

РЕЦЕНЗИЯ

върху дисертационния труд за получаване на научната степен
“доктор на математическите науки”
по научната специалност
01.01.02 “Алгебра и теория на числата”

Автор на дисертационния труд: доц. д-р Иво Михайлов Михайлов
Тема на дисертационния труд: “Кохомологии на Галоа и реализиране на r -групи като групи на Галоа”

Рецензент: д-р Иван Делчев Чипчаков, доц. в ИМИ към БАН

I. Иво Михайлов е роден на 11.4. 1973 г. в София. Средното си образование завършва в ШМГ "Нанчо Попович" през 1991 г. Висше образование завършва през 1996 г. в ШУ "Епископ Константин Преславски" със специалност математика и получаване на магистърска степен. От края на същата година е редовен асистент по алгебра във Факултета по математика и информатика на ШУ, като от 2002 г. е главен асистент. Под научното ръководство на доц. д-р Никола Зяпков, през 2000 г. защитава дисертация на тема "2-групи като групи на Галоа", по научната специалност 01.01.02 Алгебра и теория на числата" и през 2001 г. получава образователната и научна степен "доктор". От 2007 г. Иво Михайлов е доцент в катедрата по алгебра и геометрия във ФМИ на ШУ.

II. Представеният дисертационен труд е изложен на 186 страници. Той се състои от увод, шест глави, азбучен указател и списък с литература (97 заглавия на 8 стр.). Авторефератът на дисертацията има обем от 22 страници. В него е включен списък на публикациите по дисертацията, съдържащ 16 заглавия на статии, от които 12 са самостоятелни и 4 са написани в съавторство с проф. Зяпков. Трудът е посветен на приложение на кохомологиите на Галоа в основни проблеми на теорията на Галоа. Основните приноси на Иво Михайлов са в изследването на задачата за вложимостта на крайно разширение на Галоа в случая на абелево ядро и на нейното приложение при решаване на обратната задача на теорията на Галоа за определени типове крайни r -групи над произволно поле с характеристика различна от зададено просто число p . Получените резултати имат значение за общата задача за вложимост с абелево ядро, тъй като тя, съгласно редукционните теореми на Кохендорфер, се свежда до задача за вложимост с r -групи. Получените резултати имат значение за проблема за влагане като цяло, тъй като той, съгласно редукционните теореми на Кохендорфер, се свежда до задача за вложимост с r -групи. Повечето резултати в дисертацията са получени при типичното за съвременните изследвания по кохомологии на Галоа предположение, че полето съдържа примитивен корен от единицата от степен p . Особеност на дисертацията е значителното място, отделено на случая $p = 2$.

Ограничението върху характеристиката е естествено, тъй като е известно,

че максималното p -разширение на поле E с характеристика p има група на Галоа $G(E(p)/E)$, която е свободна про- p -група. От тук става ясно, че задачата за вложимостта за разширение на Галоа F на E , съдържащо се в $E(p)$ винаги е решима, а обратната задача на Галоа за крайна p -група P има решение точно тогава, когато минималният брой пораждащи на P не надминава минималния брой пораждащи на $G(E(p)/E)$ като прокрайна група. Предположението, че полето съдържа примитивен p -ти корен от единицата е направено както по технически, така и по принципни съображения. Авторът е показал в глава 4, че когато задачата за вложимост е зададена с помощта на неразпадащо се разширение на групи, изискването за корена не ограничава общността на разглежданията. То обаче значително ги опростява, особено когато ядрото на задачата е от ред p , защото тогава, както е показал Тейт, кохомологичното препятствие за разрешимостта на задачата може да бъде представено като елемент на групата на Брауер $Br(K)$ от ред p , а по теоремата на Меркуриев-Суслин, този елемент представлява сума от класове на обобщени кватернионни (символни) K -алгебри от степен p .

III. Проблематиката на дисертацията в случая на циклични p -групи по същество съвпада с изследването на т.н. височини на цикличните p -разширения. Благодарение на класическа теорема на Алберт и на нейни обобщения, намерени от Файн, Солтмън и Шахер в съвместна статия от 1988 г., тази задача има удовлетворително решение, когато $p > 2$ или основното поле съдържа квадратен корен от -1 . Като следствие от теоремата на Алберт се получава характеризацията на Ферма на естествените числа, които са представими като суми на два целочислени квадрата. Задачата за височините е тясно свързана с изследването на групите от непрекъснати характерни на абсолютните групи на Галоа и води до пълното им описание в редица важни частни случаи. Това дава възможност да се стигне до значими резултати в алгебричната теория на числата, в теорията на наредените полета и при изучаването на централните прости алгебри и групите на Брауер. Достатъчно е да споменем доказателството на Шафаревич на теоремата на Кронекер-Вебер, описанието на групите на Галоа на максималните p -разширения на локалните полета (свързано с имената на Шевале, Шафаревич и Дьомушкин), теоремата на Вит за групата на Брауер на пълно дискретно нормирано поле, критерия на Меркуриев за съществуване на делима ненулева подгрупа на групата на Брауер, характеризацията на т.н. питагорови полета (Алберт) и описанието на Бекер на абсолютните групи на Галоа на наследствено питагоровите полета.

В общия си вид, задачата за вложимостта е както обобщение на обратната задача на теорията на Галоа, така и важно средство за нейното решаване. Основните предимства на този подход към обратната задача са на широката му приложимост и добрата му съгласуваност с познанията ни за спецификата на разглежданите полета. Най-важният резултат, получен по този път, е доказателството на теоремата на Шафаревич за реализируемостта на всяка крайна разрешима група като група на Галоа над полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$. Заслужава си да се напомни, че групите от нечетен ред са разрешими, като за тях теоремата има съдържателен аритметичен вариант, установен от

Нойкирх. През последните три десетилетия бяха разработени обещаващи алтернативни методи за решаване на обратната задача над Q , опиращи се на теоремата за неразложимост на Хилберт. Тези методи дават възможност да бъде определена структурата на абсолютната група на Галоа над полета K от рационални функции от една променлива над т.н. обилни полета (каквито се оказват полетата от частни на хензелевите пръстени и псевдо алгебрически затворените полета). Полученият резултат доказва, че всяка крайна група се реализира като група на Галоа над K . В тези рамки е намерена аналогична реализация над Q за редица крайни прости групи, но все още не е получено доказателство на теоремата на Шафаревич. Всичко това показва, че задачата за вложимост продължава да бъде в основата на едни от най-надеждните подходи към обратната задача на теорията на Галоа над Q .

IV. Ще се спра кратко върху съдържанието на дисертацията:

Уводът на дисертацията съдържа постановка на обратната задача на теорията на Галоа. Задачата се състои от две части – съществуване на реализация на дадена крайна група като група на Галоа и, при положителен отговор, задаване на реализация на групата с помощта на явна конструкция. Разглеждат се и въпроси за реализацията на определени групи като групи на Галоа, при условие, че дадена крайна група притежава такава реализация. В увода се съдържат формулировки на някои от най-важните резултати, отнасящи се до обратната задача над Q . Освен това се напомня връзката между тази задача и Нютеровата задача при основно поле Q . Представен е и обзор с резултати, отнасящи се до обратната задача над произволно поле, включително, на основните приноси на разглежданата дисертация в това направление.

Глава 1 въвежда читателя в постановката и принципа на решаване на задачата за вложимост $(K/k, G, A)$ с абелево ядро. Въведени са понятията слаба разрешимост (решението е алгебра на Галоа над k) и подходяща разрешимост (решението е разширение на Галоа на k). Изложен е кохомологичния подход на Яковлев към задачата за вложимост с абелево ядро: формулирано е общото необходимо и достатъчно условие за слаба разрешимост; описани са двете (кохомологични) препятствия за слаба разрешимост; формулирани са съпътстващите задачи от първи и втори тип, както и съвместните резултати на Зяпков и дисертанта за връзките между техните препятствия и препятствията на изходната задача. Като приложение е дадено кратко доказателство на втората редукционна теорема на Кохендорфер. Намерени са и нови критерии, които свеждат решаването на задачи за вложимост със специфично абелево или циклично ядро към решаването на техни съпътстващи задачи.

В глава 2 се излагат кохомологични критерии за разрешимост на задачата за вложимост с ядро от прост ред p , публикувани в пет самостоятелни статии на дисертанта, излезли през периода от 2007 г. до 2011 г. Когато p е

произволно, тези критерии позволяват точно и в явен вид да бъдат пресметнати препятствията за разрешимост на редица задачи за вложимост, зададени с помощта на централни разширения на r -групи. В случая $r = 2$ са изложени и два специални метода за решаване на задачата за вложимост. Първият използва квадратичното коограничение и значително разширява кръга от задачи за вложимост за 2-групи, чиито препятствия могат да бъдат пресметнати. Вторият подход се опира на теорията на ортогоналните представяния на крайни групи, както и на представимостта на специалната ортогонална и на ортогоналната група като двойни покрития съответно на спинорната подгрупа на групата на Клифорд и на ядрото на спинорната норма, дефинирана в групата на Клифорд на квадратично пространство (V, q) .

Глава 3 е посветена на препятствията за реализиране на 2-групи от малки редове като групи на Галоа, като основните резултати съдържат тяхно описание за групи от ред 32. Въпросът за групи от редове, делящи 16, е разгледан изчерпателно в защитената през 2000 г. дисертация на Иво Михайлов, за което той е придобил образователната и научна степен “доктор”. Ето защо описанието на препятствията за реализируемост на групите от ред 32 представлява естествена цел на провежданите от него изследвания. Трудността на задачата е свързана с факта, че неизоморфните групи от ред 32 са 51 и само в 18 случая изследването им се свежда непосредствено до групи от по-малки редове. За получаването на пълно решение се оказва необходимо да разполагаме с пълното описание на разширенията на Галоа, реализиращи групите от ред 16. Авторът се опира на изследвания на Ледет, публикувани през 2001 г., които до голяма степен решават този проблем. Това се постига в случаите, когато описанието е произведение на два кватернионни класа. Пълно описание обаче се оказва невъзможно за кватернионната група от ред 16, без налагане на ограничения върху основното поле. В дисертацията са намерени редица частни случаи, в които такова описание е възможно. Такъв е случая, когато разглежданията са над локално поле. Върху тази основа са получени и резултатите за групи от ред 32, довели до пълното описание на препятствията за тяхната реализируемост като групи на Галоа. Доказателството се разклонява на немалко частни случаи, в зависимост от хомоморфните образи на разглежданите групи. Предвид важността на този резултат, смятам, че дисертантът трябваше да положи допълнителни грижи за неговото представяне, като за улеснение на читателя посочи на едно определено място всички случаи, чието доказателство се разглежда в дисертацията.

В глава 4 са пресметнати препятствията за реализирането на редица r -групи като групи на Галоа. Описани са и разширенията на Галоа, които реализират тези групи. Най-важните резултати в тази глава представляват задълбочено изследване на модулърната група $M(r^n)$, за произволно просто r и за $n \geq 3$.

В глава 5 са определени препятствията на задачите за вложимост с циклично ядро от ред 2^n за неабеловите групи от ред $8 \cdot 2^n$ ($n \geq 1$), притежаващи

циклична максимална подгрупа, при предположение, че основното поле съдържа елементи от определен вид. При $n = 2$, това условие винаги е изпълнено, което облекчава изследването на групите от ред 32 в глава 3. Получените резултати разширяват и усилват описанието на препятствията за реализирането като групи на Галоа на диедралната и на кватернионната групи от зададения ред.

Глава 6 съдържа необходими и достатъчни условия за реализиране като групи на Галоа на неабелеви групи от ред 2^n , притежаващи циклична подгрупа от индекс 4. Предполага се, че $n \geq 4$ и основното поле съдържа примитивен корен от единицата от степен $2^{n/8}$. Получените резултати съществено използват класификацията на Ниномия на разглежданите групи, които не притежават циклична максимална подгрупа.

Авторефератът и авторската справка правилно отразяват основните приноси на публикациите, включени в дисертацията.

V. Дисертантът е много добре информиран за литературата в областта на неговите научни интереси и активно се стреми към своевременно придобиване на интересувашата го информация. Това се вижда от съдържащия 97 заглавия списък на литературата в дисертацията (над 80% от източниците са статии). По тази причина за мене е необяснимо отсъствието от списъка литература на статията “Задача погряжения ...” на Дьомушкин и Шафаревич, публикувана през 1959 г. в том 23 от математическата серия на Известия АН СССР.

VI. По-голямата част от включените в дисертационния труд резултати са лично дело на дисертанта и са постигнати при много висока стартова база и в условията на силна конкуренция. Тези резултати са публикувани през периода 2000-2011 г. в 15 статии. Три от съвместните работи с Никола Зяпков са излезли от печат през 2000 г., а четвъртата – през 2008 г. Приемам за тези публикации равноправно участие на съавторите. Последната до момента съвместна работа е публикувана в материалите на Пролетната конференция на СМБ, а останалите работи са намерили място на страниците на престижни международни и наши математически списания (J. Algebra – 4, Acta Arith. – 1, Centr. Eur. J. Math. – 2, „Доклади на БАН” – 3; Serdica Math. J. – 2, Math. Balk. – 2). Общият импакт фактор на статиите е 3.397. Резултатите са докладвани на редица конференции и семинари у нас.

VII. Общият импакт-фактор на публикациите, включени в дисертацията на Иво Михайлов е 3.397. Кандидатът е представил списък от 24 цитирания на свои резултати в трудове на други математици. От тях 2 цитата са в монографията “Brauer Type Embedding Problems” на Арне Ледет, един от основателите на съвременния кохомологичен подход към задачата за вложимост. Девет цитата са в статии и обзори на чуждестранни математици, а 13 са в статии на проф. Зяпков. Всички цитати са положителни. В редица случаи цитираните работи се използват по същество.

VIII. Към отбелязаните по-горе критични бележки, ще добавя, че под теорема на Кронекер-Вебер, дисертантът разбира не стандартната и формулировка, а неин разширен вариант с твърдението за разрешимост над $\mathbb{Q}$ на обратната задача на теорията на Галоа за крайни абелеви групи. Освен това, теоремата на Кронекер-Вебер не е доказана в началото, а в края на 19-ти век. Отбелязаните недостатъци са лесно отстраними, не са съществени и не променят общото ми отлично впечатление от дисертацията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Считаю, че представеният труд “Кохомологии на Галоа и реализиране на p -групи като групи на Галоа” на дисертанта доц. д-р Иво Михайлов Михайлов е на много добро професионално ниво и съдържа задълбочени и завършени изследвания в областта на задачата за вложимостта и обратната задача на теорията на Галоа. Част от резултатите имат окончателен характер, а някои резултати, методи и идеи могат да се използват от други автори в изследвания от подобен характер. Това ми дава всички основания да смятам, че приносите са достатъчни за даване на научната степен “доктор на математическите науки” по научната специалност 01.01.02 “Алгебра и теория на числата”.

ПРЕПОРЪЧВАМ на Уважаемото жури да присъди на доц. д-р Иво Михайлов Михайлов научната степен “доктор на математическите науки” по научната специалност 01.01.02 “Алгебра и теория на числата”.

София, 07.01. 2012 г.

Рецензент:

(доц. д-р И. Чипчаков)