

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. д-р Стоил Василев Миховски

Относно: Защита на дисертация на доц. д-р Иво Михайлов Михайлов на тема *„Кохомологии на Галоа и реализиране на p -групи като групи на Галоа”* за придобиване на научната степен *„доктор на математическите науки”* по научната специалност 01.01.02 – Алгебра и теория на числата

Доц. д-р Иво Михайлов Михайлов е преподавател по алгебра в катедра „Алгебра и геометрия” на Факултета по математика и информатика в Шуменския университет „Епископ Константин Преславски”. Представената от него дисертация е посветена на обратната задача в теорията на Галоа за реализацията на крайни групи като групи на Галоа над дадено поле k . По-точно, ако G е дадена крайна група и k е поле, то *първата част на задачата* е да се определи дали съществува разширение на Галоа K/k , за което групата $Gal(K/k)$ е изоморфна на G . *Втората част на задачата* е да се конструират в явен вид разширенията K/k или да се намерят полиноми над k , за които G е тяхната група на Галоа. Класическата обратна задача в теорията на Галоа е всъщност случаят, когато K е полето на рационалните числа. Обратната задача е частен случай на една по-обща задача в теорията на Галоа, а именно задачата за вложимост на полета. През 1964 г. А. В. Яковлев, като прилага апарата на хомологичната алгебра, намира необходимо и достатъчно условие за решимост на произволна задача за вложимост с абелево ядро. По-късно и други автори прилагат този апарат във връзка със задачата за вложимост и някои нейни приложения (Башмаков, Ишханов, Лурье, Зяпков и др.). В дисертацията си Иво Михайлов опростява, доразвива тези кохомологични методи и прави техни съществени приложения. Освен това, Иво Михайлов изучава реализацията на някои крайни p -групи като групи на Галоа над различни полета.

Намирането на необходими и достатъчни условия за реализирането на крайни p -групи като групи на Галоа над произволно поле е един от актуалните проблеми на алгебрата през последните две десетилетия. Тези условия най-често зависят от свойствата на определени кохомологични класове. Резултати относно реализирането на групи от редове 4 и 8 се срещат в много стари публикации. Едва през 90-те години на 20-ти век е осъществен първият по-значим напредък за групи от ред 16. Следващата стъпка се отнася за някои групи от ред 32. Резултатите относно реализацията на произволни

p -групи като групи на Галоа са значително по-малко. Известните приноси в това направление обикновено дават необходимите условия за реализирането на групите от ред p^3 и на някои други специфични p -групи. Затова приносите на настоящата дисертация имат важно значение за алгебрата.

Дисертацията се състои от 186 печатни страници, които включват увод, 6 глави, приложение за групи от ред 32, литература от 97 заглавия и азбучен указател.

В уводната част на дисертацията се прави кратък преглед на постигнатите резултати в разглежданото направление и се посочват някои варианти и обобщения на посочената задача като регулярната обратна задача, задачата на Еми Ньотер, задачата за вложимост, обобщения за произволно поле и т.н. Посочват се и различни известни подходи за решаване на тези задачи. При този преглед са отбелязани и основните приноси на автора в развитието на разглежданата научна теория. Накрая се прави и кратък преглед по глави на отделните части на дисертацията.

Съществена роля в дисертацията има Глава 1. В нея е изложена същността на въведеният през 1964 г. от А. В. Яковлев кохомологичен подход, който през 2000 г. е доразвит от И. Михайлов и Н. Зяпков. Резултатите от тази глава се използват в следващите глави за получаване на останалите научни резултати. За тяхното представяне тук накратко ще формулирам само задачата за вложимост.

Нека F е групата на Галоа на разширението K/k . Ако α е хомоморфизъм на групата G върху групата F , то задачата за вложимост се състои в намирането на разширение L/K , на което групата на Галоа над подполето k е G и ограничението върху K на всеки елемент g от G съвпада с автоморфизма $\alpha(g)$. Ако A е ядрото на хомоморфизма α , то формулираната задача се записва с означението $(K/k, G, A)$. Когато разширението L/k е нормално, тогава се говори за *подходяща разрешимост* на задачата за вложимост, а когато решението е алгебра на Галоа, тогава говорим за нейната *слаба разрешимост*. Методът на Яковлев се състои в поставянето и решаването на тези задачи с методите на хомологичната алгебра. Важна роля при използването на този метод играят дефинираните *първо и второ препятствие* (вж. стр. 16) като елементи съответно на втора и първа група от кохомологии, а така също и формулираните *съпътстваща задача от първи тип* $(K/k, G_1, A_1)$ и *съпътстваща задача от втори тип* $(K/k_1, G_1, A)$ на задачата $(K/k, G, A)$, където k_1 е неподвижното подполе на K спрямо някоя подгрупа на групата $F = \text{Gal}(K/k)$, A_1 е F -хомоморфен образ на A и фактор-групата G_1/A_1 е изоморфна на F (вж. стр. 20 и стр. 23). Тези понятия са разглеждани и от други автори. Оказва се, че анулирането на първото и второто препятствие е необходимо и достатъчно условие за решимост на задачата за вложимост, а съпътстващите задачи позволяват нейното решаване да се сведе до задачи

при по-благоприятни условия. Тъй като намирането на второто препятствие според автора е „непосилна задача”, то в дисертацията главно се разглеждат задачи, в които второто препятствие се разпада. Основните приноси в параграфите 1.2, 1.3 и 1.4 на тази глава са намерените връзки в Теорема 1.3.1 и Теорема 1.4.1 между препятствията, съпътстващите задачи и задачата $(K/k, G, A)$, както и краткото доказателство на една теорема на Кохендорфер (вж. Теорема 1.4.2). Тази теорема, заедно с една друга теорема на Кохендорфер, позволяват задачата за вложимост с абелево ядро да се сведе до задача за вложимост, в която участват само p -групи. Ето защо проблемът за вложимост с p -групи е от особена важност. По-нататък в следващите параграфи 1.5 и 1.6 на същата глава, като приложение на предните параграфи, са разгледани някои критерии за решимост на задачата $(K/k, G, A)$ при известни условия за k, K, A и G . За задачата $(K/k, G, A)$ се казва, че удовлетворява *условието за съгласуваност*, ако кръстосаният групов пръстен $G \times K$ е матричен пръстен от ред $|G/A|$ над собствена подалгебра. Известно е, че това условие е еквивалентно с условието за разпадане на първото препятствие. В § 1.5 е показано, че в редица случаи условието за съгласуваност е необходимо и достатъчно за решимост на съответната задача. В § 1.6 са намерени необходими и достатъчни условия за решимост, когато A е циклична група от ред 2^n и K съдържа примитивен 2^n -ти корен на единицата. Тези резултати позволяват определени задачи за решимост да се свеждат до решаването на две *брауерови задачи* (вж. стр. 25) с по-малки групи. Като най-значими резултати в тази глава могат да бъдат посочени Теорема 1.5.2, Следствие 1.6.2 и Следствие 1.6.3.

Теоретични кохомологични критерии за решимост при циклично ядро A от прост ред се разглеждат и в следващата Глава 2, като тук е привлечен и допълнителен апарат от други части на алгебрата, като централно прости алгебри и кохомологии на Галоа. Така в § 2.2 са доказани няколко критерия за намиране на препятствията на задачи над полета с крайни характеристики и p -групи, които притежават специфични фактор-групи. В § 2.3 се разглежда метод, който използва квадратични рестрикции и по този начин се получават критерии за слаба разрешимост на задачи за вложимост, а така също и методи за намиране на препятствията на задачи със значително по-широк кръг от p -групи. В следващите параграфи 2.4, 2.5 и 2.6 се използва теорията на ортогоналните представяния на групи, който е един съвременен и активно разработван метод от редица автори. По мнение на автора, тези резултати могат да се използват също и в други области на математиката, където се използват алгебри и групи на Клифорд. Тук най-значими са Теорема 2.2.1, Теорема 2.2.4, Теорема 2.3.8, Теорема 2.5.2 и Теорема 2.6.1.

Докато в първите две глави се разглеждат задачи за вложимост $(K/k, G, A)$ с ограничения преди всичко за ядрата A , то в следващите четири глави такива задачи се изучават за по-специални класове от групи G .

Всъщност по този начин са получени най-съдържателните конкретни резултати на дисертацията. Така Глава 3 е посветена на 2-групи от ред 8, 16 и 32 над поле с характеристика $p \neq 2$. Тук са посочени редица нови критерии за решимост на задачите за вложимост на тези групи, пресметнати са препятствията на всички неабелеви групи от ред 32 и са построени в явен вид разширенията на Галоа, които реализират някои групи от ред 16 и 32. За получаването на тези резултати са преодоляни много трудности. Като най-важен резултат тук ще посоча Теорема 3.2.12.

В Глава 4 се пресмятат препятствията за реализацията на p -групи от ред p^n . Дадено е описание на разширенията на Галоа, които реализират тези p -групи. По-специално внимание е отделено на неабелевите групи от ред p^3 , на четири неабелеви групи от ред p^4 и на още няколко серии от p -групи, които са близки по строеж до модулярната p -група $M(p^n)$ от ред p^n ($n \geq 3$) (вж. стр. 115). Най-важните резултати се отнасят за групата $M(p^n)$, които в явен вид посочват реализиращите я разширения на Галоа. Тази глава съдържа най-много съществени резултати. Такива са теоремите 4.2.1 – 4.2.5, Теорема 4.3.2, Теорема 4.3.12, а така също и теоремите 4.3.15 – 4.3.17.

В Глава 5 отново се изучават 2-групи, но тук те са от по-висок ред 2^{n+3} ($n > 1$). Пресметнати са препятствията на задачите за вложимост с циклично ядро от ред 2^n за четири такива групи над поле с характеристика $p \neq 2$, което съдържа примитивен 2^n -ти корен на единицата, удовлетворяващ някои допълнителни условия. Освен това е намерено явно описание на разширенията на Галоа, които реализират модулярната група от ред 2^{n+3} при предположение, че примитивен корен на единицата от степен 2^{n+3} се съдържа в квадратично разширение на основното поле. Като най-важен от тях може да бъде посочена Теорема 5.2.2.

Накрая, в Глава 6 се изучават препятствия за реализиране на неабелеви 2-групи от ред 2^n , които притежават циклични подгрупи с индекс 4, но не притежават подгрупи с индекс 2. Известно е, че тези групи са 26 на брой и са описани от Ниномия през 1994 г. Тук са пресметнати препятствията за реализиране на посочените групи над произволно поле, което съдържа примитивен корен на единицата от степен 2^{n-2} при $n > 4$. Като приложение на получените резултати е показано, че разпадането на препятствията на задачите за вложимост в редица случаи дава положителен отговор на нъотеровата задача. Тези резултати частично са публикувани, като най-съществени от тях са Теорема 6.2.1 и Теорема 6.3.3.

Описаното разпределение на материала е целесъобразно. Изложението е стегнато и логично. Не съм забелязал погрешни разсъждения. Критичните бележки, които бих могъл да направя, имат по-скоро технически характер. Забелязаните неволни правописни грешки са характерни за всеки по-обширен текст. При формулировката на някои теореми част от условията се

пропускат, понеже те са заложили в началото на съответния параграф или глава. Би било по-добре, ако на някои места изложението беше по-подробно с повече обяснения и напомняне на въведените вече понятия и определения. Това би направило четенето по-лесно за по-широк кръг от читатели. Може би това е една от целите при писането на дисертациите.

Основните резултати на автора са публикувани през периода от 2000 г. до 2011 г. в 6 периодични и реферирани списания както следва: 4 статии в списание *Journal of Algebra*, 3 – в Доклади на БАН, по 2 – в *Mathematica Balkanica (New Series)*, *Central European Journal of Mathematics* и *Serdica Mathematical Journal* и по 1 - в *Acta Arithmetica* и *Proceedings of the 37th spring conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*. От тези общо 15 статии 11 са самостоятелни и 4 са със съавтор Н. Зяпков. Всички са публикувани на английски език. Общият IF на 8 от представените статии е около 4,159.

Авторът на дисертацията е дал сведение за 24 цитирания на резултати от 8 негови статии. Публикациите, в които са направени тези цитирания, са в *J. Algebra*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *Cent. Eur. Math. J.*, монография на Arne Ledet “Brauer Type Embedding Problems”, издадена от *Amer. Math. Soc.*, Доклади на БАН и някои електронни носители. Следва да се отбележи, че цитирането на отделните приноси не е формално, а в някои случаи напълно са приведени и самите резултати. Въпреки, че статиите са публикувани в авторитетни списания, относително неголемият брой на цитиранията според мен се дължи на факта, че изследванията на Иво Михайлов са в една доста трудна област и в нея работят сравнително по-малък брой специалисти.

Приносите в дисертацията са докладвани от автора пред общо 7 местни, национални и международни конференции в Шумен, София и Боровец.

Авторефератът дава вярна и пълна представа за приносите на дисертацията. Авторската справка също е точна и напълно приемам претенциите на автора за неговите научни приноси.

Считам, че представената дисертация напълно отговаря на всички изискванията на ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за прилагане на ЗРАСРБ на БАН и Института по математика и информатика.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Важна отличителна черта на дисертацията е същественото доразвиване на кохомологичния подход към задачата за вложимост с абелево ядро, чиито основи са положени от А. Б. Яковлев. Това е дало възможност да се намерят нови кратки доказателства на редица известни факти. По такъв начин е намерена и връзката между препятствията на дадена задача за вложимост и нейните съпътстващи задачи за решимост. Доказани са теореми, според които разпадането на първото препятствие на определени задачи с абелево ядро е необходимо и достатъчно условие за тяхната решимост. Доказано е, че

решаването на определени задачи с циклично ядро от ред 2^n се свежда до решаване на две брауерови задачи с по-малки групи. Получени са множество нови теоретични кохомологични критерии за решимост на задачи с циклично ядро от прост ред във вид на произведение на кватернионни алгебри в групата на Брауер, като за целта са използвани методи и получени от автора нови резултати в други области на алгебрата. Направено е съществено приложение на получените критерии за решаване на много открити проблеми в изучаваната област за крайни 2 -групи и p -групи при произволно p над различни полета. На всичко това аз давам висока оценка.

Уверено предлагам на доц. д-р Иво Михайлов Михайлов да бъде присъдена научната степен „доктор на математическите науки” по научната специалност 01.01.02 – Алгебра и теория на числата.

12.01.2012 г.
Пловдив

Рецензент:

(Проф. д-р Ст. Миховски)