering codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* 39, 1993, 209-214.

[18] R. I. Graham, N. J. A. Sloane, On the covering radius of codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* 31(3), 1985, 385-401.

[19] H. O. Hämäläinen, S.Rankinen, Upper bounds for football pool problems and mixed covering codes, *J. Combin. Theory Ser.A*, 56, 1991, 84-95.

[20] H. Hämäläinen, I. Honkala, S. Litsyn, P. Östergård, Football Pools – A Game for Mathematicians, *The American Mathematical Monthly*, 102(7), 1995.

[21] I. S. Honkala, Modified bounds for covering codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* 34, 1988, 1343-1344.

[22] I. S. Honkala, Lower bounds for binary covering codes, *IEEE, Trans. Inform. Theory,* 34 (2), 1988, 326-329.

[23] I. S. Honkala, Modified bounds for covering codes, *IEEE Trans. Inform. Theory,* 37(2), 1991, 352-365.

[24] I. Honkala, Lower bounds for binary covering codes, *IEEE Trans. Inform. theory*, 34, 1988, 326-329.

[25] R. Hill, A first course in Coding Theory, *Clarendon press*, Oxford, 1986.

[26] R. Hill and J. P. Karim, Searching With lies: the Ulam Problem, *Discrete Mathematics,* 106-107, 1992, 273-283.

[27] D. Julin, Two improved block codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* 11, 1965, 459.

[28] M. Kaikkonen, Codes from affine permutation groups, *Des. Codes Cryptogr.,*15, 1999, 183-184.

[29] H. J. I. Kamps and J. H. van Lint, A covering Problem, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai; Hung. Combin. Theory and Appl.,* Balantonfüred, Hungary, 1969, 679-685.

[30] G. O. H. Katona, Renýi and the combinatorial search problems, *Periodica Math. Hungar*

[31] G. Kéri, On the covering radius of small codes, *Journal Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 40(1-2), 2003, 242-256.

[32] G. Kéri, P. R. J. Östergård, Further results on the covering radius of small codes, *Discrete Mathematics*, Volume 307, Issue 1, 6 January 2007, pp. 69Ц77.

[33] S. Kapralov, Enumeration of some Dyson sets, *Twelfth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, September 5-11, 2010, Akademgorodok, Novosibirsk, Russia pp. 178-181.

[34] Y. Klein, S. Litsyn and A. Vardy, Two new bounds on the size of binary codes with a minimum distance of 3 , *Des. Codes Cryptogr.,* 6, 1995, 219-227.

[35] E. Kolev, An Improved Upper Bound on $A_2(10, 3)$, *Fifth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding theory*, Pskov, Russia, September 6-12, 1998, 155-157.

[36] E. Kolev, R. Hill, An Improved Lower Bound on the covering number $K_2(9, 1)$, *Discrete Mathematics* 197/198, 1999, 483-489.

[37] E. Kolev, Mixed Covering Codes with Two Binary and Four Ternary Coordinates, *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 948, 1995, 312-322

[38] E. Kolev, A $(9; 56)1$ binary code does not exist, *CR Acad. Bulg. Sci.*, 51(11-12), 1998, 25Ц28.

[39] E. Kolev, Codes over GF(3) of Length 5, 27 Codewords and Covering Radius 1, *Journal of Combinatorial Designs*, 1(4), 1993, 265-275.

[40] E. Kolev, Nonadaptive Search with Sets of Given Sum, *Eight International Workshop Algebraic and Combinatorial Coding theory*, September 8-14, Tsarskoe Selo, Russia, 2002, 159-161.

[41] E. Kolev, Equivalent Codes and Backtrack Search, *Swedish-Bulgarian Government IT Security Conference Information Security in the 21th Century: Global Convergence*, September 18-24, Bansko, Bulgaria, 1999, 23-26.

[42] E. Kolev, On nonadaptive search problem, *Serdica Math. J.* 29, 2003, 361-376.

[43] E. Kolev, Nonadaptive Search Problem with Sets of Equal Sum, *Central European Journal of Mathematics*, 1(3), 2003, 272-283.

[44] E. Kolev, A search problem and cyclic codes of odd length, *Fourth International Workshop, Optimal Codes and related topics*, June 17-23, Pamporovo, Bulgaria, 2005, 201-204.

[45] E. Kolev, Nonadaptive Search Problem in Weighted Set, *Eight International Workshop, Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, September 3-9, Zvenigorod, Russia, 2006, 147-150.

[46] E. Kolev, Nonadaptive search problem in sets with four weights, *Fifth International Workshop Optimal Codes and related Topics*, June 16-22, White Lagoon, Bulgaria, 2007, 132-135.

[47] E. Kolev, Nonadaptive search for two elements with sets of equal sum, *Fifth International Workshop, Optimal Codes and related topics*, June 16-22, Varna, Bulgaria, 2009.

[48] E. Kolev, How to have a wrong bet in football pools, *CR Acad. Bulg. Sci.*, 66(3) 2013, 315-320.

[49] E. Kolev, I. Langev, On Some Mixed Covering Codes of Small Length, *Lecture Notes in Computer Science,* Springer-Verlag, 781, 1994, 38-50.

[50] E. Kolev, Proper integers for search with a lie, *Thirteenth International Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, June 15-21, Pomorie, Bulgaria, 2012, 188-191.

[51] E. Kolev, T. Baicheva, About the inverse football pool problem for 9 games, *Seventh International Workshop, Optimal Codes and related topics*, September 6-12, Albena, Bulgaria, 2013.

[52] E. Kolev, T. Baicheva, Minimal coverings of $\{0, 1, 2\}^n$ with spheres of radius n, accepted for publication in *Utilitas Mathematica.*

[53] I. Landgev, E. Kolev, On a Two Dimensional Search Problem, *Serdica Math. J.*, 21(3), 1995, 219-230.

[54] J. H. van Lint, Jr., G. J. M. van Wee, Generalized bounds on binary/ternary mixed packing and covering codes, *J. Combin. Theory Ser.A* 57, 1991, 130-134.

[55] S. Litsyn and A. Vardy, The uniquenes of Best code ,*IEEE Trans. Inform. Theory*, 40, 1994, 1693-1698.

[56] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes,* Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1977.

[57] B. D. McKay, nauty users's guide (version 1.5), *Comp. Sci. Dept. Australian Nat. Univ. Tech. Rep.* TR-CS-90-02, 1990.

[58] P. R. J. Östergård, New multiple covering codes by tabu search, *Australasian Journal of Combinatorics,* 12, 1995, 145-155.

[59] P. R. J. Östergård, A combinatorial proof for the football pool problem for six matches, *Journal of Combinatorial Theory, A* 76, 1996, 160-163.

[60] P. R. J. Östergård, Constructing covering codes by tabu search, *Journal of Combinatorial designs,* 5, 1997, 71-80.

[61] P. R. G. Östergård, T. Baicheva, E. Kolev, Optimal Binary One-Error-Correcting Codes of Length 10 Have 72 Codewords, *IEEE Trans on Inf. Theory,* 45(4), 1999, 1229-1231.

[62] P. R. J. Östergård, A coloring problem in Hamming spaces, *Europ. J. Combinatorics,* 18, 1997, 303-309.

[63] P. R. J. Östergård, On the structure of optimal error-correcting codes, *Discrete Mathematics,* 179, 1998, 285-287.

[64] P. R. J. Östergård and T. Riihonen, A covering problem for tori, *Ann. Comb.*, 7, 2003, 357-363.

[65] P. R. J. Östergård, Construction of mixed covering codes, *Research Report A18, Digital Systems Laboratory, Helsinki University of Technology*, 1991

[66] P. R. J. Östergård, New upper bounds for binary|ternary mixed covering codes, *Research Report A22, Digital Systems Laboratory, Helsinki University of Technology*, 1993

[67] P. R. J. Östergård, A new binary code of length 10 and covering radius 1, *IEEE Trans. Inform. Theory,* 37(6), 1991, 179-1805

[68] P. R. J. Östergård, Upper bounds for q-ary covering codes, *IEEE Trans. Inform. Theory,* 37(3), 1991, 660-664.

[69] P. R. J. Östergård, A new table of binary/ternary mixed covering codes, *Designs, codes and cryptography,* 11, 1997, 151-178.

[70] P. R. J. Östergård, Blass, U., On the size of optimal binary codes of length 9 and covering radius 1, *IEEE - Information Theory,* 47(6), 2001, 2556-2557,

[71] T. Riihonen, How to gamble 0 correct in football pools, *Helsinki university of thechnology,* 2002. Available at http://users.tkk.fi/priihone/tuotokset.html

[72] M. Ruszinko, On a 2 and 3-dimensional search problem,*Proc. of the Sixth Joint Swedish – Russian Workshop on Inf. Theory,* Mölle, Swede, Aug. 21-27, 1993, 437-440.

[73] N. J. A. Sloane, The on-line encyclopedia of integer sequences, htpp://www.research.att.com/njas/sequences/

[74] J. Spencer, Guess a Number-With Lying, *Math. Mag.* 57, 1984, 105-108.

[75] N. Wax, On upper bounds for error-detecting and error-correcting codes of finite length, *IRE Trans. Infrom. Theory,* 5, 1959, 168-174.

[76] G. J. M. van Wee, Improved sphere bounds on the covering radius of codes, *J. Combin. Theory Ser.A*, 1991, 117-129.

[77] G. J. M. van Wee, On the non-existence of certain perfect mixed codes, *Discrete Mathematics,* 87, 1991, 323-326.

[78] L. T. Wille, Improved binary code coverings by simulated annealing, *Congressus Numerantium*, 73, 1990, 53-58.

[79] L. T. Wille, New binary covering codes obtained by simulated annealing, *IEEE Trans.Inf.Theory*, 42, 1996, 300-302.

[80] L. T. Wille, The football pool problem for 6 matches: A new upper bound obtained by simulated annealing, *J. Combin. Theory Ser. A*, 45, 1987, 171-177.

[81] S. K. Zaremba, Covering problems concerning abelian groups, *J. London Math. Soc.*, 27, 1952, 242-246.

Публикации по дисертацията

[P1] E. Kolev, I. Langev, On Some Mixed Covering Codes of Small Length, *Lecture Notes in Computer Science,* Springer-Verlag, 781, 1994, 38-50.

[P2] I. Landgev, E. Kolev, On a Two Dimensional Search Problem, *Serdica Math. J.*, 21(3), 1995, 219-230.

[P3] E. Kolev, Mixed Covering Codes with Two Binary and Four Ternary Coordinates, *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 948, 1995, 312-322

[P4] T. Baicheva and E. Kolev, Binary Codes of Length Eight, Minimum Distance Three and Twenty Codewords, Proc. of the International Workshop on Optimal Codes, June 9-15, Sozopol, Bulgaria, 1998, 5-8.

[P5] E. Kolev, A $(9;56)1$ Binary Code does not Exist, *CR Acad. Bulg. Sci.*, 51(11-12), 1998, 25-28.

[P6] E. Kolev, An improved upper bound on $A_2(10,3)$, *Fifth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding theory*, Pskov, Russia, September 6-12, 1998, 155-157.

[P7] E. Kolev, R. Hill, An improved lower bound on the covering number $K_2(9,1)$, *Discrete Mathematics* 197/198, 1999, 483-489.

[P8] P. G. Östergård, T. Baicheva, E. Kolev, Optimal Binary One-Error-Correcting Codes of Length 10 Have 72 Codewords, *IEEE Trans. Inf. Theory,* 45(4), 1999, 1229-1231.

[P9] E. Kolev, Equivalent Codes and Backtrack Search, *Swedish-Bulgarian Government IT Security Conference Information Security in the 21th Century: Global Convergence*, September 18-24, Bansko, Bulgaria, 1999, 23-26.

[P10] E. Kolev, Nonadaptive search with sets of given sum, *Eight International Workshop Algebraic and Combinatorial Coding theory*, September 8-14, Tsarskoe Selo, Russia, 2002, 159-161.

[P11] E. Kolev, On nonadaptive search problem, *Serdica Math. J.* 29, 2003, 361-376.

[P12] E. Kolev, Nonadaptive Search Problem with Sets of Equal Sum, *Central European Journal of Mathematics*, 1(3), 2003, 272-283.

[P13] N. Dichev, E. Kolev, Search with a lie, *International congress MASSEE 2003* September 15-21, Bulgaria, 2003,

[P14] N. Dichev, E. Kolev, Nonadaptive search with a lie, *Ninth International Workshop, Algebraic and Combinatorial Coding theory*, June 19-25, Kranevo, Bulgaria, 2004, 120-124.

[P15] E. Kolev, A search problem and cyclic codes of odd length, *Fourth International Workshop, Optimal Codes and related topics*, June 17-23, Pamporovo, Bulgaria, 2005, 201-204.

[P16] E. Kolev, Nonadaptive Search Problem in Weighted Set, *Eight International Workshop, Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, September 3-9, Zvenigorod, Russia, 2006, 147-150.

[P17] E. Kolev, Nonadaptive search problem in sets with four weights, *Fifth International Workshop Optimal Codes and related Topics*, June 16-22, White Lagoon, Bulgaria, 2007, 132-135.

[P18] E. Kolev, Nonadaptive search for two elements with sets of equal sum, *Fifth International Workshop, Optimal Codes and related topics*, June 16-22, Varna, Bulgaria, 2009.

[P19] E. Kolev, Proper integers for search with a lie, *Thirteenth International Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, June 15-21, Pomorie, Bulgaria, 2012, 188-191.

[P20] E. Kolev, How to have a wrong bet in football pools, *CR Acad. Bulg. Sci.*, 66(3) 2013, 315-320.

[P21] E. Kolev, T. Baicheva, About the inverse football pool problem for 9 games, *Seventh International Workshop, Optimal Codes and related topics*, September 6-12, Albena, Bulgaria, 2013.

[P22] E. Kolev, T. Baicheva, Minimal coverings of $\{0, 1, 2\}^n$ with spheres of radius n, accepted for publication in *Utilitas Mathematica*.

Списък на цитирания

1. E. Kolev, I. Langev, On Some Mixed Covering Codes of Small Length, *Lecture Notes in Computer Science,* Springer-Verlag, 781, 1994, 38-50.

   1 P. R. J. Östergård, H. Hämäläinen, A new table of binary|ternary mixed covering codes, *Designs, codes and cryptography*, 11(2), 1997, 151-178.

   2 G. D. Cohen, S. N. Litsyn, A. C. Lobstein, N. F. Matson, Jr., Covering Radius 1984-1995, *Department Informatique, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 94 D025.*

   3 G. Cohen, I. Honkala, S. Litsyn, A. Lobstein, Covering codes, North Holland Mathematical library, North Holland, 1997.

   4 G. D. Cohen, S. N. Litsyn, A. C. Lobstein, N. F. Matson, Jr., Covering Radius 1984-1995, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing,* 8, 1977, 173-239.

   5 V. Pless, W. C. Huffman, Handbook on coding theory.

   6 R. A. Brualdi, S. Litsyn, V. Pless, Covering codes, Handbook on coding theory, North-Holland 1998, 755-826.

   7 G. Kéri, On the covering radius of small codes, *Journal Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 40(1-2), 2003, 242-256.

   8 G. Kéri, P. R. J. Östergård, Further results on the covering radius of small codes, *Discrete Mathematics*, Volume 307, Issue 1, 6 January 2007, pp. 69-77.

2. I. Landgev, E. Kolev, On a Two Dimensional Search Problem, *Serdica Math. J.*, 21(3), 1995, 219-230.

   1 Miklós Ruszinkó, Gabor Tárdos, On a search problem in multidimensional grids, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 59(1), 1997, 101-109.

3. E. Kolev, Mixed Covering Codes with Two Binary and Four Ternary Coordinates, *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 948, 1995, 312-322

   1 G. Cohen, I. Honkala, S. Litsyn, A. Lobstein, Covering codes, North Holland Mathematical library, North Holland, 1997.

4. T. Baicheva, E. Kolev, Binary Codes of Length Eight, Minimum Distance Three and Twenty Codewords, Proc. of the International Workshop on Optimal Codes, June 9-15, Sozopol, Bulgaria, 1998, 5-8.

   1 Petteri Kaski, P. G. Östergård, Classification algorithms for codes and designs, Springer, book, 2006

   2 Rix, James Gregory, Hypercube coloring and the structure of binary codes, *Master of Science Thesis*, University of British Colombia, 2008.

   3 D. Sverdlov, Coloring Hamming graphs, Diplomatbeit vorgelegt, Technishen Universität Berlin, 2009.

   4 D. S. Krotov, P.R.J. Östergärd, O. Pottonen, On Optimal Binary One-Error-Correcting Codes of Lengths $2^m - 4$ and $2^m - 3$, *IEEE Transactions on Inf. Theory*, 57(10), 2011, 6771 - 6779.

5. E. Kolev, A $(9;56)1$ Binary Code does not Exist, *CR Acad. Bulg. Sci.*, 51(11-12), 1998, 25-28.

   1 P.R.J. Östergård, P.R.J. Blass, U. , On the size of optimal binary codes of length 9 and covering radius 1 *IEEE - Information Theory* 47(6), 2001, 2556-2557.

6. E. Kolev, An improved upper bound on $A_2(10, 3)$, *Fifth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding theory*, Pskov, Russia, September 6-12, 1998, 155-157.

7. E. Kolev, R. Hill, An improved lower bound on the covering number $K_2(9,1)$, *Discrete Mathematics* 197/198, 1999, 483-489.

8. P. G. Östergård, T. Baicheva, E. Kolev, Optimal Binary One-Error-Correcting Codes of Length 10 Have 72 Codewords, *IEEE Trans. Inf. Theory,* 45(4), 1999, 1229-1231.

1 J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups,* Springer Verlag, 1998.

2 P. Simons, Extending the Stable Model Semantics with More Expressive Rules, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1730, pp. 305-316, 1999.

3 Г. Богданова, *Граници за оптимални кодове,* Докторска дисертация, 2000 г.

4 P. Simons, *Extending and implementing the stable model semantics*, Research report 58, Helsinki University of Technology, Helsinki, Finland, 2000.

5 K. Kapralov, Optimal quaternary two-error-correcting codes of length 7 have 32 codewords, *Mathematics and Education in Mathemaitics*, pp. 179-183, 2000.

6 G. Bogdanova, S. Kapralov, Bounds for codes over small alphabets, *Mathematics and education in Mathematics,* pp. 149-154, 2000.

7 K. Kapralov, The nonexistence of ternary $(10, 15, 7)$ codes, *Proc. of Intern. Workshop ACCT,* Bansko, Bulgaria, pp. 189-192, 2000.

8 P. Simons, *Extending and implementing the stable model semantics*, Dissertation of the degree Doctor of Technology, Helsinki University of Technology, 2000.

9 E. Agrell, A. Vardy and K. Zeger, A table of upper bounds for binary codes, *IEEE Trans. on Inf. Theory,* vol. 47, pp. 3004-3006, 2001.

10 Petteri Kaski, Isomorph-free exhaustive generation of combinatorial designs, *Research report A70*, Helsinki University of Technology, Laboratory for Theoretical Computer Science, Espoo, Finland, December, 2001.

11 I. Bouyukliev, Maximal cliques in graphs and some new upper bounds for constant-weight codes, *Proc. of International Workshops on Groups and Graphs,* Varna, Bulgaria, pp. 19-22, 2002.

12 M. Letourneau and S. Houghten, *Optimal Ternary (10,7) Codes,* Technical Report # CS-02-10, Department of Computer Science, Brock University, St. Catharines, Ontario, Canada, September, 2002.

13 M. Letourneau and S. Houghten, *Optimal Ternary (11,7) and (14,10) Codes,* Technical Report # CS-02-20, Department of Computer Science, Brock University, St. Catharines, Ontario, Canada, September, 2002.

14 A. Trachtenberg and A. Vardy, Full-rank tilings of F_2^8 do not exist, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 16(3), pp. 390-392, 2003.

15 Ст. Капралов, *Граници, конструкции и кlaсификация на оптимални кодове,* Дисертация за присъждане на научната степен „Доктор на математическите науки“, 2004.

16 Juergen Bierbrauer, *Introduction to Coding Theory*, Publisher: Chapman& Hall/CRC, 2004.

17 S.K. Houghten, D. Ashlock and J. Lennarz Bounds on Optimal Edit Metric Codes, *Technical Report # CS-05-07*, Brock University, July, 2005.

18 Petteri Kaski, *Algorithms for Classification of Combinatorial Objects*, Ph. D. Helsinki University Schools of Technology, June, 2005.

19 Bojja Neelima and Rahman Syed Mustafizur, *Upper bounds for block codes*, Master's Thesis, Department of Sygnals and Systems, Chalmers

University of Technology, Göteborg, Sweden, 2005 (Report Number EX037/2005).

20 S.K. Houghten, D. Ashlock and J. Lennarz Construction of Optimal Edit Metric Codes, *IEEE Information Theory Workshop*, Chengdu, 22-26 Oct. 2006, pp. 259-263. ISBN: 1-4244-0067-8.

21 Jay Baga, Adrian Heinz and Mahbubul Majumder, An Algorithm for Graceful Labelings of Cycles, *Congressus Numerantium*, 186 (2007), pp. 57-63.

22 M. Ghebleh, L. A. Goddyn, E. S. Mahmoodian and M. Verdian-Rizi, Silver Cubes, *Graphs and Combinatorics*, vol. 24, No 5, 2008, pp. 429-442,

23 J. Rix, *Hypercube coloring and the structure of binary codes*, Master's Thesis, The University of British Colombia, July, 2008.

24 Jacqueline Smith and D. Chris Rayner, Search Enhancements for $A(n, d)$, *CMPUT 674 Project Report*, December 10, 2008.

25 I. Chuang, A. Cross, G. Smith, J. Smolin and Bei Zeng, Codeword stabilized quantum codes: Algorithm and structure, *Journal of Math. Phys.* vol. 50, Issue 4, 2009.

26 Bei Zeng, *Quantum operations and codes beyond the Stabilizer-Clifford framework*, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2009.

27 Olli Pottonen, *Perfect binary codes: classification and properties*, Ph. D. Helsinki University of Technology, 2009.

28 Nicolas Bitouzé, Alexandre Graell I Amat, Eirik Rosnes, Error Correcting Coding for a Non-symmetric Ternary Channel, *IEEE Trans. Inform. Theory,* vol. 56, issue 11, November 2010, pp. 5715-5729.

29 D. Brink, The inverse football pool problem, *Journal of integer sequences,* Vol. 14, Article 11.8.8, 2011.

30 Marcus Greferath, Jens Zumbragel, On the algebraic representation of certain optimal non-linear binary codes, *arXiv:1109.4770v2*, 2012.

31 Xiang, Jingen, *Scalable Scientific Computing Algorithms Using MapReduce*, Thesis, University of Waterloo, 2013.

32 I. Bouyukliev, V. Monev, M. Dzhumalieva-Stoeva, About parallelization of an algorithm for the maximum clique problem, *Seventh International Workshop, Optimal Codes and related topics*, September 6-12, Albena, Bulgaria, 2013, 53-58.

9. E. Kolev, Equivalent Codes and Backtrack Search, *Swedish-Bulgarian Government IT Security Conference Information Security in the 21th Century: Global Convergence*, September 18-24, Bansko, Bulgaria, 1999, 23-26.

10. E. Kolev, Nonadaptive search with sets of given sum, *Eight International Workshop Algebraic and Combinatorial Coding theory*, September 8-14, Tsarskoe Selo, Russia, 2002, 159-161.

11. E. Kolev, On nonadaptive search problem, *Serdica Math. J.* 29, 2003, 361-376.

12. E. Kolev, Nonadaptive Search Problem with Sets of Equal Sum, *Central European Journal of Mathematics*, 1(3), 2003, 272-283.

13. N. Dichev, E. Kolev, Search with a lie, *International congress MASSEE 2003* September 15-21, Bulgaria, 2003.

14. N. Dichev, E. Kolev, Nonadaptive search with a lie, *Ninth International Workshop, Algebraic and Combinatorial Coding theory*, June 19-25, Kranevo, Bulgaria, 2004, 120-124.

15. E. Kolev, A search problem and cyclic codes of odd length, *Fourth International Workshop, Optimal Codes and related topics*, June 17-23, Pamporovo,

Bulgaria, 2005, 201-204.

16. E. Kolev, Nonadaptive Search Problem in Weighted Set, *Eight International Workshop, Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, September 3-9, Zvenigorod, Russia, 2006, 147-150.

17. E. Kolev, Nonadaptive search problem in sets with four weights, *Fifth International Workshop Optimal Codes and related Topics*, June 16-22, White Lagoon, Bulgaria, 2007, 132-135.

18. E. Kolev, Nonadaptive search for two elements with sets of equal sum, *Fifth International Workshop, Optimal Codes and related topics*, June 16-22, Varna, Bulgaria, 2009.

19. E. Kolev, Proper integers for search with a lie, *Thirteenth International Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, June 15-21, Pomorie, Bulgaria, 2012, 188-191.

20. E. Kolev, How to have a wrong bet in football pools, *CR Acad. Bulg. Sci.*, 66(3) 2013, 315-320.

21. E. Kolev, T. Baicheva, About the inverse football pool problem for 9 games, *Seventh International Workshop, Optimal Codes and related topics*, September 6-12, Albena, Bulgaria, 2013.

22. E. Kolev, T. Baicheva, Minimal coverings of $\{0,1,2\}^n$ with spheres of radius n, accepted for publication in *Utilitas Mathematica.*