

Резюмета на научните публикации

на доц. дн Емилия Григорова Бажлекова

представени за участие в конкурс за професор в област на висше образование

4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление

4.5. Математика, научна специалност: „Математически анализ“

(Приложения на дробното смятане), обявен от ИМИ-БАН в ДВ бр. 43 от 17.05.2024г.

[1] Bazhlekova, E., Bazhlekova, I., Viscoelastic flows with fractional derivative models: computational approach via convolutional calculus of Dimovski. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 17, 4, 2014, ISSN:1311-0454, DOI:10.2478/s13540-014-0209-x, 954-976.

Abstract: An initial-boundary value problem for the velocity distribution of a viscoelastic flow with generalized fractional Oldroyd-B constitutive model is studied. The model contains two Riemann-Liouville fractional derivatives in time. The eigenfunction expansion of the solution is constructed. The behavior of the time-dependent components of the solution is studied and the results are used to establish convergence of the series under some conditions. Further, applying the convolutional calculus approach proposed by Dimovski (I.H. Dimovski, Convolutional Calculus, Kluwer, Dordrecht (1990)), a Duhamel-type representation of the solution is found, containing two convolution products of particular solutions and the given initial and source functions. A non-classical convolution with respect to spatial variable is used. The obtained representation is applied for numerical computation of the solution in the case of a generalized second grade fluid. Numerical results for several one-dimensional examples are given and the present technique is compared to a finite difference method in terms of efficiency, accuracy, and CPU time.

Резюме: Изследва се начална-гранична задача за разпределението на скоростта на вискозо-еластично течение с обобщения дробен конститутивен модел на Олдройд-В. Моделът съдържа две дробни производни на Риман-Лиувил по времето. Построено е развитието на решението в ред по собствени функции. Изследва се поведението на зависимите от времето компоненти на развитието и резултатите се използват за установяване на сходимост на реда при определени условия. Освен това, прилагайки подхода на конволюционното смятане, предложен от Димовски (I.H. Dimovski, Convolutional Calculus, Kluwer, Dordrecht (1990)), е намерено представяне на решението от типа на Дюамел, съдържащо две конволюционни произведения на конкретни решения с дадените начална функция и дясна страна на уравнението. Използва се неклассическа конволюция по отношение на пространствената променлива. Полученото представяне се прилага за числено пресмятане на решението в случая на обобщен флуид от втори клас. Дадени са числени резултати за няколко едномерни примера и представеният метод е сравнен с метода на крайни разлики по отношение на ефективност, точност и процесорно време.

[2] Bazhlekova, E., Convolutional calculus of Dimovski and QR-regularization of the backward heat problem. *Serdica Math. J.*, 41, IMI-BAS, 2015, ISSN:1310-6600, 415-430.

Abstract: The final value problem for the heat equation is known to be ill-posed. To deal with this, in the method of quasi-reversibility (QR), the equation or the final value condition is perturbed to form an approximate well-posed problem, depending on a small parameter ϵ . In this work, four known quasi-reversibility techniques for the backward heat problem are considered and the corresponding regularizing problems are treated using the convolutional calculus approach developed by Dimovski

(I.H. Dimovski, Convolutional Calculus, Kluwer, Dordrecht, 1990). For every regularizing problem, applying an appropriate bivariate convolutional calculus, a Duhamel-type representation of the solution is obtained. It is in the form of a convolution product of a special solution of the problem and the given final value function. A non-classical convolution with respect to the space variable is used. Based on the obtained representations, numerical experiments are performed for some test problems.

Резюме: Известно е, че инверсната задача за уравнението на топлопроводността е некоректно поставена. За да се преодолее този проблем, при метода на квази-обратимост (QR метод) уравнението или крайната функция се пертурбират (зависейки от малък параметър ϵ), така че да се получи коректно поставена задача. В настоящата работа се разглеждат четири известни техники за квази-обратимост на инверсната задача за уравнението на топлопроводността и съответните регуляризиращи задачи се решават с помощта на подхода на конволюционното смятане, разработен от Димовски (I.H. Dimovski, Convolutional Calculus, Kluwer, Dordrecht, 1990). За всяка задача, прилагайки подходящо двумерно конволюционно смятане, се получава представяне на решението от типа на Дюамел. То е във вид на конволюционно произведение на специално решение на задачата и дадената крайна функция. Използва се неklasическа конволюция по отношение на пространствената променлива. Получените представяния се прилагат за извършване на числени експерименти за някои тестови задачи.

[3] Bazhlekova, E., Bazhlevkov, I., On the Rayleigh-Stokes problem for generalized fractional Oldroyd-B fluids. *AIP Conference Proceedings*, 1684, 2015, ISSN:0094-243X (print) 1551-7616 (web), DOI:10.1063/1.4934312, 080001.

Abstract: We consider the initial-boundary value problem for the velocity distribution of a unidirectional flow of a generalized Oldroyd-B fluid with fractional derivative model. It involves two different Riemann-Liouville fractional derivatives in time. The problem is studied in a general abstract setting, based on a reformulation as a Volterra integral equation with kernel represented in terms of Mittag-Leffler functions. Special attention is paid to the solution behavior in the scalar case, using some facts of the theory of the Bernstein functions. Numerical experiments are performed for different values of the parameters and plots are presented and discussed. The results are compared to those obtained in the limiting cases of generalized fractional Maxwell and second grade fluids.

Резюме: Разглеждаме начална-гранична задача за разпределението на скоростта на едноточечно течение от обобщен Олдройд-В флуид с модел съдържащ дробни производни. Моделът използва две различни дробни производни на Риман-Лиувил по времето. Задачата се изучава в обща абстрактна формулировка, като се използва преформулиране като интегрално уравнение на Волтера с ядро, представено чрез функции на Митгаг-Лефлер. Специално внимание се обръща на поведението на решението в скаларния случай, като се използват някои факти от теорията на функциите на Бернщайн. Проведени са числени експерименти за различни стойности на параметрите и са представени и обсъдени получените графики. Резултатите са сравнени с тези, които се получават в граничните случаи на обобщен дробен флуид на Максвел и обобщен дробен флуид от втори клас.

[4] Bazhlekova, E., Jin, B., Lazarov, R., Zhou, Z., An analysis of the Rayleigh-Stokes problem for a generalized second-grade fluid. *Numerische Mathematik*, 131, 1, 2015, ISSN:0029599X, 09453245, DOI:10.1007/s00211-014-0685-2, 1-31.

Abstract: We study the Rayleigh–Stokes problem for a generalized second-grade fluid which involves a Riemann–Liouville fractional derivative in time, and present an analysis of the problem in the

continuous, space semidiscrete and fully discrete formulations. We establish the Sobolev regularity of the homogeneous problem for both smooth and nonsmooth initial data v , including $v \in L^2(\Omega)$. A space semidiscrete Galerkin scheme using continuous piecewise linear finite elements is developed, and optimal with respect to initial data regularity error estimates for the finite element approximations are derived. Further, two fully discrete schemes based on the backward Euler method and second-order backward difference method and the related convolution quadrature are developed, and optimal error estimates are derived for the fully discrete approximations for both smooth and nonsmooth initial data. Numerical results for one- and two-dimensional examples with smooth and nonsmooth initial data are presented to illustrate the efficiency of the method, and to verify the convergence theory.

Резюме: Изучаваме задачата на Релей–Стокс за обобщен флуид от втори клас, чийто модел включва дробна производна на Риман–Лиувил по времето, и представяме анализ на проблема в непрекъсната, пространствено полудискретна и напълно дискретна формулировка. Установяваме регулярност в пространства на Соболев на хомогенната задача както за гладки, така и за негладки начални данни v , включително $v \in L^2(\Omega)$. Разработена е пространствена полудискретна схема на Галеркин, използваща непрекъснати по части линейни крайни елементи, и са изведени оптимални по отношение на началните данни оценки на грешката за апроксимациите с крайни елементи. Освен това са разработени две напълно дискретни схеми, основаващи се на неявния метод на Ойлер и неявна диференчна схема от втори ред и съответната конволюционна квадратура, и са получени оптимални оценки на грешката за напълно дискретните приближения както за гладки, така и за негладки начални данни. Представени са числени резултати за едномерни и двумерни примери с гладки и негладки начални данни, за да се илюстрира ефективността на метода и да се провери теорията за сходимост.

[5] Vasileva, D., Bazhlevkov, I., Bazhlevkova, E., *Alternating direction implicit schemes for two-dimensional generalized fractional Oldroyd-B fluids. AIP Conference Proceedings*, 1684, AIP Publishing, 2015, ISSN:0094-243X, DOI:10.1063/1.4934325, 080014.

Abstract: The two-dimensional Rayleigh-Stokes problem for a generalized fractional Oldroyd-B fluid is considered in the present work. First and second order approximations of the fractional time derivatives are implemented in the developed alternating direction implicit finite difference schemes. Second and compact fourth order approximations are used for the space derivatives. Extensive numerical experiments are performed in order to investigate the stability and accuracy of the proposed algorithms.

Резюме: В настоящата работа се разглежда двумерната задача на Релей–Стокс за флуид с обобщения дробен Олдройд–В модел. Апроксимации от първи и втори ред на дробните производни по времето са реализирани в разработените неявни диференчни схеми с алтернативно редуващи се направления. За пространствените производни се използват апроксимации от втори ред и компактни апроксимации от четвърти ред. За да се изследват устойчивостта и точността на предложените алгоритми са проведени обширни числени експерименти.

[6] Bazhlevkova, E., Bazhlevkov, I., *Peristaltic transport of viscoelastic bio-fluids with fractional derivative models. Biomath*, 5, 1, 2016, ISSN:1314-7218, DOI:10.11145/j.biomath.2016.05.161

Abstract: Peristaltic flow of viscoelastic fluid through a uniform channel is considered under the assumptions of long wavelength and low Reynolds number. The fractional Oldroyd-B constitutive viscoelastic law is employed. Based on models for peristaltic viscoelastic flows given in a series of papers by Tripathi et al. (e.g. Appl Math Comput. 215 (2010) 3645–3654; Math Biosci. 233 (2011) 90–

97) we present a detailed analytical and numerical study of the evolution in time of the pressure gradient across one wavelength. An analytical expression for the pressure gradient is obtained in terms of Mittag-Leffler functions and its behavior is analyzed. For numerical computation the fractional Adams method is used. The influence of the different material parameters is discussed, as well as constraints on the parameters under which the model is physically meaningful.

Резюме: Разглежда се перисталтичен поток на вискозо-еластичен флуид през равномерен канал при предположения за голяма дължина на вълната и ниско число на Рейнолдс. Използва се дробният Олдройд-В конститутивен вискозо-еластичен закон. Въз основа на модели за перисталтични вискозо-еластични течения, дадени в серия от статии на Tripathi et al. (напр. Appl Math Comput. 215 (2010) 3645–3654; Math Biosci. 233 (2011) 90–97) ние представяме подробно аналитично и числено изследване на еволюцията във времето на градиента на налягане за една дължина на вълната. Получено е аналитично представяне за градиента на налягането чрез функции на Митга-Лефлер и е анализирано поведението му. За числено пресмятане се използва дробният метод на Адамс. Обсъжда се влиянието на различните параметри на материала, както и ограничения върху параметрите, при които моделът има физически смисъл.

[7] Bazhlekova, E., K. Tsocheva, Fractional Burgers' model: thermodynamic constraints and completely monotonic relaxation function. C. R. Acad. Bulg. Sci., 69, 7, 2016, ISSN:1310-1331, 825-834.

Abstract: Fractional Burgers' constitutive equation for viscoelastic fluids is studied. Thermodynamic constraints on the parameters are discussed as well as conditions for complete monotonicity of the corresponding relaxation function. The relationship between thermodynamic compatibility of the model and complete monotonicity of the relaxation function is analyzed.

Резюме: Изследва се дробното конститутивно уравнение на Бюргерс за вискозо-еластични флуиди. Обсъждат се термодинамични ограничения върху параметрите, както и условия за напълна монотонност на съответната функция на релаксация. Анализира се зависимостта между термодинамичната съвместимост на модела и напълната монотонност на функцията на релаксация.

[8] Bazhlekova, E., Bazhlevkov, I., Stokes' first problem for viscoelastic fluids with a fractional Maxwell model. Fractal and Fractional, 1, 1, MDPI AG, 2017, ISSN:2504-3110, DOI:10.3390/fractalfract1010007, 7

Abstract: Stokes' first problem for a class of viscoelastic fluids with the generalized fractional Maxwell constitutive model is considered. The constitutive equation is obtained from the classical Maxwell stress-strain relation by substituting the first-order derivatives of stress and strain by derivatives of non-integer orders in the interval $(0, 1]$. Explicit integral representation of the solution is derived and some of its characteristics are discussed: non-negativity and monotonicity, asymptotic behavior, analyticity, finite/infinite propagation speed, and absence of wave front. To illustrate analytical findings, numerical results for different values of the parameters are presented.

Резюме: Разглежда се първата задача на Стокс за клас вискозо-еластични флуиди, удовлетворяващи обобщения дробен модел на Максвел. Конститутивното уравнение се получава от класическия модел на Максвел за зависимостта между напрежение и деформация чрез заместване на производните от първи ред на напрежението и деформацията с производни от дробен ред в интервала $(0, 1]$. Получено е явно интегрално представяне на решението и се дискутират някои негови характеристики: неотрицателност и монотонност, асимптотично поведение, аналитичност, крайна/безкрайна скорост на разпространение на вълната и липса на вълнов фронт. Изводите от аналитичното изучаване на решението са илюстрирани като са представени числени резултати за различни стойности на параметрите.

[9] Bazhlekova, E., Bazhlevkov, I., Application of Dimovski's convolutional calculus to distributed-order time-fractional diffusion equation on a bounded domain. *Journal of Inequalities and Special Functions*, 8, 1, 2017, ISSN:2217-4303, 68-83.

Abstract: An initial-boundary value problem for the one-dimensional time-fractional diffusion equation of distributed order is considered. Applying the convolutional calculus approach proposed by Dimovski (I.H. Dimovski, Convolutional Calculus, Kluwer, Dordrecht (1990)), a Duhamel-type representation of the solution is found in the form of a convolution product of a particular solution and the given initial function. A non-classical convolution with respect to the spatial variable is used. The particular solution is found by eigenfunction expansion. Special attention is paid to the study of the time-dependent components in this expansion. It is proven that the obtained solution is a solution in the classical sense. The Duhamel-type representation is used for numerical computation of the solution in some numerical examples.

Резюме: Разгледана е начална-гранична задача за едномерното уравнение на дифузия с дробна производна по времето от разпределен ред. Прилагайки подхода на конволюционното смятане, предложен от Димовски (I.H. Dimovski, Convolutional Calculus, Kluwer, Dordrecht (1990)), се намира представяне на решението от типа на Дюамел под формата на конволюционно произведение на едно частно решение и дадената начална функция. Използва се неklasическа конволюция по отношение на пространствената променлива. Частното решение се намира чрез развитие в ред по собствени функции. Специално внимание е отделено на изследването на зависимите от времето компоненти в това развитие. Доказано е, че полученото развитие в ред е решение в класическия смисъл. Полученото представяне от типа на Дюамел се използва за числено пресмятане на решението в някои числени примери.

[10] Bazhlekova, E., Bazhlevkov, I., Unidirectional flows of fractional Jeffreys' fluids: thermodynamic constraints and subordination. *Computers and Mathematics with Applications*, 73, 6, Elsevier, 2017, ISSN:0898-1221, DOI:10.1016/j.camwa.2016.12.009, 1363-1376.

Abstract: A class of initial-boundary value problems governing the velocity distribution of unidirectional flows of viscoelastic fluids is studied. The generalized fractional Jeffreys' constitutive model is used to describe the viscoelastic properties. Thermodynamic constraints on the parameters of the model are derived from the monotonicity of the corresponding relaxation function. Based on these constraints, a subordination principle for the considered class of problems is established. It gives an integral representation of the solution in terms of a probability density function and the solution of a related wave equation. Explicit representation of the probability density function is derived from the solution of the Stokes' first problem. Numerical verification of the obtained analytical results is provided.

Резюме: Изследван е клас начално-гранични задачи за разпределението на скоростта на едноросочни течения от вискозо-еластични флуиди. За описване на вискозо-еластични свойства се използва обобщеният дробен конститутивен модел на Джефри. Термодинамичните ограничения върху параметрите на модела се извеждат от монотонността на съответната функция на релаксация. Въз основа на тези ограничения се установява принцип на субординация за разглеждания клас проблеми. Той дава интегрално представяне на решението чрез специфична функция на плътност на вероятността и решението на съответно вълново уравнение. Явното представяне на функцията за вероятностна плътност се извежда от решението на първата задача на Стокс. Представените резултати от числени пресмятания съответстват на получените аналитични резултати.

[11] Bazhlekova, E., Bazhlekova, E., Fractional derivative model for diffusion-controlled adsorption at liquid/liquid interface. *AIP Conference Proceedings*, 2048, 2018, ISSN:0094-243X, DOI:10.1063/1.5082111, 050012-1-050012-8.

Abstract: The Ward-Tordai integral equation governs the diffusion-controlled surfactant adsorption at air/liquid interfaces. In this paper the Ward-Tordai equation is generalized in two directions. First, the adsorption is assumed to take place at a liquid/liquid interface, where the surfactant is soluble in both liquid phases. Second, the diffusion in the bulk phases is anomalous and is governed by time-fractional diffusion equations. For the computation of the change of adsorption with time two numerical techniques are proposed and compared. Numerical results are presented.

Резюме: Интегралното уравнение на Ward-Tordai описва дифузионно-контролирана адсорбция на повърхностно-активно вещество на границата въздух/течност. В тази статия уравнението на Ward-Tordai е обобщено в две направления. Първо, приема се, че адсорбцията се извършва на границата течност/течност, при което повърхностно-активното вещество е разтворимо и в двете течни фази. Второ, дифузията в обемните фази е аномална и се описва чрез дробни по времето уравнения. За изчисляване на промяната на адсорбцията с времето са предложени и сравнени две числени техники. Представени са числени резултати.

[12] Bazhlekova, E., Bazhlekova, E., Analyticity of solution operators to space-time fractional evolution equations. *AIP Conference Proceedings*, 2172, 2019, ISSN:0094-243X E-ISSN:1551-7616, DOI:10.1063/1.5133523, 050004-1-050004-7.

Abstract: The abstract Cauchy problem for the space-time fractional evolution equation is considered, which contains the Caputo time-derivative of order $\beta \in (0, 1)$ and the operator $-A^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, where $-A$ generates a strongly continuous one-parameter semigroup on a Banach space. The analyticity of the solution operator is studied by applying subordination principles for space and time-fractional evolution equations and taking into account the asymptotic behavior of the subordination kernels, expressed in terms of Levy extremal stable densities and Mainardi function.

Резюме: Разгледана е абстрактната задача на Коши за дробното по пространството и времето еволюционно уравнение, което съдържа производната на Капуто от ред $\beta \in (0, 1)$ по времето и оператора $-A^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, където $-A$ поражда силно непрекъсната еднотелна параметрична полугрупа в Банахово пространство. Изучава се аналитичността на оператора на решението чрез прилагане на принципите на субординация за еволюционни уравнения по пространството и по времето и като се вземе предвид асимптотичното поведение на ядрата на субординация, изразени съответно чрез екстремални стабилни плътности на Леви и функцията на Майнард.

[13] Bazhlekova, E., Bazhlekova, E., Fundamental solution of a three-dimensional fractional Jeffreys-type heat equation. *AIP Conference Proceedings*, 2333, 1, 2021, ISSN:0094-243X, 1551-7616, DOI:10.1063/5.0041618, 060002-1-060002-8.

Abstract: The three-dimensional Cauchy problem for the heat conduction equation with a fractional Jeffreys-type constitutive law is studied. Two different cases are distinguished: diffusion and propagation regimes. In the diffusion regime the three-dimensional fundamental solution is shown to be a spatial probability density function evolving in time. In the propagation regime the solution can have negative values, and therefore, does not allow a probabilistic interpretation. Explicit integral representation for the three-dimensional fundamental solution is derived and used for numerical experiments.

Резюме: Изследва се тримерната задача на Коши за уравнението на топлопроводимостта с дробен конститутивен закон от типа на Джефри. Разграничават се два случая: режим на дифузия

и режим на разпространение на вълни. В дифузионния режим е показано, че тримерното фундаментално решение е функция на плътност на вероятността по пространствените променливи, еволюираща във времето. В режим на разпространение на вълни решението може да има отрицателни стойности и следователно не позволява вероятностна интерпретация. Извежда се явно интегрално представяне за тримерното фундаментално решение и се използва за числени експерименти.

[14] Bazhlekova, E., Bazhlekova, E., Fractional derivative modeling of bioreaction-diffusion processes. *AIP Conference Proceedings*, 2333, 1, 2021, ISSN:0094-243X, 1551-7616, DOI:10.1063/5.0041611, 060006-1-060006-13.

Abstract: The aim of this work is to analyze the application of fractional derivatives in time for the mathematical modeling of complex processes. As an example, a bioprocess is considered and the related distribution of nutrients, bacteria and bioproduct in multiphase fluid systems. The mathematical model under investigation includes convection, diffusion, bioreaction and boundary conditions at the interfaces: interface mass-transfer and adsorption. Different approaches of time-fractional modeling of a bioprocess are discussed. To evaluate the ability of a fractional order model to correctly reproduce the behavior that the underlying process must exhibit, numerical procedures are developed and computer simulations are performed.

Резюме: Целта на тази работа е да се анализира приложението на дробни производни по времето за математическо моделиране на комплексни процеси. Като пример се разглежда биопроцес и свързаното с него разпределение на хранителни вещества, бактерии и биопродукти в многофазни флуидни системи. Изследваният математически модел включва конвекция, дифузия, биореакция и гранични условия: масопренос и адсорбция. Обсъждат се различни подходи за моделиране на биопроцес, използвайки производни от дробен ред по времето. За да се оцени способността на модела от дробен ред да възпроизвежда правилно поведението, което моделираният процес трябва да проявява, се разработват числени процедури и се извършват компютърни симулации.

[15] Bazhlekova, E., Bazhlekova, E., Identification of a space-dependent source term in a nonlocal problem for the general time-fractional diffusion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 386, Elsevier, 2021, ISSN:0377-0427, DOI:10.1016/j.cam.2020.113213, 113213.

Abstract: The diffusion equation with a general convolutional derivative in time is considered on a bounded domain, as one of the boundary conditions is nonlocal. We are concerned with the inverse source problem of recovery of a space-dependent source term from given final time data. To find the source term and the solution, we resort to generalized eigenfunction expansion, using a bi-orthogonal pair of bases. Estimates for the time-dependent components in the spectral expansions are established and applied to prove uniqueness and existence in the classical sense. Analytical and numerical examples are provided.

Резюме: Разглежда се дифузионното уравнение с обща конволюционна производна по времето в ограничена област, при което едно от граничните условия е нелокално. Изследваме инверсната задача за възстановяване на зависима от пространствената променлива дясна страна по дадено решение в крайно време. За да намерим източника и решението, прибягваме до развитие по обобщени собствени функции, използвайки биортогонална двойка базиси. Намерени са оценки за зависимите от времето компоненти в спектралното развитие на решението и са приложени за доказване на единственост и съществуване в класическия смисъл. Представени са аналитични и числени примери.

[16] Bazhlekova, E., An inverse source problem for the generalized subdiffusion equation with nonclassical boundary conditions. *Fractal and Fractional*, 5, 3, MDPI, 2021, ISSN:2504-3110, DOI:10.3390/fractalfract5030063, 63.

Abstract: An initial-boundary-value problem is considered for the one-dimensional diffusion equation with a general convolutional derivative in time and nonclassical boundary conditions. We are concerned with the inverse source problem of recovery of a space-dependent source term from given final time data. Generalized eigenfunction expansions are used with respect to a biorthogonal pair of bases. Existence, uniqueness and stability estimates in Sobolev spaces are established.

Резюме: Разгледана е начална-гранична задача за едномерното уравнение на дифузия с обща конволюционна производна по времето и некласически гранични условия. Занимаваме се с инверсната задача за възстановяване на зависим от пространствената променлива източник по дадено решение в крайно време. Използва се развитие по обобщени собствени функции по отношение на биортогонална двойка базиси. Установени са съществуване, единственост и оценки за устойчивост в пространства на Соболев.

[17] Bazhlekova, E., A predictor-corrector numerical approach to equations with general fractional derivative. *International Journal of Applied Mathematics*, 35, 5, Academic Publications, 2022, ISSN:1311-1728, DOI:10.12732/ijam.v35i5.5, 693-709.

Abstract: The Adams-type predictor-corrector method for the numerical solution of fractional differential equations proposed by K. Diethelm et al. (Nonlinear Dynam. 29 (2002), 3-22) is extended in this work to equations with general fractional derivative. The method may be used both for linear and nonlinear problems. Numerical examples are given for the particular cases of multi-term and distributed-order fractional differential operators, which demonstrate the viability of the developed numerical algorithm.

Резюме: В тази работа предиктор-коректор методът от типа на Адамс за числено решаване на дробни диференциални уравнения, предложен от K. Diethelm et al. (Nonlinear Dynam. 29 (2002), 3-22), се обобщава за уравнения с обща дробна производна. Методът може да се използва както за линейни, така и за нелинейни задачи. Дадени са числени примери в частните случаи на многочленни дробни диференциални оператори и такива от разпределен ред, които демонстрират ползата от разработения числен алгоритъм.

[18] Bazhlekova, E., Mathematical modeling of the effect of viscoelasticity on the film drainage between interacting drops. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 53, 4, Walter de Gruyter, 2023, ISSN:0861-6663 (online ISSN: 1314-8710), DOI:10.55787/jtams.23.53.4.348, 348-365.

Abstract: Mathematical model of the deformation and drainage of film between interacting drops is presented in the case when dispersed or continuous phases are viscoelastic fluids. The model is based on the assumptions of a gentle collision at small Reynolds numbers and small deformation at small capillary numbers. It consists of lubrication approximation in the film and creeping flow equation in the dispersed phase. The equations in the continuous and dispersed phases are coupled by continuity of the velocity and stress boundary conditions at the interface. Generalizations of the Maxwell-type rheological constitutive relation are used to model the viscoelastic effects: upperconvected Maxwell model in the drop and fractional Maxwell model in the film phase. Predictions of the effect of the extra elastic stresses on the film drainage are given.

Резюме: Представен е математически модел на деформацията и изтичането на филм между две взаимодействащи капки в случая когато непрекъснатата фаза или тази на капките са вискозоеластични флуиди. Моделът се основава на предположенията за слаби взаимодействия при

малки числа на Рейнолдс и малка деформация при малки капилярни числа, като се състои от уравнение на смазката във филма и уравненията на Стокс в капките. Уравненията в двете фази са свързани чрез условия за непрекъснатост на скоростта и напрежението на границата. За моделиране на вискозо-еластичните ефекти се използват обобщения на модела на Максвел: *upperconvected* модел на Максвел в капка и дробен модел на Максвел във фазата на филма. Дадени са прогнози за ефекта на допълнителните еластични напрежения върху изтичането на филма.

[19] Bazhlekova, E., Bazhlev, I., Subordination principle for generalized fractional Zener models. *Fractal and Fractional*, 7, 4, MDPI, 2023, ISSN:2504-3110, DOI:10.3390/fractalfract7040298, 298.

Abstract: The fractional Zener constitutive law is frequently used as a model of solid-like viscoelastic behavior. In this work, a class of linear viscoelastic models of Zener type, which generalize the fractional Zener model, is studied by the use of Bernstein functions technique. We prove that the corresponding relaxation moduli are completely monotone functions under appropriate thermodynamic restrictions on the parameters. Based on this property, we study the propagation function and establish the subordination principle for the corresponding Zener-type wave equation, which provides an integral representation of the solution in terms of the propagation function and the solution of a related classical wave equation. The analytical findings are supported by numerical examples.

Резюме: Дробният конститутивен закон на Зенер често се използва като модел на вискозо-еластично поведение на деформируеми твърди тела. Използвайки апарата на функциите на Бернщайн, в тази работа се изучава един клас линейни вискозо-еластични модели от типа на Зенер, които обобщават дробния модел на Зенер. Доказваме, че съответните модули на релаксация са напълно монотонни функции при подходящи термодинамични ограничения върху параметрите. Въз основа на това свойство изучаваме функцията на разпространение и установяваме принципа на субординация за съответното вълново уравнение, който дава интегрално представяне на решението чрез функцията на разпространение и решението на съответното класическо вълново уравнение. Аналитичните резултати са подкрепени с числени примери.

[20] Bazhlekova, E., Pshenichnov, S.G., Two integral representations for the relaxation modulus of the generalized fractional Zener model. *Fractal and Fractional*, 7, 8, MDPI, 2023, ISSN:2504-3110, DOI:10.3390/fractalfract7080636, 636.

Abstract: A class of generalized fractional Zener-type viscoelastic models with general fractional derivatives is considered. Two integral representations are derived for the corresponding relaxation modulus. The first representation is established by applying the Laplace transform to the constitutive equation and using the Bernstein functions technique to justify the change of integration contour in the complex Laplace inversion formula. The second integral representation for the relaxation modulus is obtained by applying the subordination principle for the relaxation equation with generalized fractional derivatives. Two particular examples of the considered class of models are discussed in more detail: a model with fractional derivatives of uniformly distributed order and a model with general fractional derivatives, the kernel of which is a multinomial Mittag-Leffler-type function. To illustrate the analytical results, some numerical examples are presented.

Резюме: Разгледан е клас от обобщени дробни вискозо-еластични модели от тип Зенер с обобщени дробни производни. Изведени са две интегрални представяния за съответния модул на релаксация. Първото представяне се установява чрез прилагане на трансформация на Лаплас към конститутивното уравнение и използване на техниката на функциите на Бернщайн за

обосноваване на промяната на контура на интегриране в комплексната равнина във формулата за обратната Лапласова трансформация. Второто интегрално представяне за модула на релаксация се получава чрез прилагане на принципа на субординация за уравнението на релаксация с обобщени дробни производни. По-подробно са разгледани два конкретни примера от разглеждания клас модели: модел с дробни производни от равномерно разпределен ред и модел с общи дробни производни, чието ядро е многочленна функция от типа на Митаг-Лефлер. За илюстриране на аналитичните резултати са представени някои числени примери.

[21] Bazhlekova, E., Subordination results for a class of multi-term fractional Jeffreys-type equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 27, 3, Springer, 2024, ISSN:1311-0454 E-ISSN:1314-2224, DOI:10.1007/s13540-024-00275-3, 1048-1072.

Abstract: Jeffreys equation and its fractional generalizations provide extensions of the classical diffusive laws of Fourier and Fick for heat and particle transport. In this work, a class of multi-term time-fractional generalizations of the classical Jeffreys equation is studied. Restrictions on the parameters are derived, which ensure that the fundamental solution to the one-dimensional Cauchy problem is a spatial probability density function evolving in time. The studied equations are recast as Volterra integral equations with kernels represented in terms of multinomial Mittag-Leffler functions. Applying operator-theoretic approach, we establish subordination results with respect to appropriate evolution equations of integer order, depending on the considered range of parameters. Analyticity of the corresponding solution operator is also discussed. The main tools in the proofs are Laplace transform and the Bernstein functions' technique, especially, some properties of the sets of real powers of complete Bernstein functions.

Резюме: Уравнението на Джефри и неговите дробни обобщения представляват разширения на класическите дифузионни закони на Фурие и Фик за пренос на топлина и частици. В тази работа се изучава клас от многочленни дробни по времето обобщения на класическото уравнение на Джефри. Изведени са ограничения върху параметрите, които гарантират, че фундаменталното решение на едномерната задача на Коши е функция на плътност на вероятността по пространствената променлива, еволюираща във времето. Изследваните уравнения са преработени като интегрални уравнения на Волтера с ядра, представени чрез мултиномни функции на Митаг-Лефлер. Прилагайки операторно-теоретичен подход, установяваме субординация по отношение на подходящи еволюционни уравнения от цял ред, в зависимост от разглеждания диапазон от параметри. Обсъжда се и аналитичността на съответния оператор на решение. Основните инструменти в доказателствата са преобразуването на Лаплас и техниката на функциите на Бернщайн, особено някои свойства на множествата от реални степени на напълно Бернщайнови функции.

[22] Bazhlekova, E., Application of subordination principle to coefficient inverse problem for multi-term time-fractional wave equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, Springer, 2024, ISSN:1311-0454 E-ISSN:1314-2224, DOI:10.1007/s13540-024-00284-2

Abstract: An initial-boundary value problem for the multi-term time-fractional wave equation on a bounded domain is considered. For the largest and smallest orders of the involved Caputo fractional time-derivatives, α and α_m , it is assumed $1 < \alpha < 2$ and $\alpha - \alpha_m \leq 1$. Subordination principle with respect to the corresponding single-term time-fractional wave equation of order α is deduced. Injectivity of the integral transform, defined by the subordination relation, is established. The subordination identity is used to prove uniqueness for a coefficient inverse problem for the multi-term equation, based on an

analogous property for the related single-term one. In addition, the subordination relation is applied for deriving a regularity estimate.

Резюме: Разгледана е начална-гранична задача за многочленното дробно по времето вълново уравнение в ограничена област. За най-големия и най-малкия ред на включените дробни производни на Капуто, α и α_m , се предполага, че $1 < \alpha < 2$ и $\alpha - \alpha_m \leq 1$. Извежда се принцип за субординация по отношение на съответното вълново уравнение с една дробна производна по времето от ред α . Установена е инективност на интегралната трансформация, дефинирана чрез принципа за субординация. Този резултат се използва за доказване на единственост на инверсната задача за определяне на потенциала в разглежданото многочленното уравнение, изхождайки от аналогично свойство за съответното едночленно уравнение. В допълнение, интегралното представяне от принципа за субординация се прилага за извеждане на оценка за регулярност.