

РЕЦЕНЗИЯ

от член-кор. д.м.н. Веселин Стоянов Дренски, професор в ИМИ при БАН
за дисертационния труд
„Кохомологии на Галоа и реализиране на p -групи като групи на Галоа”
на доц. д-р Иво Михайлов Михайлов
от Шуменския университет „Епископ Константин Преславски”,
представена за придобиване на научната степен „доктор на науките”,
област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика,
научна специалност 01.01.02 „Алгебра и теория на числата”

Представеният дисертационен труд се състои от увод и шест глави и е изложен на 186 страници, от които 173 стр. основен текст, 8 стр. списък от 97 заглавия литература, а останалите 5 стр. са заглавната страница, съдържанието и азбучният указател.

Трудът е посветен на проблеми, свързани с обратната задача на теорията на Галоа. Скоро след като идеята на Галоа за изучаване на алгебричните уравнения и съответните разширения на полета с методи на теория на групите достига до математическата общност, възниква естествената задача за това кои крайни групи се реализират като групи на Галоа над дадено поле. Най-атрактивна е класическата обратна задача на теорията на Галоа, която се отнася за полето на рационалните числа, а днес тази задача се изучава за произволни полета. Класическата обратна задача е решена положително за важни класове от крайни групи, най-известните от които са разрешимите групи (Шафаревич, 1954 г., с последващи корекции за 2-групи), някои от сериите прости групи, 25 от 26-те спорадични прости групи. (За най-голямата от тях, „Монстър”, от ред, който се записва с 54 цифри, това е доказано от Джон Томпсън, 1984 г., а единствената спорадична проста група, за която не е известно дали е група на Галоа над $\mathbb{Q}$, е групата на Матьо M_{23} от ред „само” 10.200.960.) Голяма част от получените резултати са за съществуване, т.е. не дават отговор на въпроса как се реализира съответната група. В това направление са работили редица известни математици, като Хилберт, Шур и др. Има редица други задачи над специални полета (например полета от рационални функции на няколко променливи), от положителното решение на които би следвало решението на класическата задача, като регулярната задача и задачата на Еми Ньотер за рационалността на полето от инвариантни рационални функции относно действието на транзитивна подгрупа на съответната симетрична група. При обратната задача на теорията на Галоа над произволно поле k се появяват някои особености, които налагат допълнителни условия, зависещи от конкретната група G . Много често резултатите зависят от характеристиката на полето и от наличието на примитивни корени на единицата или на други специфични елементи. Ако A е нормален делител на G , то реализирането на G/A като група на Галоа над полето k е необходимо условие за реализирането на G . Така възниква задачата за вложимост с ядро A ,

която, свободно формулирана, пита дали дадена реализация на G/A като група на Галоа може да се повдигне до реализация на самата G .

Темата на дисертацията демонстрира една приемственост между поколенията. Проф. Анатолий Яковлев, който е „дядо“ на дисертанта по научна линия (т.е. научен ръководител на неговия научен ръководител проф. Никола Зяпков) предлага да се разглежда малко по-обща задача, задачата за вложимост в алгебри на Галоа, вместо в полета на Галоа. Това позволява да се привлекат кохомологични методи. Тази идея се доразвива в дисертационния труд и се прилага в редица конкретни случаи. Това показва и стремеж за решаване на задачи, върху които са работили известни математици, а в резултат и подобряване или даване на нови доказателства на важни резултати.

По естествен начин в резултат на прилагането на кохомологични методи се появяват два вида препятствия (определени елементи на втората и първата кохомологични групи). Тяхното разпадане (т.е. тривиалност като кохомологични класове) дава съответно необходимо и достатъчно условие за разрешимост на задачата за влагане. Разпадането на първото от двете препятствия съответства на класическото условие за съгласуване на Фадеев и Хасе. Естествено се появяват и т.н. съпътстващи задачи, решението на които следва от решението на оригиналната задача за вложимост, а в много случаи свеждат задачата за вложимост до аналогични задачи за по-просто устроени групи. Изучават се и т.н. автоматични реализации, когато от реализацията на една група над дадено поле следва реализацията на друга група над същото поле. Тъй като явното пресмятане на второто препятствие в общия случай е изключително трудна задача, в повечето от конкретните случаи в дисертацията се предполага, че препятствието се разпада.

В първата глава на дисертацията се излага кохомологичният метод на Яковлев за вложимост с абелево ядро и неговото усилване от дисертанта. Намира се връзка между препятствията на разглежданата задача и съпътстващите задачи от първи и втори тип. Освен нови резултати, са получени и нови доказателства на известни теореми, в частност теоремите на Кохендорфер, която свежда задачата за вложимост към еквивалентни задачи за групово p -разширение. Поради тази причина, по-нататък в дисертацията се разглеждат предимно задачи за вложимост, касаещи p -групи. Правят се приложения на разработените методи за брауеровата задача с циклично ядро и и връзката ѝ със задачата за влагане с циклично 2-ядро.

Във втората глава се дават кохомологични критерии за задачата за вложимост в ядро от прост ред. Тези критерии позволяват пресмятане на препятствието на задачи за вложимост за p -групи със специфични фактор групи. Пресметнатите препятствия се задават във вид на произведение на обобщени кватернионни алгебри в групата на Брауер. При доказателствата се използва комбинация от няколко различни техники, включително от кохомологиите на Галоа, от теорията на централните прости алгебри и ортогоналните представяния на групите.

В третата глава са пресмятат препятствията за реализиране на 2-групи от ред 8, 16 и 32 като групи на Галоа. Описанието на повечето от разширенията с група на Галоа от ред 16 е известно (или може да се получи) от известни резултати за препятствия, които са произведения на два кватернионни класа. Кватернионната група от ред 16 прави изключение, защото има препятствие, което е произведение на три кватернионни класа. Дисертантът дава редица частни случаи на разширения с група на Галоа кватернионната група от ред 16. Според мене, основният резултат на главата е описанието на препятствията за групите от ред 32. За част от групите това е направено от други автори. Дадени са и явни конструкции на разширения на полета за някои от тези групи. Единствената ми забележка тук е, че в изложението не успях да намеря информация за две от групите – с номера 11 и 15 от списъка на GAP. Всъщност тази информация се съдържа в последната глава на дисертацията, защото тези две групи имат циклична подгрупа от индекс 4.

В четвъртата глава се пресмятат препятствията на редица p -групи и се описват съответните разширения на Галоа. Най-напред се разглежда реализацията на двете неабелеви групи от ред p^3 и на четири от 10-те неабелеви групи от ред p^4 . Основните резултати се отнасят за реализирането на модулярната p -група като група на Галоа и свързаните с това задачи за вложимост. При нечетно p тази група се характеризира със свойството, че е единствената неабелева p -група с циклична подгрупа от индекс p .

В петата глава се изучават препятствията за реализиране на четирите неабелеви 2-групи с циклична подгрупа от индекс 2 (диедралната, полудиедралната, кватернионната и модулярната групи), както и разширенията на Галоа, реализиращи модулярната 2-група.

Последната, шеста глава е посветена на препятствията за реализиране на неабелевите 2-групи с циклична подгрупа от индекс 4. Става въпрос за 25 серии и една група от ред 32. Накрая се предлага един нов подход към нютеровата задача, който наподобява обобщението на обратната задача в теорията на Галоа – задачата за вложимост на полета. Дават се интересни приложения на теорията на препятствията при решаване на нютеровата задача. В частност, дава се положителен отговор за някои от групите, разглеждани в главата.

Авторът е извършил голяма по обем работа, част от която остава скрита за читателя. Прави добро впечатление арсеналът от използваните в дисертацията (или създадените в нея) методи, умело комбинирани с конкретни пресмятания. Дисертантът е много добре информиран за литературата, както в областта на неговите научни интереси, така и в по-широки области на алгебрата.

Забелязал съм само дребни и не особено съществени неточности. Например, в увода се твърди, че теоремата на Кронекер-Вебер е от първата половина на XIX век, а публикациите на Кронекер и Вебер са съответно от 1853 и 1886 г. Освен това, обикновено

в литературата се счита, че теоремата включва само описанието на абелевите разширения на $\mathbb{Q}$ като подполета на циклотомични полета, но не и твърдението за реализацията на всички крайни абелеви групи като групи на Галоа, както е в дисертацията. Дисертацията е написана с грижа за квалифицирания читател – алгебрист. Ясно е указано състоянието на проблемите преди работите на автора и неговите заслуги към проблематиката. Известен недостатък на дисертацията е, че тя представлява трудно четиво за математици – неспециалисти в областта, но със стандартни знания по алгебра на ниво спецкурс от университетската магистърска програма. Това силно ограничава кръга на български-говорящите читатели. Известни затруднения ми създаде и номерацията на литературата с инициалите на фамилиите на авторите, вместо традиционното номериране с последователни числа (наложи ми се да преброя ръчно списъка на литературата), както и нареждането ѝ по азбучния ред на инициалите, а не на фамилиите. Всички дадени по-горе критични забележки не са съществени за оценката на дисертационния труд и не влияят на положителното ми мнение за него.

Основните резултати на дисертационния труд представляват лично дело на дисертанта или са получени в съавторство с неговия научен ръководител. Резултатите са публикувани през периода 2000-2011 год. в 11 самостоятелни и 4 съвместни статии, всички в рецензирани издания: 4 в J. Algebra, 2 в Centr. Eur. J. Math., 1 в Acta Arithm., 1 в Доклади на БАН, 2 в Math. Balk., 2 в Serdica Math. J., 1 като доклад по покана в Трудовете на Пролетната конференция на СМБ. Общият импакт фактор на първите 8 статии е 4.159. Публикациите по дисертационния труд удовлетворяват формалните критерии от Правилника за прилагане на ЗРАСРБ на ИМИ за научната степен „доктор” в областта на математиката: (поне 10 публикации в рецензирани издания, като поне 5 от тях да са в списания с импакт фактор и поне 3 от десетте да са самостоятелни и поне 20 цитирания, от които поне 5 да са в списания с импакт фактор или в монографии на реномирани издания). Дисертантът е приложил списък от 24 цитата на 8 от своите трудове в работи на други автори, от които 2 в монография на Филцовия институт в Канада (издание на AMS), 5 в статии в авторитетни списания, 4 в препринти в arXiv и 13 в две статии в Доклади на БАН на научния ръководител на дисертанта. В част от чуждите публикации се вижда, че резултатите на дисертанта имат съществено стимулиращо значение за появяване на съответната публикация. Прави приятно впечатление, че 7 от 11-те цитата в чужбина са на статии, публикувани в списания, издавани в България и по-трудно достъпни за чуждестранните математици. Освен това, с изключение на 2-та цитата в монография от 2005 г., всички цитати са от последните три години. Като се има предвид, че само една от цитираните статии е публикувана преди 2007 г., очаквам скромната бройка от 11 чужди цитата да се увеличи съществено в най-скоро време.

Резултатите са докладвани на конференции и семинари у нас, включително в доклад по покана на Пролетна конференция на СМБ.

Авторефератът и авторската справка са направени съгласно изискванията и правилно отразяват основните научни приноси на дисертационния труд. Практиката показва, че обикновено широката математическа публика се запознава с автореферата, а не с дисертацията. Поради тази причина, би било добре, ако авторефератът съдържа част от историческите бележки от уводната част на дисертацията. Това би спомогнало за по-точното оценяване на мястото на изследванията от дисертационния труд сред другите изследвания в областта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Считам, че представеният труд „Кохомологии на Галоа и реализиране на p -групи като групи на Галоа” на доц. д-р Иво Михайлов Михайлов е на много добро професионално ниво и съдържа задълбочени и завършени изследвания в областта на алгебрата. Голяма част от резултатите имат окончателен характер, а някои резултати, методи и идеи могат да се използват и вече са използвани от други автори в изследвания от подобен характер. Това ми дава всички основания да смятам, че дисертационният труд отговаря на съвкупността от критерии и показатели за придобиването на научната степен „доктор” съгласно ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за прилагане на ЗРАСРБ на БАН и ИМИ, а приносите са напълно достатъчни за даване на научната степен “доктор на науките” по научната специалност “Алгебра и теория на числата”.

ПРЕПОРЪЧВАМ на Уважаемото Научно жури да присъди на доц. д-р Иво Михайлов Михайлов научната степен “доктор на науките” в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, научна специалност 01.01.02 „Алгебра и теория на числата”.

София, 13 януари 2012 г.

Рецензент:

(чл. кор. дмн В. Дренски)