БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ – СОФИЯ

ИВО МИХАЙЛОВ МИХАЙЛОВ

КОХОМОЛОГИИ НА ГАЛОА И РЕАЛИЗИРАНЕ НА p-ГРУПИ КАТО ГРУПИ НА ГАЛОА

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

Н А

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за придобиване на научната степен

“доктор на математическите науки”

по научна специалност

01.01.02 – Алгебра и теория на числата

БАН, София, 2011 г.

Нашата дисертация е посветена на така наречената "обратна задача" в теорията на Галоа. Нека G е крайна група, и нека K е поле. **Обратната задача** в теорията на Галоа се състои от две части:

I Съществуване. Да се определи дали съществува разширение на Галоа M/K такова, че групата на Галоа $\mathrm{Gal}(M/K)$ е изоморфна на G.

II Явна конструкция. Ако G се реализира като група на Галоа над K, да се конструират в явен вид разширения на Галоа или полиноми над K, притежаващи G като група на Галоа.

Тази задача се явява обобщение на класическата обратна задача: Дали всяка крайна група може да се реализира като група на Галоа над полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$?

Ако групата G притежава нормална подгрупа A, тогава реализирането на факторгрупата $F = G/A$ като група на Галоа над дадено поле k се явява необходимо условие за реализирането на групата G над k. По този начин възниква и следващото обобщение на обратната задача – задачата за вложимост на полета.

Нека K/k е разширение на Галоа с група на Галоа F и нека α е епиморфизъм на G върху F. Да решим *задачата за вложимост* $(K/k, G, \alpha)$ означава да покажем, че съществува поле L, съдържащо K и нормално над k, така че групата на Галоа на разширението L/k да е изоморфна на G и за всеки елемент $g \in G$ ограничението му върху K да съвпада с $\alpha(g)$. Да означим с A ядрото на хомоморфизма α. Ще казваме, че A е ядро на задачата за вложимост, която ще бележим още с $(K/k, G, A)$.

Яковлев [Як, ИЛФ] предлага един кохомологичен подход, който е доразвит от нас в параграфи 1.3 и 1.4, където намираме връзката между двете препятствия на първоначалната задача и съпътстващите задачи от първи и втори тип. По този начин доказваме някои нови резултати и даваме кратки доказателства на известни факти, като теоремите на Кохендорфер, според които всяка задача за вложимост може да се сведе към еквивалентнта на нея задача за вложимост, съответстваща на групово p-разширение. По тази причина, изследването на задачи за вложимост, касаещи p-групи е от съществено значение за развитието на обратната задача като цяло.

Ние дефинираме първото препятствие като определен елемент във втората кохомолична група $H^2(*, *)$. Неговото "разпадане" (т.е. тривиалност като кохомологичен клас) съответства на известното условие за съгласуваност открито от Фадеев и Хасе. Това е едно необходимо условие за разрешимост на задачата за вложимост. Второто препятствие е елемент на първата кохомологична група $H^1(*,*)$ и неговото разпадане е достатъчно условие за разрешимостта на задачата за вложимост. Пресмятането на второто препятствие в явен вид, обаче се оказва непосилна задача в общия случай, поради което нашето внимание ще бъде насочено към задачи, за които това препятствие винаги се разпада, т.е. за които съответната първа кохомологична група $H^1(*,*)$ е тривиална. В този дух е следният основен резултат, който намира приложение в глава 6.

Теорема 1.5.2. ([Mi12, Theorem 3.2]) *Нека A е абелова група от ред n, нека полето K съдържа примитивен n-ти корен на единицата, и нека m е цяло число такова, че $m^2 \equiv 1 \pmod{n}$. Да предположим още, че $(K/k, G, A)$ е задача за вложимост, за която действието на $F = G/A$ върху $\widehat{A}$ удовлетворява следното изискване: за произволно $\rho \in F$ имаме, че или $\chi^\rho = \chi^m$ за всяко $\chi \in \widehat{A}$, или $\chi^\rho = \chi$ за всяко $\chi \in \widehat{A}$. Тогава условието за съгласуваност е необходимо и достатъчно за слабата разрешимост на задачата за вложимост $(K/k, G, A)$.*

В параграф 1.6 доказваме една теорема, с чиято помощ се редуцира решаването на специфични задачи за вложимост с циклично 2-ядро към решаването на техни съпътстващи задачи. Тук ще изтъкнем двете следствия от тази теорема, които се използват съществено в глава 5.

Следствие 1.6.2. ([Mi2, Theorem 1.1]) *Нека K/k е крайно разширение на Галоа с група на Галоа H, и нека $\zeta \in K$ е примитивен 2^n-ти корен на единицата ($n > 1$) такъв, че $\zeta + \zeta^{-1} \in k$ и $i(\zeta - \zeta^{-1}) \in k$. Нека $N = \mathrm{Gal}(K/k(i))$ и H действат тривиално върху C_{2^n}. Тогава задачата за вложимост $(K/k, G, C_{2^n})$ зададена с груповото разширение*

$$1 \to C_{2^n} \to G \underset{\pi}{\to} H \to 1, \tag{1.18}$$

е разрешима тогава и само тогава, когато задачите за вложимост $(K/k(i), \pi^{-1}(N), \mu_{2^n})$ и $(K/k, G/C_{2^{n-1}}, \mu_2)$, зададени с

$$1 \to \mu_{2^n} \to \pi^{-1}(N) \underset{\pi}{\to} N \to 1, \tag{1.19}$$

и, съответно, с

$$1 \to \mu_2 \to G/C_{2^{n-1}} \underset{\pi'}{\to} H \to 1, \tag{1.20}$$

са разрешими.

Следствие 1.6.3. ([Mi1, Corollary 2.2]) *Нека K/k е крайно разширение на Галоа с група на Галоа F, и нека ζ е примитивен 2^n-ти корен на единицака ($n > 1$) такъв, че $\zeta + \zeta^{-1} \in k, i(\zeta - \zeta^{-1}) \in k$ и $i \notin K$. Нека*

$$1 \to C_{2^n} \to G \underset{\pi}{\to} F \to 1 \tag{1.21}$$

е групово разширение. Продължаваме автоморфизмите $\sigma \in F$ върху $K(i)$ чрез $\sigma i = i$, и нека κ е пораждащият на $\mathrm{Gal}(K(i)/K)$. Нека $k(\sqrt{b})$ е неподвижното подполе на $N = \mathrm{Ker} g$ и да означим $k_1 = k(i\sqrt{b})$. Тогава $\mathrm{Gal}(K(i)/k_1) \cong F$, и задачата за вложимост $(K/k, G, C_{2^n})$ е разрешима тогава и само тогава, когато задачите $(K(i)/k_1, G, \mu_{2^n})$ и $(K/k, G/C_{2^{n-1}}, \mu_2)$ са разрешими.

Глава 2 е посветена на теоретични кохомологични критерии за задачата за вложимост с циклично ядро от прост ред. Тези критерии позволяват прецизното пресмятане на препятствията на редица задачи за вложимост касаещи p-групи.

Нека p е просто число и нека k е произволно поле с характеристика различна от p, което съдържа примитивен p-ти корен на единицата ζ. Да означим с μ_p цикличната подгрупа в k^*, породена от ζ. Нека K е разширение на Галоа на k с група на Галоа p-групата H. Да разгледаме груповото разширение

$$1 \longrightarrow \langle \varepsilon \rangle \cong \mu_p \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1, \tag{2.1}$$

където ε е централен елемент от ред p в G. Ние можем да отъждествим групите $\langle \varepsilon \rangle$ и $\langle \zeta \rangle$, тъй като те са изоморфни като H-модули. Тогава мономорфизмът $\mu_p \hookrightarrow K^*$, индуцира хомоморфизма $i : H^2(H, \mu_p) \to H^2(H, K^*)$.

Нека $\gamma \neq 0$ е 2-коkласът в $H^2(H, \mu_p)$, съответстващ на неразцепимото групово разширение (2.1). Елементът $i(\gamma)$ ще наричаме *препятствие* за решимост на задачата за вложимост (или за реализирането на групата G като група на Галоа над k). Тъй като задачата $(K/k, G, \mu_p)$ е брауерова, препятствието $i(\gamma)$ съвпада с първото препятствие (условието за съгласуваност) дефинирано в Глава 1. Според Киминг [Ki], задачата за вложимост $(K/k, G, \mu_p)$ е подходящо разрешима тогава и само тогава, когато $i(\gamma) = 1$.

Нека $c \in Z^2(H, \mu_2)$ представя γ. Известно е, че $H^2(H, K^*)$ е изоморфна на относителната група на Брауер $\mathrm{Br}(K/k)$ чрез изоморфизма $i(\gamma) \mapsto [K, H, c]$, където $[K, H, c] \in \mathrm{Br}(K/k)$ е класът на еквивалентност на кръстосаното произведение (K, H, c), т.е. (K, H, c) е централна проста алгебра над k, породена от K и елементите u_σ със съотношенията $u_1 = c_{1,1}, u_\sigma u_\tau = c_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}$ и $u_\sigma x = \sigma(x) u_\sigma$, за $\sigma, \tau \in H$ и $x \in K$.

Абсолютната група на Брауер $\mathrm{Br}(k)$ е изоморфна на индуктивната (директна) граница $\varinjlim \mathrm{Br}(K/k)$, където K/k пробягва всички крайни разширения на Галоа. Тъй като γ е елемент от ред p, препятствието $i(\gamma)$ лежи в p-торзията на групата на Брауер $\mathrm{Br}(k)$. Според теоремата на Меркуриев-Суслин [MeS], препятствието може да бъде разложено като произведение на p-циклични алгебри (които ще наричаме обобщени алгебри на кватернионите). *Обобщена кватернионна алгебра* от степен p ще наричаме централната проста алгебра над k, породена от елементи i и j такива, че $i^p = a, j^p = b$ и $ji = \zeta ij$ $(a, b \in k^*)$. Ще я бележим с $(a, b; \zeta)$. Когато $p = 2$, това е стандартната кватернионна алгебра, която ще бележим с (a, b). Нашата цел е да намерим това разлагане за всяка група, която ще разглеждаме.

Нека H е p-група и нека

$$1 \longrightarrow C_p \cong \langle\zeta\rangle \longrightarrow G \underset{\pi}{\longrightarrow} H \times C_p \longrightarrow 1 \tag{2.3}$$

е неразцепимо централно групово разширение с характеристичен 2-коклас $\gamma \in H^2(H \times C_p, C_p)$. Чрез $res_H\gamma$ означаваме 2-класът на груповото разширение

$$1 \longrightarrow C_p \longrightarrow \pi^{-1}(H) \underset{\pi}{\longrightarrow} H \longrightarrow 1.$$

Нека $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ е минимално пораждащо множество на максималната елементарна абелова факторгрупа на H; и нека τ е пораждащият елемент на директния множител C_p. Нека $s_1, s_2, \ldots, s_m, t \in G$ са про-образи на $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \tau$ такива, че $t^p = \zeta^j$ и $ts_i = \zeta^{d_i} s_i t$, където $i \in \{1, 2, \ldots, m\}; j, d_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Първият основен резултат, който доказваме в тази глава е следната

Теорема 2.2.1. ([Mi2, Theorem 4.1],[Mi3, Theorem 2.1]) *Нека K/k е разширение на Галоа с група на Галоа H и нека $L/k = K(\sqrt[p]{b})/k$ е разширение на Галоа с група на Галоа $H \times C_p$ ($b \in k^* \setminus k^{*p}$). Да изберем $a_1, a_2, \ldots, a_m \in k^*$ такива, че $\sigma_k \sqrt[p]{a_i} = \zeta^{\delta_{ik}} \sqrt[p]{a_i}$ (δ_{ik} е делтата на Кронекер). Тогава препятствието на задачата за вложимост $(L/k, G, \mu_p)$ зададена чрез L/k и груповото разширение* (2.3) *е*

$$[K, H, res_H\gamma] \left(b, b^j \zeta^{j(1+p(p-1)/2)} \prod_{i=1}^{m} a_i^{d_i}; \zeta \right).$$

Да разгледаме сега следната ситуация. Нека G е крайна група и нека $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_\kappa\}$ е фиксирано (не непременно минимално) пораждащо множество на G със следните свойства: $|\sigma_1| = p^{n-1}$ за $n > 1$, подгрупата H породена от $\sigma_2, \ldots, \sigma_\kappa$ е нормална в G, и факторгрупата

G/H е изоморфна на цикличната група $C_{p^{n-1}}$, т.е. $\sigma_1^i \notin H, 1 \leq i < p^{n-1}$. Да вземем две произволни групови разширения

$$1 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow G_1 \underset{\varphi}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1 \tag{2.4}$$

и

$$1 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow G_2 \underset{\psi}{\longrightarrow} G \longrightarrow 1. \tag{2.5}$$

Да означим с $\widetilde{\sigma}_i = \varphi^{-1}(\sigma_i)$ произволен про-образ на σ_i в G_1 и с $\overline{\sigma}_i = \psi^{-1}(\sigma_i)$ произволен про-образ на σ_i в G_2, $i = 1, \dots \kappa$.

Определение 2.2.3. Пишем $G_2 = G_1^{(p^n, \sigma_1)}$, ако

1. $|\widetilde{\sigma}_1| = p^{n-1}$;
2. $\overline{\sigma}_1^{p^{n-1}} \in \mu_p, \overline{\sigma}_1^{p^{n-1}} \neq 1$; и
3. всички останали съотношения между пораждащите на групите G_1 и G_2 са идентични, т.е. $\widetilde{\sigma}_i^{\alpha_i} = \zeta^l \prod_{j \neq 1} \widetilde{\sigma}_j^{\beta_j} \iff \overline{\sigma}_i^{\alpha_i} = \zeta^l \prod_{j \neq 1} \overline{\sigma}_j^{\beta_j}$ за $i = 2, 3, \dots, \kappa$; $l, \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}$; и $[\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\sigma}_j] = \zeta^l \prod_{s \neq 1} \widetilde{\sigma}_s^{\varepsilon_s} \iff [\overline{\sigma}_i, \overline{\sigma}_j] = \zeta^l \prod_{s \neq 1} \overline{\sigma}_s^{\varepsilon_s}$ for $i, j = 1, 2, \dots, \kappa; l, \varepsilon_s \in \mathbb{Z}$.

Следващият основен кохомологичен критерий, който доказваме е

Теорема 2.2.4. ([Mi5, Theorem 2.7]) *Нека L/k е крайно разширение на Галоа с група на Галоа $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ според описанието по-горе, нека $K = L^H$ е неподвижното подполе на H, и нека групите G_1 и G_2 от (2.4) и (2.5) са такива, че $G_2 = G_1^{(p^n, \sigma_1)}$. Да означим с $O_{G_1} \in \mathrm{Br}_p(k)$ – препятствието на задачата за вложимост $(L/k, G_1, \mu_p)$, с $O_{G_2} \in \mathrm{Br}_p(k)$ – препятствието на задачата за вложимост $(L/k, G_2, \mu_p)$, и с $O_{C_{p^n}} \in \mathrm{Br}_p(k)$ – препятствието на задачата за вложимост $(K/k, C_{p^n}, \mu_p)$ зададена с груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow C_{p^n} \longrightarrow G/H \cong C_{p^{n-1}} \longrightarrow 1.$$

Тогава връзката между тези препятствия се дава чрез следното равенство:

$$O_{G_2} = O_{G_1} O_{C_{p^n}} \in \mathrm{Br}_p(k).$$

С помощта на хомоморфизма на корестрикция $\mathrm{cor}_{G/H} : H^q(H, A) \to H^q(G, A)$, където H е подгрупа на G, а A е G-модул, можем да намерим критерии за разрешимост на редица задачи за вложимост, които не могат да бъдат решени по друг начин. По принцип явните пресмятания са рядко срещани, поради сложното описание на хомоморфизма на корестрикция. Ние обаче сме намерили няколко ефективни подхода, които ни позволяват да открием сравнително лесно такива групови разширения, които се явяват корестрикции на групови разширения, за които съответната задача за вложимост е изследвана.

Да разгледаме следната ситуация. Нека $\mathcal{G}$ е про-крайна 2-група и нека E_4 е затворена нормална подгрупа на $\mathcal{G}$, изоморфна на елементарната абелова група от ред 4 с пораждащи σ и τ. Нека да съществува затворена подгрупа $\mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$ такава, че E_4 е нормална подгрупа в $\mathcal{H}$, още $\mathcal{H}$ се съдържа в централизатора $C_{\mathcal{G}}(E_4)$ на E_4 в $\mathcal{G}$, и индекса на $\mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$ е 2. Понататък, да изберем и фиксираме $g_1 \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$, и да приемем, че $g_1 \sigma g_1^{-1} = \sigma$ и $g_1 \tau g_1^{-1} = \sigma\tau$. Тогава за $H = \mathcal{H}/E_4$ и $G = \mathcal{G}/E_4$ имаме изоморфизма $G/H \cong \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Накрая, да изберем и да фиксираме $g \in G \setminus H$, така че да имаме G-действие на E_4, зададено чрез $c^h = c$ за всяко $c \in E_4$ и $h \in H$; $\sigma^g = \sigma$ и $\tau^g = \sigma\tau$. Следната теорема ни позволява да пресметнем препятствията на някои задачи за вложимост, разгледани в параграфи 3.2 и 6.1.

Теорема 2.3.8. ([Mi5, Theorem 3.8]) *Нека $c_1 \in H^2(G, \mu_2)$ е 2-докласът, съответстващ на груповото разширение $1 \longrightarrow E_4/\langle\sigma\rangle \cong \mu_2 \longrightarrow \mathcal{G}/\langle\sigma\rangle \longrightarrow G \longrightarrow 1$, нека $c_2 \in H^2(H, \mu_2)$ е 2-докласът, съответстващ на груповото разширение $1 \longrightarrow E_4/\langle\tau\rangle \cong \mu_2 \longrightarrow \mathcal{H}/\langle\tau\rangle \longrightarrow H \longrightarrow 1$, и нека $c_3 \in H^2(H, \mu_2)$ е 2-докласът, съответстващ на груповото разширение $1 \longrightarrow E_4/\langle\sigma\tau\rangle \cong \mu_2 \longrightarrow \mathcal{H}/\langle\sigma\tau\rangle \longrightarrow H \longrightarrow 1$. Тогава $\mathrm{cor}_{G/H}(c_2) = \mathrm{cor}_{G/H}(c_3) = c_1$.*

В параграфи 2.4, 2.5 и 2.6 развиваме в по-голяма дълбочина един съвременен подход към задачата за вложимост - теорията на ортогоналните представяния на крайни групи. Считаме, че получените от нас резултати в тези параграфи са особено съществени и потенциално приложими в други области на математиката, използващи алгебри и групи на Клифорд, както и производните им групи Pin и Spin.

Нека k е поле с характеристика $\neq 2$, нека V е крайномерно k-векторно пространство, и нека (V, q) е квадратично пространство, където q е квадратична форма. Изометриите $(V, q) \mapsto (V, q)$ образуват подгрупа $O(q)$ на $\mathrm{GL}_k(V)$, наречена *ортогоналната група* на q. *Ортогонално представяне* на крайна група G ще наричаме хомоморфизма $\mu : G \to O(q)$ на G в ортогоналната група за някоя квадратична форма q. Отсега нататък, под ортогонално представяне ще разбираме влагане $\mu : G \hookrightarrow O(q)$.

Дефинициите за алгебра на Клифорд $C(q)$, група на Клифорд $C^*(q)$, както и групите Pin и Spin са подробно изложени в нашата дисертация, заедно с множество други понятия и факти в тази област. Поради големият им обем, тук ще пропуснем тяхното изложение и ще преминем към описанието на индуцираните ортогонални представяния и ролята на хомоморфизма на корестрикция.

Нека сега L/k е крайно разширение на Галоа с група на Галоа G, нека H е подгрупа на G с неподвижно поле $K = L^H$, и нека $\mu : H \hookrightarrow O(q)$ е ортогонално представяне над k. Тогава, според [Fr, FM], можем да конструираме *индуцираното ортогонално представяне* $\mathrm{ind}\mu : G \hookrightarrow O(q_{\mathrm{ind}\mu})$, където $\mathrm{ind}\mu$ има като прилежащ модул индуцирания G-модул на H-модула V_q : $V_{\mathrm{ind}\mu} = \oplus(V_q \otimes \sigma) = V_q \otimes_{kH} kG$, σ пробягва дадена дясна трансверзала R на H в G. Да отбележим, че $V_q \subset V_{\mathrm{ind}\mu}$ е подпространство, което е H-инвариантно. Не е трудно да се покаже, че ако е дадено ортогонално представяне $\mu : H \hookrightarrow O(q)$, такова $V_{\mathrm{ind}\mu}$ съществува и е единствено с точност до изоморфизъм (виж например [FH, §3.3]). Нещо повече, действието на G може да бъде явно зададено: всеки елемент $v \in V_{\mathrm{ind}\mu}$ има единствено представяне $v = \sum w_\sigma \otimes \sigma$ за някои елементи w_σ във V_q. За дадено $g \in G$, действието се задава чрез

$$g \cdot (w_\sigma \otimes \sigma) = hw_\sigma \otimes \tau \quad \text{ако } g\sigma = \tau h \ (\tau \in R). \tag{2.9}$$

Нататък, нека ни е дадено специално ортогонално представяне $\mu : H \hookrightarrow SO(q)$ над k. Означаваме отново с $\overline{k}_{sep}$ сепарабелната обвивка на k, и с $\overline{q}$ разширената форма на q върху $\overline{k}_{sep}$. Тогава имаме следната диаграма

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \widetilde{H} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \mathrm{Spin}(\overline{q}) & \longrightarrow & SO(\overline{q}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \overline{k}_{sep}^{*} & \longrightarrow & C_0^*(\overline{q}) & \longrightarrow & SO(\overline{q}) & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

първият ред на която е ограничението на $1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(\overline{q}) \longrightarrow SO(\overline{q}) \longrightarrow 1$. Индуцираното ортогонално представяне $\mathrm{ind}\mu : G \hookrightarrow O(q_{\mathrm{ind}\mu})$ на свой ред дава комутативната диаграма

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \widetilde{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \mathrm{Pin}(\overline{q}_{\mathrm{ind}\mu}) & \longrightarrow & O(\overline{q}_{\mathrm{ind}\mu}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \overline{k}_{sep}^{*} & \longrightarrow & C^*(\overline{q}_{\mathrm{ind}\mu}) & \longrightarrow & O(\overline{q}_{\mathrm{ind}\mu}) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Следващата основна теорема в нашата дисертация ни дава възможност да пресметнем препятствията на задачи за вложимост описани в глава 4.

Теорема 2.5.2. ([Mi4, Theorem 2.2]) *Нека G е крайна група и нека H е подгрупа на G такава, че $|H| = 2^t m, (t, m \geq 1)$. Нека също $\mu : H \hookrightarrow SO(q)$ е специално ортогонално представяне над k с прилежащ модул V_q такъв, че $n = \dim_k V_q \equiv 0 \pmod 4$. Да означим с $\overline{f} \in Z^2(H, \mu_2)$ и с $f \in Z^2(G, \mu_2)$ 2-коциклите дадени от описаните по-горе групови разширения $1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{H} \longrightarrow H \longrightarrow 1$ и $1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1$, съответно. Тогава $[f] = \mathrm{cor}_{G/H}([\overline{f}])$, където $\mathrm{cor}_{G/H} : H^2(H, \mu_2) \to H^2(G, \mu_2)$ е хомоморфизма на корестрикция.*

Нека $char(k) \neq 2$ и нека k съдържа примитивен n-ти корен на единицата η за n-четно. Нека $H \cong D_{2n}$ е диедралната група от ред $2n$, породена от елементи h_0 и h_1 със съотношения $h_0^n = h_1^2 = 1, h_1 h_0 = h_0^{-1} h_1$.

Според [Fr] можем да конструираме диедрално ортогонално представяне (което не е специално) $H \hookrightarrow O(q_1)$, където (V_1, q_1) е квадратично пространство такова, че квадратичната форма q_1 е асоциирана с билинейната форма $b_1(x, y)$ зададена чрез $b_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1, b_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = b_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ за някакъв базис $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ на V_1. Действието на H върху V_1 се задава чрез

$$h_0(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\eta, h_0(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\eta^{-1}, h_1(\mathbf{u}) = \mathbf{v}, h_1(\mathbf{v}) = \mathbf{u}.$$

В параграф 2.6 построяваме в явен вид индуцираното диедрално представяне, което се оказва специално. Тогава можем да разгледаме задачата за вложимост зададена с груповото разширение

$$1 \longrightarrow \mu_2 \cong \langle \rho \rangle \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \cong D_{4n} \longrightarrow 1, \tag{2.12}$$

където $\widetilde{G}$ има представяне

$$\widetilde{G} \cong \langle \widetilde{g}, \widetilde{h}_1, \rho \mid \widetilde{g}^{2n} = \rho^2 = 1, \widetilde{h}_1^2 = \rho, \widetilde{h}_1 \widetilde{g} = \widetilde{g}^{-1} \widetilde{h}_1,\ \rho\ -\ \text{централен} \rangle.$$

Нека M/k е разширение на Галоа с група на Галоа $G \cong D_{4n}$, нека $K = M^H = k(\sqrt{a_1})$ е неподвижното подполе на H, и нека $L = M^{\langle g^4 \rangle} = k(\sqrt{r(\alpha + \beta\sqrt{a_1})}, \sqrt{b})$ е неподвижното подполе на подгрупата $\langle g^4 \rangle$, където $\alpha^2 - a_1\beta^2 = a_1 b, r, \beta \in k^*, \alpha \in k$ и $\mathrm{Gal}(L/k) \cong D_8$. При тези предположения доказваме следната

Теорема 2.6.1. ([Mi4, Proposition 5.1]) *Препятствието на задачата за вложимост $(M/k, \widetilde{G}, \mu_2)$ е $(b, -1) \in \mathrm{Br}_2(k)$.*

Глава 3 съдържа резултати, касаещи реализирането на групите от ред 2^n при $n \leq 5$. Теорията на квадратичните форми играе важна роля при конструирането на разширенията на Галоа - виж например [GSS, Le3], където са построени семейства от параметрични разширения на Галоа, които реализират всички неабелови групи от ред 16 с изключение на кватернионната група Q_{16}. Известно е, че ньотеровата задача има отрицателен отговор за тази група над някои полета, така че не е възможно да се даде параметрично описание на Q_{16} разширенията над произволно поле k. В параграф 3.1 правим описание на Q_{16} разширенията в редица частни случаи. Тези резултати са публикувани в [Mi9].

Параграф 3.2 е посветен на реализирането на неабеловите групи от ред 32 като групи на Галоа. Първото пълно описание на препятствията на всички тези групи е направено от нас в [Mi7]. За групата $G_{(32,6)}$ например доказваме

Теорема 3.2.12. ([Mi7, Theorem 6.1],[Mi5, Theorem 5.1]) *Препятствието за разрешимост на задачата за вложимост* $(L/F, G_{(32,6)}, \mu_2)$ *е* $(b, dr)(a, ds) \in \mathrm{Br}_2(F)$. *Ако* $(b, dr)(a, ds) = 1 \in \mathrm{Br}_2(F)$, *то съществуват елементи* $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in E$ *и* $v \in F^*$ *такива, че* $drv = N_{E/F(\sqrt{a})}(\delta_1)$, $dsv = N_{E/F(\sqrt{b})}(\delta_2), v = N_{E/F(\sqrt{a})}(\delta_3) = N_{E/F(\sqrt{b})}(\delta_3)$, *и*

$$M/F = E(\sqrt{r\alpha}, \sqrt{s\beta}, \sqrt{t\delta_1\delta_2\delta_3})/F,\ t \in F^*$$

са всички разширения на Галоа, решаващи задачата за вложимост $(L/F, G_{(32,6)}, \mu_2)$.

В глава 4 пресмятаме препятствията за реализирането на редица p-групи. Даваме също така описание на разширенията на Галоа, които реализират тези групи. Тези резултати са публикувани в [Mi3, Mi4] и представляват съществен принос в развитието на обратната задача, касаеща реализирането на p-групите над произволно поле.

В параграф 4.2 се спираме на следните четири неабелови групи от ред p^4:

$$G_3 : g_1^p = g_4, g_2^p = g_3^p = g_4^p = 1, [g_2, g_1] = g_3,\ g_3 \text{ и } g_4 \text{ са централни},$$
$$G_4 : g_1^p = g_4, g_2^p = g_3, g_3^p = g_4^p = 1, [g_2, g_1] = g_3,\ g_3 \text{ и } g_4 \text{ са централни},$$
$$G_5 : g_1^p = g_3, g_3^p = g_4, g_2^p = g_4^p = 1, [g_2, g_1] = g_4,\ g_3 \text{ и } g_4 \text{ са централни},$$
$$G_6 : g_1^p = g_2^p = 1, g_3^p = g_4, g_4^p = 1, [g_2, g_1] = g_4,\ g_3 \text{ и } g_4 \text{ са централни}.$$

Нека k е поле с характеристика $\neq p$, нека ζ е примитивен p-ти корен на единицата в k за нечетно просто число p, и нека a_1, a_2 са елементи от k^*, линейно независими по модул k^{*p}. Означаваме $K = k(\sqrt[p]{a_1}, \sqrt[p]{a_2})$ и $K_i = k(\sqrt[p]{a_i}), i = 1, 2$. Нека да приемем, че задачата за вложимост $(K_1/k, C_{p^2}, \mu_p)$ е разрешима. Тогава $(a_1, \zeta; \zeta) = 1$, значи съществува $\alpha \in K_1$, за което $\zeta = N_{K_1/k}(\alpha)$. Да изберем някое C_{p^2} разширение над k: $L_1 = K_1(\sqrt[p]{f_1\beta})$, където $f_1 \in k^*$ и $\beta = \sqrt[p]{a_1}(\alpha^{p-1}\sigma_1(\alpha)^{p-2}\cdots\sigma_1^{p-2}(\alpha))^{-1}$. Тогава имаме $C_{p^2} \times C_p$ разширение $L = L_1(\sqrt[p]{a_2})$. Доказваме следните теореми.

Теорема 4.2.1. ([Mi3, Theorem 4.1]) *Препятствието на задачата за вложимост $(L/k, G_3, \mu_p)$ е $(a_2, a_1; \zeta)$. Ако задачата е разрешима, т.е. $a_2 = N_{K_1/k}(\omega)$ за $\omega \in K_1^*$, можем да положим*

$$\gamma = \omega^{p-1}\sigma_1(\omega)^{p-2}\cdots\sigma_1^{p-2}(\omega).$$

Тогава всички разширения на Галоа, реализиращи G_3 са $\{L(\sqrt[p]{f_2\gamma})/k \mid f_2 \in k^*\}$.

Теорема 4.2.2. ([Mi3, Theorem 4.2]) *Препятствието на задачата за вложимост $(L/k, G_4, \mu_p)$ е $(a_2, a_1\zeta; \zeta)$. Ако задачата е разрешима, т.е. $a_1\zeta = N_{K_2/k}(x)$ за $x \in K_2^*$, можем да положим*

$$\omega = \sqrt[p]{a_2}(x^{p-1}\sigma_2(x^{p-2})\sigma_2^2(x^{p-3})\cdots\sigma_2^{p-2}(x))^{-1}.$$

Тогава всички разширения на Галоа, реализиращи G_4 са $\{L(\sqrt[p]{f_2\omega})/k \mid f_2 \in k^*\}$.

Теорема 4.2.3. ([Mi3, Theorem 4.3]) *Препятствието на задачата за вложимост $(L/k, G_5, \mu_p)$ е $[L_1, C_{p^2}, \zeta]$ $(a_2, a_1; \zeta)$. Ако k съдържа примитивен корен на единицата $\zeta_{p^2} = \sqrt[p]{\zeta}$ от степен p^2, то препятствието е $(\zeta_{p^2}^{-1}a_2, a_1; \zeta)$. Ако ни е дадено, че задачата за вложимост е разрешима, т.е. $\zeta_{p^2}^{-1}a_2 = N_{K_1/k}(y)$, за някои $y \in K_1$, можем да положим*

$$\omega = \sqrt[p^2]{a_1}y^{p-1}\sigma_1(y)^{p-2}\cdots\sigma_1^{p-2}(y).$$

Тогава всички разширения на Галоа, които реализират G_5 са $\{L(\sqrt[p]{f\omega})/k \mid f \in k^*\}$.

Във връзка с групата G_6, въвеждаме следните означения: Нека $a_1, a_2, a_3 \in k^*, K_i = k(\sqrt[p]{a_i})$ $(i = 1, 2, 3)$, и нека $K/k = k(\sqrt[p]{a_1}, \sqrt[p]{a_2}, \sqrt[p]{a_3})/k$ е C_p^3 разширение с пораждащи ρ_1, ρ_2 и ρ_3, за които $\rho_j(\sqrt[p]{a_i})/\sqrt[p]{a_i} = \zeta^{\delta_{ij}}$ $(i, j = 1, 2, 3$ и δ_{ij} както обикновено е делтата на Кронекер).

Теорема 4.2.4. ([Mi3, Theorem 4.4]) *Препятствието на задачата за вложимост $(K/k, G_6, \mu_p)$ е $(a_3, \zeta; \zeta)$ $(a_2, a_1; \zeta)$. Ако ни е дадено, че $(a_3, \zeta; \zeta) = (a_2, a_1; \zeta) = 1$, т.е. съществува $x \in K_3$ такова, че $\zeta = N_{K_3/k}(x)$ и съществува $y \in K_2$ такова, че $a_1 = N_{K_2/k}(y)$, можем да положим*

$$\omega = \sqrt[p]{a_3}(y^{p-1}\rho_2(y)^{p-2}\cdots\rho_2^{p-2}(y))^{-1}(x^{p-1}\rho_3(x)^{p-2}\cdots\rho_3^{p-2}(x))^{-1}.$$

Тогава всички разширения на Галоа, реализиращи G_6 са $\{K(\sqrt[p]{f\omega})/k \mid f \in k^*\}$.

Да отбележим, че изискването основното поле k да притежава примитивен p-ти корен на единицата е само за улеснение на пресмятанията. Ако това изискване не е изпълнено, съществува техника за присъединяване на корените на единицата, която сега ще изложим.

Нека сега k е произволно поле с характеристика различна от p, и нека k не съдържа примитивен p-ти корен на единицата. Да изберем и фиксираме един примитивен p-ти корен на единицата ζ. Тогава разширението $k(\zeta)/k$ е циклично от степен d, където d трябва да дели $p-1$. Нека κ е пораждащият елемент на групата $\mathrm{Gal}(k(\zeta)/k)$, която е изоморфна на цикличната група C_d. Тогава съществува $e \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, така че $\kappa(\zeta) = \zeta^e$. Нека K/k е p-разширение с група на Галоа $H = \mathrm{Gal}(K/k)$. Тогава $K(\zeta)/k(\zeta)$ също е H-разширение и можем да отъждествим групите $\mathrm{Gal}(K/k)$ и $\mathrm{Gal}(K(\zeta)/k(\zeta))$. Можем също така да отъждествим групите $\mathrm{Gal}(K(\zeta)/K)$ и $\mathrm{Gal}(k(\zeta)/k)$. Тогава доказваме следната

Теорема 4.2.5. ([Mi3, Theorem 5.1]) *Нека*

$$1 \longrightarrow C_p \longrightarrow G \xrightarrow[\pi]{} H \longrightarrow 1 \tag{4.5}$$

е неразцепимо групово разширение. Тогава задачата за вложимсост, зададена чрез (4.5) *и K/k е разрешима тогава и само тогава, когато задачата за вложимост зададена чрез* (4.5) *и $K(\zeta)/k(\zeta)$ е разрешима.*

В точка 4.2.2 доказваме също така, че е в сила автоматичната реализация $G_3 \implies G_4$, т.е. ако групата G_3 се реализира над произволно поле k, то G_4 също се реализира над това поле. Обратната реализация $G_4 \implies G_3$ не е в сила, както показваме в следващата точка, разглеждайки локални полета.

В параграф 4.3 разглеждаме модулярната p-група и някои нейни сродни групи. Означаваме модулярната група от ред p^n с $M(p^n)$, за $n \geq 3$. Тя се поражда от два елемента α и β със съотношения $\alpha^{p^{n-1}} = \beta^p = 1$ и $\beta\alpha = \alpha^{1+p^{n-2}}\beta$, виж например [Ha, Th. 12.5.1]. Поради честата употреба на простата степен p^{n-2}, ще положим $q = p^{n-2}$. Модулярната група $M(2^n)$ е една от четирите неабелови групи от ред 2^n, които имат циклична подгрупа с индекс 2, за $n \geq 4$. За нечетно p, модулярната група $M(p^n)$ е единствената неабелова група от ред p^n, която има циклична подгрупа с индекс p, за $n \geq 3$.

Тъй като α^q е централен и $\alpha^{-1}\beta\alpha = \alpha^q\beta$, подгрупата породена от α^q и β е нормална в $M(p^n)$. Така получаваме груповото разширение:

$$1 \longrightarrow C_p \times C_p \cong \langle \alpha^q, \beta \rangle \longrightarrow M(p^n) \xrightarrow[\alpha \mapsto \sigma]{} C_q \longrightarrow 1. \tag{4.8}$$

Първият основен резултат в този параграф е следната теорема, която дава явно описание на модулярните разширения.

Теорема 4.3.2. ([Mi4, Theorem 3.2]) *L/k е $M(p^n)$ разширение, което е решение на задачата за вложимост зададена чрез (4.8), тогава и само тогава, когато съществуват $b_0 \in K^* \setminus K^{*p}, f \in k^* \setminus k^* \cap K^{*p}$ и $x \in K^*$ такива, че $\sigma(b_0)/b_0 = fx^p, L/k = K(\sqrt[p]{b_0}, \sqrt[p]{f})/k$ и $c = f^{q/p}N_{K/k}(x)$ е p-ти корен на единицата, но $c \neq 1$.*

Да означим с $\widetilde{M}(p^{n+1})$ групата породена от елементите σ_1, τ_1 и ρ_1 такива, че $|\sigma_1| = pq, \tau_1^p = \rho_1^p = 1, \tau_1\sigma_1 = \sigma_1^{q+1}\tau_1\rho_1$ и ρ_1 е централен. Така дефинираната група играе важна роля в нашите пресмятания по-нататък. Информация за разширенията на Галоа, реализиращи тази група се дава от следната

Теорема 4.3.6. ([Mi4, Proposition 3.5]) *Нека $L = K(b_0^{1/p}, b_1^{1/p}, b_2^{1/p})$, където $b_0 \in K^* \setminus K^{*p}, b_1 = \sigma(b_0)/b_0 \in K^* \setminus K^{*p}, \sigma(b_1)/b_1 \in K^{*p}, b_2 \in K^* \setminus K^{*p}$ и $\sigma(b_2)/b_2 \in K^{*p}$. Тогава L/k е неабелово разширение на Галоа и групата на Галоа на L/k е изоморфна или на $(C_q \rtimes (C_p)^2) \times C_p$, или на $M(p^n) \times C_p$, или на $\widetilde{M}(p^{n+1})$.*

По-нататък в тази глава доказваме следните факти, в които прилагаме теорема 2.5.2 за да пресметнем корестрикции на някои групови разширения.

Лема 4.3.11. ([Mi4, Lemma 4.1]) *Да разгледаме изображението на рестрикция*

$$\mathrm{res} : H^2(S_d, \mu_2) \longrightarrow H^2(G, \mu_2),$$

където G се влага транзитивно в симетричната група S_d от степен $d = 2^l \geq 4$, според медода описан в параграф 2.5 (с използването на примитивен елемент).

1. ([DEK, Lemma 2]) *Нека $G = C_2 \times C_2$. Тогава $\mathrm{res}(s_4)$ съответства на груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow Q_8 \longrightarrow C_2 \times C_2 \longrightarrow 1.$$

2. *Нека $G = C_{2^{n-2}} \times C_2$ за $n \geq 4$. Тогава $\mathrm{res}(s_{2^{n-1}})$ съответства на груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{C_{2^{n-2}} \times C_2} \longrightarrow C_{2^{n-2}} \times C_2 \longrightarrow 1,$$

където $\widetilde{C_{2^{n-2}} \times C_2}$ има представяне: $x^{2^{n-2}} = y^2 = 1, yx = -xy$.

3. *Нека* $G = M(2^n)$. *Тогава* $\mathrm{res}(s_{2^n})$ *съответства на груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{M(2^n)} \longrightarrow M(2^n) \longrightarrow 1,$$

където $\widetilde{M(2^n)} \cong \widetilde{M}(2^{n+1})$ *е групата описана преди теорема 4.3.6 за* $p = 2$.

Теорема 4.3.12. ([Mi4, Theorem 4.2]) *Нека* G *е крайна 2-група породена от два елемента* g *и* h_2 *такива, че* $g^2 = h_1, h_2^2 = 1$ *и* $h_1h_2 = h_2h_1$. *Нека* H *е подгрупата на* G *породена от* h_1 *и* h_2.

1. *Нека* $G \cong C_4 \times C_2, H \cong C_2 \times C_2$ *и нека* $\overline{f} \in Z^2(H, \mu_2)$ *представят груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow Q_8 \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Тогава $f = \mathrm{cor}_{G/H}(\overline{f}) \in Z^2(G, \mu_2)$ *представя груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{C_4 \times C_2} \cong D \curlywedge C \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

2. *Нека* $G \cong C_{2^{n-2}} \times C_2, H \cong C_{2^{n-3}} \times C_2$ *за* $n \geq 5$ *и нека* $\overline{f} \in Z^2(H, \mu_2)$ *представя груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{C_{2^{n-3}} \times C_2} \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Тогава $f = \mathrm{cor}_{G/H}(\overline{f}) \in Z^2(G, \mu_2)$ *представя груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{C_{2^{n-2}} \times C_2} \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

3. *Нека* $G \cong M(2^n), H \cong C_{2^{n-2}} \times C_2$ *за* $n \geq 4$ *и нека* $\overline{f} \in Z^2(H, \mu_2)$ *представя груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{C_{2^{n-2}} \times C_2} \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

Тогава $f = \mathrm{cor}_{G/H}(\overline{f}) \in Z^2(G, \mu_2)$ *представя груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \widetilde{M(2^n)} \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Накрая, пресмятаме препятствията на задачите за вложимост, съответстващи на груповите разширения от $H^2(M(p^n), \mu_p) \cong \mu_p^2$. Да вземем произволно $M(p^n)$ разширение L/k, според описанието дадено в теорема 4.3.2: $L/k = K(\sqrt[q]{b_0}, \sqrt[p]{a_2})/k$, където $b_0 \in K^* \setminus K^{*p}, a_2 \in k^* \setminus k^* \cap K^{*p}$ и $x \in K^*$ са такива, че $\sigma(b_0)/b_0 = a_2x^p$, и $c = a_2^{q/p}N_{K/k}(x)$ е p-ти корен на единицата, но $c \neq 1$. Нещо повече, имаме включването $k(\sqrt[p]{a_1}, \sqrt[p]{a_2}) \subset L$, където $K_1 = k(\sqrt[p]{a_1}) = L^{C_q \times C_p}$.

Теорема 4.3.15. ([Mi4, Proposition 4.3]) *Препятствието на задачата за вложимост зададена чрез L/k и*

$$1 \longrightarrow \mu_p \cong \langle\zeta\rangle \longrightarrow \widetilde{M}(p^{n+1}) \underset{\substack{\widetilde{\alpha}\mapsto\alpha \\ \widetilde{\beta}\mapsto\beta}}{\longrightarrow} M(p^n) \longrightarrow 1.$$

е $(a_2, a_1; \zeta) \in \mathrm{Br}_p(k)$.

Теорема 4.3.16. ([Mi4, Proposition 4.4]) *Препятствието на задачата за вложимост зададена чрез L/k и груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow G_{\zeta,1} \underset{\substack{x\mapsto\alpha \\ y\mapsto\beta}}{\longrightarrow} M(p^n) \longrightarrow 1,$$

където $G_{\zeta,1} \cong \langle x, y \mid x^{p^{n-1}} = y^{p^2} = 1, y^p -$ *централен*$, yx = x^{q+1}y\rangle$ *е* $(a_2, \zeta; \zeta) \in \mathrm{Br}_p(k)$.

Теорема 4.3.17. ([Mi4, Proposition 4.5]) *Препятствието на задачата за вложимост зададена чрез L/k и груповото разширение*

$$1 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow G_{\zeta,\zeta} \underset{\substack{x\mapsto\alpha \\ y\mapsto\beta}}{\longrightarrow} M(p^n) \longrightarrow 1,$$

където $G_{\zeta,\zeta} \cong \langle x, y \mid x^{p^{n-1}} = y^{p^2} = 1, y^p -$ *централен*$, yx = x^{q+1}y^{p+1}\rangle$ *е* $(\zeta a_1, a_2; \zeta) \in \mathrm{Br}_p(k)$.

Неабеловите 2-групи, притежаващи циклична подгрупа с индекс 2 са едни от найчесто срещаните групи в работи посветени на теорията на Галоа. Намирането на необходими и достатъчни условия за реализирането на тези групи, като групи на Галоа над произволни полета с характеристика различна от 2 е все още нерешен напълно проблем.

В глава 5 пресмятаме препятствията на задачите за вложимост с циклично ядро от ред 2^n за неабеловите групи от ред 2^{n+3} $(n \geq 1)$, имащи циклична подгрупа с индекс 2, при условие, че за някой примитивен 2^n-ти корен на единицата ζ, елементите $\zeta + \zeta^{-1}$ и $i(\zeta - \zeta^{-1})$ едновременно се съдържат в основното поле k. Получените резултати са публикувани в [Mi1, Mi2]. Ще посочим само препятствията на брауеровите задачи, които сме пресметнали с помощта на формулата за разлагане на крайномерна централна проста алгебра в произведение на подалгебра и нейния централизатор.

Нека K/k е D_8 разширение и нека $\zeta \in K$ е примитивен 2^n-ти корен на единицата такъв, че $\zeta \notin k, \zeta + \zeta^{-1} \in k$ и $i(\zeta - \zeta^{-1}) \in k$. Тогава $K/k = k(\sqrt[4]{a}, i)$ за някое $a \in k \setminus k^2$, и D_8 е породена от елементи σ и τ, зададени така:

$$\sigma : \sqrt[4]{a} \mapsto i\sqrt[4]{a}, i \mapsto i;\ \tau : \sqrt[4]{a} \mapsto \sqrt[4]{a}, i \mapsto -i$$

(в частност $\sigma(\zeta) = \zeta$ и $\tau(\zeta) = \zeta^{-1}$).

Нека G е група породена от елементи s и t такива, че s има ред $2^{n+2}, t^2 = \varepsilon_1$ и $ts = \varepsilon_2 s^{-1} t$, където $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$. Тъй като $ts^4 = s^{-4}t$, можем да положим $s^4 = \zeta$, и да получим груповото разширение

$$1 \to \mu_{2^n} \underset{\zeta \mapsto s^4}{\to} G \underset{\substack{s \mapsto \sigma \\ t \mapsto \tau}}{\to} D_8 \to 1,$$

където сме отъждествили цикличната група $\langle s^4 \rangle$ с групата μ_{2^n} на корените на единицата от степен 2^n. Следователно имаме $s^4 = \zeta, t^2 = \varepsilon_1$ и $ts = \varepsilon_2 \zeta^{-1} s^3 t$, където $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+1, -1\}$. Групата G има елемент от ред 2^{n+2}, откъдето G е изоморфна или на диедралната или на полудиедралната или на кватернионната група от ред 2^{n+3}.

Теорема 5.2.2. ([Mi1, Theorem 3.2]) *За разрешимостта на задачата за вложимост* $(K/k, G, \mu_{2^n})$ *при* $n \geq 1$, *е необходимо да съществуват* $\alpha_1 \in k^*$ *и* $\beta_1 \in k$ *такива, че* $\alpha_1^2 + a\beta_1^2 = 2 - \zeta - \zeta^{-1}$. *В този случай препятствието е*

$$(-1, \varepsilon_1)(2 + \zeta + \zeta^{-1}, \alpha_1\beta_1) \left(a, \varepsilon_2 \alpha_1 \left(2\alpha_1 - \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{i} \right) \right) \in \mathrm{Br}(k).$$

Нека сега K/k е произволно D_8 разширение. Да предположим отново, че $\zeta + \zeta^{-1} \in k$ и $i(\zeta - \zeta^{-1}) \in k$, така че положението на ζ в K/k се определя от положението на i. Тогава с помощта на следствия 1.6.2 и 1.6.3 пресмятаме препятствията на задачите за вложимост във всичките пет възможни случая.

Относно модулярната 2-група, да въведем следните означения: Нека $\zeta \in k$ е примитивен 2^n-ти корен на единицата ($n \geq 2$), нека $K = k(\sqrt[4]{a})$, и нека $L/k = k(\sqrt[4]{a}, \sqrt{b})/k$ е $C_4 \times C_2$ разширение, където C_4 се поражда от σ, а C_2 се поражда от τ, така че $\sigma \sqrt[4]{a} = i \sqrt[4]{a},\ \sigma\sqrt{b} = \sqrt{b};\ \tau \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a},\ \tau\sqrt{b} = -\sqrt{b}$.

Лема 5.3.2. ([Mi2, Lemma 3.2]) *За да бъде разрешима задачата за вложимост* $(L/k, M_{2^{n+3}}, \mu_{2^n})$, *съответстваща на груповото разширение*

$$1 \to \mu_{2^n} = \langle x^4 \rangle \hookrightarrow M_{2^{n+3}} \to C_4 \times C_2 \to 1$$

е необходимо да съществуват $\alpha \in k^*, \beta \in k$ *такива, че* $\alpha^2 - a\beta^2 = \zeta$. *В този случай препятствието е* $(a, \alpha b)(\zeta, \alpha\beta) \in \mathrm{Br}(k)$.

Нека L/k е произволно $C_4 \times C_2$ разширение. Да предположим отново, че $\zeta + \zeta^{-1} \in k$ и $i(\zeta - \zeta^{-1}) \in k$, така че положението на ζ в L/k се определя от положението на i. Тогава отново с помощта на следствия 1.6.2 и 1.6.3 пресмятаме препятствията на задачите за вложимост във всичките пет възможни случая.

В параграф 5.4 даваме явно описание на разширенията на Галоа, които реализират модулярната група от ред от ред 2^{n+3} при предположението, че примитивен корен на единицата от степен 2^{n+2} се съдържа в квадратично разширение на основното поле.

В глава 6 намираме необходими и достатъчни условия за реализирането на всички неабелови групи от ред 2^n, имащи циклична подгрупа с индекс 4 над полета съдържащи корен на единицата ζ от степен 2^{n-2} за произволно $n \geq 4$.

Според класификацията направена от Ниномия [Ni], има 26 такива групи $G_i, 1 \leq i \leq 26$, чиито представяния са дадени в началото на глава 6. Пресмятането на препятствията осъществяваме с два различни подхода.

Първият подход, който прилагаме за групите $G_1, \ldots, G_{17}$ и G_{26} е като разгледаме подходящи задачи за вложимост с ядро μ_2, и се възползваме от теореми 2.2.1, 2.2.4 и 2.3.8. Така получаваме необходими и достатъчни условия за реализирането на тези групи във вид на произведение на кватернионни алгебри в групата на Брауер $\mathrm{Br}(k)$. Тук няма да описваме параметрите на тези алгебри, които се появяват при формирането на самите задачи за вложимост, а само ще запишем крайният резултат в следната таблица

Таблица 1: Препятствията, ако $\zeta = \zeta_{2^{n-3}} \in k$

Група	Препятствия
G_1	$(a_2, -1),\ (\zeta^{-1}a_2, a_1)$
G_4	$(a_1, \zeta)(a_2, a_3)$
G_5	$(a_1, a_2),\ (a_1, \zeta)$
G_6	$(a_2, -1),\ (a, a_1)(a_2, \zeta)$
G_7	$(a_2, -1),\ (a, a_1)(a_2, \zeta)$
G_8	$(a_2, -1),\ (a, a_1)(a_2, \zeta)$
G_9	$(a_1, a_2),\ (a_1, \zeta)$
G_{12}	$(a, a_1)(a_2, \zeta)(a_2, a_3)$
G_{13}	$(a_1, -1),\ (a, a_1)(a_2, \zeta)$
G_{14}	$(a_1, -1),\ (a, a_1)(a_2, \zeta)$
G_{15}	$(a, a_1)(a_2, \zeta)(a_1, a_3)$
G_{16}	$(a, a_1)(a_2, \zeta)(a_2 a_1, a_3)$
G_{17}	$(a_1, ds\zeta)(a_2, dr)$
G_{26}	$(a_1, 2ds)(a_2, dr),\ (a_1, a_2)$

За останалите групи използваме друг подход, а именно разглеждаме задачи за вложимост с циклично ядро от ред 2^{n-3}. Прилагаме следният критерий, който доказваме с помощта на теорема 1.5.2.

Теорема 6.2.1. ([Mi12, Proposition 4.1]) *Нека групата G е изоморфна на някоя от групите G_i за $i = 18, \ldots, 25$, и да означим $A = \langle \sigma^2 \rangle$. Нека полето k съдържа примитивен корен на единицата ζ от степен 2^{n-3}, нека $F = G/A$, и нека K/k е разширение на Галоа с група на Галоа F. Задачата за вложимост $(K/k, G, A)$ е подходящо разрешима тогава и само тогава, когато условието за съгласуваност се удовлетворява.*

Получените препятствия записваме в таблицата

Таблица 2: Препятствията, ако $\zeta = \zeta_{2^{n-3}} \in F$

Група	Препятствия
G_{18}	$(a_1, a_2) \in \mathrm{Br}(k),\ (\zeta^{-1}a_2, r\varphi) \in \mathrm{Br}(k(\sqrt{a_1}))$
G_{19}	$(a_1, a_2) \in \mathrm{Br}(k),\ (\zeta^{-1}a_2, r\psi) \in \mathrm{Br}(k(\sqrt{a_1}))$
G_{20}	$(a_1, a_2) \in \mathrm{Br}(k),\ (\zeta^{-1}a_2, r\psi) \in \mathrm{Br}(k(\sqrt{a_1}))$
G_{21}	$(a_1, a_2) \in \mathrm{Br}(k),\ (a_2, r\alpha_1\zeta) \in \mathrm{Br}(k)$
G_{22}	$(a_1, a_2) \in \mathrm{Br}(k),\ (a_2, \zeta) \in \mathrm{Br}(k(\sqrt{a_1}))$
G_{23}	$(a_1, a_2) \in \mathrm{Br}(k),\ (a_2, \zeta) \in \mathrm{Br}(k(\sqrt{a_1}))$
G_{24}	$(a_1, a_2) \in \mathrm{Br}(k),\ (\zeta^{-1}a_2, a_1) \in \mathrm{Br}(k(\sqrt{a_3}))$
G_{25}	$(a_1, a_2) \in \mathrm{Br}(k),\ (\zeta^{-1}a_2, a_1) \in \mathrm{Br}(k(\sqrt{a_3}))$

В параграф 6.3 показваме, че разпадането на препятствията на задачите за вложимост, съответстващи на някои от тези групи води до положителен отговор на ньотеровата задача. Да припомним формулировката на ньотеровата задача.

Нека K е поле и G е крайна група. Нека G действа на рационалното функционално поле $K(x_g : g \in G)$ чрез K автоморфизми така: $g \cdot x_h = x_{gh}$ за произволни $g, h \in G$. Означаваме с $K(G)$ неподвижното подполе $K(x_g : g \in G)^G = \{f \in K(x_g : g \in G) \mid \sigma \cdot f = f, \forall \sigma \in G\}$. Ньотеровата задача тогава се състои в това дали $K(G)$ е рационално (= чисто трансцедентно) над K.

Теорема 6.3.3. ([Mi11, Theorem 5.5]) *Нека K е безкрайно поле с $char(K) \neq 2$, което съдържа примитивен корен на единицата ζ от степен 2^{n-3} за $n \geq 4$. Тогава $K(G_i)$ е рационално над K за $i = 1, 6, 7, 8, 13, 14$.*

Литература

[ИЛФ] Ишханов В. В., Лурье Б. Б., Фаддеев Д. К., ”Задача погружения в теории Галуа”, Наука, Москва, 1990; English Transl.: V. V. Ishanov, B. B. Lur'e and D. K. Faddeev, ”The embedding problem in Galois theory”, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[Як] Яковлев А. В., Задача погружения полей, *Изв. АН СССР, Сер. мат*, 1964, **150**, № 3, 645-660.

[DEK] C. Drees, M. Epkenhans, and M. Krüskemper, On the computation of the trace form of some Galois extensions, *J. Algebra* **192** (1997), no. 1, 209-234.

[Fr] A. Fröhlich, Orthogonal representations of Galois groups, Stiefel-Whitney classes and Hasse-Witt invariants, *J. Reine Angew. Math.* **360** (1985), 84-123.

[FM] A. Fröhlich and A. M. McEvett, The representations of groups by automorphisms of forms, *J. Alg.* **12** (1969), 114-133.

[FH] W. Fulton, J. Harris, ”Representation theory. A first course”, Graduate Texts in Mathematics, **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[GAP] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10; 2007. (`http://www.gap-system.org`)

[GSS] H. G. Grundman, T. L. Smith, and J. R. Swallow, Groups of order 16 as Galois groups, *Expo. Math.* **13** (1995), 289-319.

[Ha] M.Hall, ”The theory of groups”, Macmillan Company, New York, 1959.

[Ki] I. Kiming, Explicit classifications of some 2-extensions of a field of characteristic different from 2, *Cand. J. Math.* **42** (1990), 825-855.

[Le3] A. Ledet, Embedding problems and equivalence of quadratic forms, *Math. Scand.* **88** (2001), 279-302.

[MeS] A. S. Merkurjev and A. A. Suslin, K-Cohomology of Severi-Brauer Varieties and the norm residue homomorphism, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat. **46** (1982), 1011-1046; English transl. in *Math. USSR Izvestiya* **21** (1983), 307-340.

[Mi1] I. Michailov, Embedding obstructions for the dihedral, semidihedral and quaternion 2-groups, *J. Algebra* **245** (2001), 355-369.

[Mi2] I. Michailov, Embedding obstructions for the cyclic and modular 2-groups, *Math. Balk., New Series*, **21** (2007), Fasc. 1-2, 31-50.

[Mi3] I. Michailov, Four non-abelian groups of order p^4 as Galois groups, *J. Algebra* **307** (2007), 287-299.

[Mi4] I. Michailov, Induced orthogonal representations of Galois groups, *J. Algebra* **322** (2009), 3713-3732.

[Mi5] I. Michailov, On Galois cohomology and realizability of 2-groups as Galois groups, *Cent. Eur. J. Math.*, **9 (2)** (2011), 403–419.

[Mi6] I. Michailov, Exact sequences in the theory of orthogonal representations of groups, *C.R. de' l Academie bulgarie des Sciences*, **62 (9)** (2009), 1057-1062.

[Mi7] I. Michailov, Groups of order 32 as Galois groups, *Serdica Math. J.* **33 (1)** (2007), 1-34.

[Mi8] I. Michailov, Some groups of orders 8 and 16 as Galois groups over the p-adic number field, *Math. Balk., New Series*, **19** (2005), Fasc. 3-4, 367-383.

[Mi9] I. Michailov, Quaternion extensions of order 16, *Serdica Math. J.* **31 (3)** (2005), 217-228.

[Mi11] I. Michailov, Noether's problem for some groups of order $16n$, *Acta Arith.* **143** (2010), 277-290.

[Mi12] I. Michailov, On Galois cohomology and realizability of 2-groups as Galois groups II, *Cent. Eur. J. Math.*, **9 (6)** (2011), 1333–1343, DOI: 10.2478/s11533-011-0086-z.

[MZ1] I. Michailov and N.Ziapkov, Embedding obstructions for the generalized quaternion group, *J. Algebra* **226** (2000), 375-389.

[Ni] Y. Ninomiya, Finte p-groups with cyclic subgroups of index p^2, *Math. J. Okayama Univ.* **36** (1994), 1–21.

Публикации включени в дисертацията

[Mi1] I. Michailov, Embedding obstructions for the dihedral, semidihedral and quaternion 2-groups, *J. Algebra* **245** (2001), 355-369.

[Mi2] I. Michailov, Embedding obstructions for the cyclic and modular 2-groups, *Math. Balk., New Series*, **21** (2007), Fasc. 1-2, 31-50.

[Mi3] I. Michailov, Four non-abelian groups of order p^4 as Galois groups, *J. Algebra* **307** (2007), 287-299.

[Mi4] I. Michailov, Induced orthogonal representations of Galois groups, *J. Algebra* **322** (2009), 3713-3732.

[Mi5] I. Michailov, On Galois cohomology and realizability of 2-groups as Galois groups, *Cent. Eur. J. Math.*, **9 (2)** (2011), 403–419.

[Mi6] I. Michailov, Exact sequences in the theory of orthogonal representations of groups, *C.R. de' l Academie bulgarie des Sciences*, **62 (9)** (2009), 1057-1062.

[Mi7]] I. Michailov, Groups of order 32 as Galois groups, *Serdica Math. J.* **33 (1)** (2007), 1-34.

[Mi8] I. Michailov, Some groups of orders 8 and 16 as Galois groups over the p-adic number field, *Math. Balk., New Series*, **19** (2005), Fasc. 3-4, 367-383.

[Mi9] I. Michailov, Quaternion extensions of order 16, *Serdica Math. J.* **31 (3)** (2005), 217-228.

[Mi11] I. Michailov, Noether's problem for some groups of order $16n$, *Acta Arith.* **143** (2010), 277-290.

[Mi12] I. Michailov, On Galois cohomology and realizability of 2-groups as Galois groups II, *Cent. Eur. J. Math.*, **9 (6)** (2011), 1333–1343, DOI: 10.2478/s11533-011-0086-z.

[MZ1] I. Michailov and N.Ziapkov, Embedding obstructions for the generalized quaternion group, *J. Algebra* **226** (2000), 375-389.

[MZ2] I. Michailov, N. Ziapkov, Attendant embedding problems, *C.R. de' l Academie bulgarie des Sciences*, **53 (7)** (2000), 9-12.

[MZ3] I. Michailov, N. Ziapkov, On equivalent embedding problems, *C.R. de' l Academie bulgarie des Sciences*, **53 (8)** (2000), 9-12.

[MZ5] I. Michailov and N. Ziapkov, The Inverse Problem Of Galois Theory, *Proceedings of the 37th spring conference of the Union of Bulgarian Mathematicians in Borovets*, 2008, p. 17-28.