

## РЕЦЕНЗИЯ

по процедура за защита на дисертационен труд на тема:  
**”Функции холоморфни над крайномерни комплексни комутативни асоциативни алгебри – някои локални, глобални и универсални аспекти”**  
за придобиване на образователна и научна степен ”доктор”

от кандидат: **Марин Владимиров Генов,**

Област на висше образование: **4. Природни науки, математика и информатика**

Професионално направление: **4.5. Математика,**

Докторска програма: **”Геометрия и топология”,**

секция: **”Анализ, геометрия и топология”,**

**Институт по математика и информатика (ИМИ)**

**Българска академия на науките (БАН)**

Рецензията е изготвена от проф. д-р Азнив Киркор Каспарян, Катедра Алгебра, Факултет по математика и информатика, Софийски университет ”Св. Климент Охридски” в качеството на член на научното жури, съгласно Заповед № 83/14.08.2026 г. на Директора на Института по математика и информатика.

### **1   Обща характеристика на дисертационния труд и представените материали**

Дисертацията съдържа 227 страници и се състои от въведение, три глави, приложение и библиография. Първата глава е съставена от някои алгебрични и топологични предварителни сведения. Втората глава въвежда и изучава диференцируемостта над крайномерна комутативна асоциативна алгебра с единица  $\mathcal{A}$  над  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  в постановка с представяне или с морфизъм. Третата глава е посветена на интегрирането над  $\mathcal{A}$ . В приложението са събрани някои факти за структурните константи на крайномерна алгебра, нейните морфизми и представяния. Библиографията се състои от 186 заглавия, от които 142 статии, 28 монографии, 15 препринта и една дисертация. Литературните източници, публикувани преди 2000 г. са 117, докато появилите се през настоящия век са 69. Това доказва, че Марин Генов е запознат както с класическите, така и със съвременните изследвания в научната област.

Комбинирайки важни резултати от комплексния анализ, комутативната алгебра, алгебричната топология и други математически дисциплини, Марин Генов създава изключително оригинални, сложни конструкции, илюстриращи връзките между гореспоменатите области. Неговата дисертация е свидетелство за оригинално мислене, богата математическа култура и задълбочено разбиране на широк диапазон от математически идеи. Марин Генов коментира многостранно получените резултати и ги свързва успешно с работите на други автори. Неговата дисертация впечатлява с изтънчена естетика и изключително владение на английския език. Тя отразява непрестанния му стремеж към съвършенство и красота в създаването на математика. Тази работа доказва огромни познания в научната област и майсторски умения за самостоятелна научно-изследователска работа.

## 2 Данни и лични впечатления за кандидата

През 2005 г. на Марин Генов е присъдена немската стипендия "Studienstiftung des Deutschen Volkes" за надарени ученици и студенти, с която отива да следва в Университета Ludwig-Maximilian в Мюнхен. Там получава бакалавърска степен по математика през 2014 г. По време на следването си, Марин Генов е асистент по линейна алгебра, реален анализ, комплексен анализ, нелинеен функционален анализ. През 2018 г. се дипломира като Магистър по математика в Софийски университет "Св. Климент Охридски". Там Марин Генов взе с отлични оценки избираемите дисциплини "Въведение в комутативната алгебра", "Въведение в хомологичната алгебра" и "Комплексна алгебрична геометрия", които преподавам. Той беше подготвен обстойно за изпитите и показва задълбочено разбиране на материала, както и оригинално мислене. Марин Генов преподаваше "Алгебра 2" в моя екип. Той изпълняваше перфектно преподавателската си работа като избираше подходящи задачи, илюстриращи теорията и ги обясняваше достъпно на студентите. По този начин, той си спечели уважението и високата оценка на своите студенти. Като рецензент на магистърската му дипломна работа бях впечатлена от задълбочения му подход, оригиналното му мислене и перфектния английски. Марин Генов е високоуважаван заради своята честност, квалификация и отговорност към задълженията. Той се стреми постоянно към съвършенство в научно изследователската и преподавателската си работа и затова през 2018 г. му беше присъдена наградата "130 години Софийски университет". От 2020 г. до 2024 г. Марин Генов е докторант в докторската програма "Геометрия и топология" към Секция "Анализ, геометрия и топология" на Института по математика и информатика към Българска академия на науките. От 2023 г. до 2025 г. той е "математик", а от 2025 г. до сега е асистент в Института по математика и информатика.

## 3 Съдържателен анализ на научните и научноприложните постижения на кандидата, съдържащи се в представения дисертационен труд и публикациите към него, включени по процедурата

Въведението напомня как понятието за диференцируемост над  $\mathbb{K}$ -алгебра  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  възниква от стремежа за обобщаване на комплексната диференцируемост, запазвайки някои забележителни свойства като уравненията на Cauchy-Riemann, интегралните теореми на Cauchy и Morera, интегралната формула на Cauchy и аналитичността. То скицира някои подходи за решаване на тази задача, мотивира дисертацията, дискутира накратко основните резултати и набелязва някои теми за по-нататъшни изследвания и приложения.

В означенията от дисертацията, глава 0 е подготовка за основните резултати. Нейният първи параграф се концентрира върху съответствието между морфизмите и представянията на алгебри, техните стандартни разлагания и взаимодействието между спектралния подход и директните произведения. Параграф 0.1.1 съпоставя на морфизъм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  на необезателно комутативни асоциативни алгебри над произволен пръстен  $R$ , структурата на  $\mathcal{A}$ -бимодул върху  $\mathcal{B}$ , зададена от композициите на  $\varphi$  с регулярното представяне и анти-представяне на  $\mathcal{B}$  в  $\text{End}_R(\mathcal{B})$ . Обратно, представяне  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_R(M)$  задава морфизъм  $\lambda^{\text{im}} : \mathcal{A} \rightarrow \lambda(\mathcal{A})$  на  $R$ -алгебри, наречен ко-ограничение върху образа на  $\lambda$ . Параграф 0.1.2 съдържа някои известни сведения за разлаганията  ${}_A M = \bigoplus_{k=1}^m {}_A M_k$  в неразложими  $\mathcal{A}$ -модули  ${}_A M_k$  и пълните системи от нетривиални взаимно ортогонални примитивни идемпотенти  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \text{End}_A(M)$  с  $M_k = \varepsilon_k(M)$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Параграф 0.1.3 е посветен на съответствието между външните директни произ-

ведения  $\times_{i \in I} (\mathcal{A}_i M_i)$  на леви  $\mathcal{A}_i$ -модули и вътрешните директни произведения  $\prod_{i \in I} \mathcal{A} M_i$  над  $\mathcal{A} := \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ . Параграф 0.1.4 обсъжда съответствието между външните (вътрешните) директни произведения на представяния и външните (вътрешните) директни произведения на съответните им модули. За да обясни в каква степен разлагането на  $\lambda(\mathcal{A})$  е несъвместимо с разлагането на  $\text{End}_R(M)$ , параграф 0.1.4 определя под-директно произведение  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$  като алгебра с такова влагане  $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} := \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$ , че  $\text{pr}_k^{\mathcal{B}} \circ i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_k, \forall 1 \leq k \leq m$  са инективни. Ако  $\mathcal{A} M = \oplus_{k=1}^m \mathcal{A} M_k$  за  $\mathcal{A}$ -модули, зададени с представяния  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_R(M), \lambda_k : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_R(M_k)$  и  $\mathcal{B}_k := \lambda_k(\mathcal{A})$ , то  $\lambda(\mathcal{A})$  се оказва под-директно произведение на подходящата област от стойности  $\mathcal{B} := \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$  на  $\lambda$  и  $\text{pr}_k^{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{B}_k$  се пропуска през  $i^{\text{cor}}|_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \hookrightarrow \text{End}_R(M)$ . Като следствие, регулярното представяне на  $R$ -алгебра  $\mathcal{B} = \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$  се свързва с регулярните представяния на нейните  $R$ -подалгебри  $\mathcal{B}_k$  чрез ко-ограничението  $i^{\text{cor}} : \prod_{k=1}^m \text{End}_R(\mathcal{B}_k) \rightarrow \text{End}_R(\mathcal{B})$ . Параграф 0.1.5 обяснява как разлагане на  $R$ -алгебра  $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$  взаимодействия с морфизъм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  на  $R$ -алгебри или с представяне  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_R(M)$  с напълно разложими  $\mathcal{B}$ , съответно  $\mathcal{A} M$ . За морфизъм  $\varphi$  има  $\varphi$ -съгласуван изоморфизъм  $\beta : \mathcal{B} \rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$  за идеали  $\mathcal{B}_k$ , които са неразложими  $R$ -алгебри и изображение на индексите  $j_{\varphi} : [m] \rightarrow [n], [m] := \{1, \dots, m\}$ , групиращо слоевете, така че  $\beta \circ \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$  е композиция на  $\Pi_{\varphi} : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{j_{\varphi}(k)}$  и  $(\times_{k=1}^m \bar{\varphi}_k) : \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{j_{\varphi}(k)} \rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k$  за еднозначно определени  $\bar{\varphi}_k : \mathcal{A}_{j_{\varphi}(k)} \rightarrow \mathcal{B}_k$  с  $\varphi_k = \bar{\varphi}_k \circ \text{pr}_{j_{\varphi}(k)}^{\mathcal{A}}$ . В случая на представяне, съществува разлагане  $\mathcal{A} M = \oplus_{k=1}^m \mathcal{A} M_k$  в неразложими  $\mathcal{A} M_k$ , зададени с представяния  $\lambda_k : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_R(M_k)$  и изображение на индексите  $j_{\lambda} : [m] \rightarrow [n]$ , групиращо слоевете, така че  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{k=1}^m \text{End}_R(M_k)$  се пропуска през  $\Pi_{\lambda} : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{j_{\lambda}(k)}$  и  $(\times_{k=1}^m \bar{\lambda}_k) : \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{j_{\lambda}(k)} \rightarrow \prod_{k=1}^m \text{End}_R(M_k)$  за еднозначно определени  $\bar{\lambda}_k : \mathcal{A}_{j_{\lambda}(k)} \rightarrow \text{End}_R(M_k)$  с  $\lambda_k = \bar{\lambda}_k \circ \text{pr}_{j_{\lambda}(k)}^{\mathcal{A}}$ . Параграф 0.1.6 въвежда затворената обвивка  $X^{\varphi} := \varphi^{-1}(\varphi(X))$  на подмножество  $X \subseteq \mathcal{A}$  относно морфизъм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  на  $R$ -алгебри, мултипликативния подмоноид  $\mathcal{A}_{\varphi}^{\times} := \varphi^{-1}(\mathcal{B}) \supseteq \mathcal{A}^{\times}$  относно  $\varphi$ , особения конус  $\text{Sing}_{\varphi}(\mathcal{A}) := \varphi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{B})) \subseteq \text{Sing}(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^{\times}$  относно  $\varphi$ , радикала на Jacobson  $J_{\varphi}(\mathcal{A}) := \varphi^{-1}(J(\mathcal{B}))$  относно  $\varphi$ , нил-конуса  $\text{nil}_{\varphi}(\mathcal{A}) := \varphi^{-1}(\text{nil}(\mathcal{B})) \supseteq \text{nil}(\mathcal{A})$  относно  $\varphi$ , особения клас  $[a]_{\text{sing}} := a + \text{Sing}(\mathcal{A})$  на  $a \in \mathcal{A}$ , особения клас  $[a]_{\varphi} := a + \text{Sing}_{\varphi}(\mathcal{A}) \subseteq [a]_{\text{sing}}$  на  $a \in \mathcal{A}$  относно  $\varphi$ , мултипликативния клас  $[a]^{\times} := a + \mathcal{A}^{\times}$  на  $a \in \mathcal{A}$  и мултипликативния клас  $[a]_{\varphi}^{\times} := a + \mathcal{A}_{\varphi}^{\times} \supseteq [a]^{\times}$  на  $a \in \mathcal{A}$  относно  $\varphi$ . За подмножество  $X \subseteq \mathcal{A} = \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ , морфизъм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  с индексно множество  $I = I_{\varphi} = j_{\varphi}([m]) \subseteq [n]$  или представяне  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_R(M)$  с индексно множество  $I = I_{\lambda} := j_{\lambda}([m]) \subseteq [n]$ , параграф 0.1.7 изучава затворената обвивка чрез проекции  $\tilde{X}_{(I)} := \cap_{j \in I} \text{pr}_j^{-1}(\text{pr}_j(X))$  относно  $I$ , мултипликативния подмоноид  $\mathcal{A}_{(I)}^{\times} := \text{pr}_I^{-1}(\prod_{j \in I} \mathcal{A}_j^{\times})$  относно  $I$ , особения конус  $\text{Sing}_{(I)}(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{(I)}^{\times}$  относно  $I$ , радикала на Jacobson  $J_{(I)}(\mathcal{A}) := \text{pr}_I^{-1}(\prod_{j \in I} J(\mathcal{A}_j))$  относно  $I$ , нил-конуса  $\text{nil}_{(I)}(\mathcal{A}) := \text{pr}_I^{-1}(\prod_{j \in I} \text{nil}(\mathcal{A}_j))$  относно  $I$ , особения клас  $[a]_{(I)} := a + \text{Sing}_{(I)}(\mathcal{A})$  на  $a \in \mathcal{A}$  относно  $I$ , мултипликативния клас  $[a]_{(I)}^{\times} := a + \mathcal{A}_{(I)}^{\times}$  of  $a \in \mathcal{A}$  относно  $I$ . Същият параграф доказва, че радикалът на Jacobson на под-директно произведение  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$  изпълнява включването  $J(\mathcal{A}) \subseteq J(\prod_{k=1}^m \mathcal{B}_k) = \prod_{k=1}^m J(\mathcal{B}_k)$ . За алгебра  $\mathcal{A}$  над комутативен пръстен  $R$  и подмножество  $X \subseteq \mathcal{A}$  с  $X \cap \mathcal{A}^{\times} \neq \emptyset$ , параграф 0.1.8 въвежда затворената обвивка в единиците  $\bar{U}_{\mathcal{A}}(X) := \langle X \cap \mathcal{A}^{\times} \rangle$  като подгрупата на  $\mathcal{A}^{\times}$ , породена от  $X \cap \mathcal{A}^{\times}$ . Ако  $\bar{U}_{\mathcal{A}}(X) = X \cap \mathcal{A}^{\times}$ , то  $X$  се нарича затворено в единиците на  $\mathcal{A}$ . Доказва се, че  $R$ -подалгебрите  $\prod_{k=1}^m \text{End}_R(M_k), \text{End}_{\mathcal{A}}(\oplus_{k=1}^m \mathcal{A} M_k)$  на  $\text{End}_R(M)$  са затворени в единиците на  $\text{End}_R(M)$  и  $\mathcal{A}_{\lambda}^{\times} = \cap_{k=1}^m \mathcal{A}_{\lambda_k}^{\times}$ . Ако  $\varphi : (\mathcal{A}, \mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{B}$  е морфизъм на локална  $R$ -алгебра с нил максимален идеал  $\mathfrak{M}$ , то  $\varphi(\mathcal{A})$  е затворено в единиците на  $\mathcal{B}$ . Параграф 0.1.9 е посветен на формалните характери и на спектралните затворени обвивки. Максималният спектър на комутативна алгебра  $\mathcal{A}$  над комутативен пръстен  $R$  е множеството  $\text{Spm}(\mathcal{A})$  на максималните идеали  $\mathfrak{M}_j$  на  $\mathcal{A}$ . Хомоморфизмите

$\chi_j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{M}_j = \kappa_j$  се наричат формални характери на  $\mathcal{A}$ . За произволно подмножество  $\emptyset \neq \mathcal{I} \subseteq \text{Spm}(\mathcal{A})$ , да разгледаме диагоналното влагане  $\Delta_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{I}}$  и хомоморфизма на  $R$ -алгебри  $\chi_{\mathcal{I}} := (\times_{j \in \mathcal{I}} \chi_j) \circ \Delta_{\mathcal{I}} : \mathcal{A} \rightarrow \kappa_{\mathcal{I}} := \prod_{j \in \mathcal{I}} \kappa_j$ . Параграф 0.1.9 определя и изучава равномерната  $\mathcal{I}$ -спектрална затворена обвивка  $\hat{X}_{\mathcal{I}} := X + \ker(\chi_{\mathcal{I}})$  на подмножество  $X \subseteq \mathcal{A}$ , равномерното  $\mathcal{I}$ -спектрално допълнение  $\check{X}_{\mathcal{I}} := (\hat{X}_{\mathcal{I}})^c$ , пълната  $\mathcal{I}$ -спектрална проекция  $X_{\mathcal{I}}^{\text{sp}} := \prod_{j \in \mathcal{I}} \chi_j(X)$ , поточковата  $\mathcal{I}$ -спектрална затворена обвивка  $\hat{X}_{\mathcal{I}} := \chi_{\mathcal{I}}^{-1}(X_{\mathcal{I}}^{\text{sp}}) = \bigcap_{j \in \mathcal{I}} (X + \mathfrak{M}_j)$ , поточковото  $\mathcal{I}$ -спектрално допълнение  $\check{X}_{\mathcal{I}} := \bigcap_{j \in \mathcal{I}} (X + \mathfrak{M}_j)^c$ . Той обсъжда връзките между равномерните и поточковите  $\mathcal{I}$ -спектрални затворени обвивки и допълнения, от една страна и мултипликативния подмоноид  $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}^{\times} := \text{pr}_{\mathcal{I}}^{-1}\left(\prod_{j \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_j^{\times}\right)$  относно  $\mathcal{I}$ , особения конус  $\text{Sing}_{\mathcal{I}}(\mathcal{A}) := \bigcup_{j \in \mathcal{I}} \mathfrak{M}_j$  относно  $\mathcal{I}$ , радикала на Jacobson  $J_{\mathcal{I}}(\mathcal{A}) := \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \mathfrak{M}_j$  относно  $\mathcal{I}$ , нил-радикала  $\text{nil}_{\mathcal{I}}(\mathcal{A}) := \ker(\chi_{\mathcal{I}})$  относно  $\mathcal{I}$ , особения клас  $[a]_{\mathcal{I}} := a + \text{Sing}_{\mathcal{I}}(\mathcal{A})$  на  $a \in \mathcal{A}$  относно  $\mathcal{I}$  и мултипликативния клас  $[a]_{\mathcal{I}}^{\times} := a + \mathcal{A}_{\mathcal{I}}^{\times}$  на  $a \in \mathcal{A}$  относно  $\mathcal{I}$ , от друга страна. Параграф 0.1.10 уточнява някои свойства на спектралните затворени обвивки и допълнения на подмножества на крайни директни произведения на локални комутативни  $R$ -алгебри. В параграф 0.1.11 са събрани някои свойства на комутативните локални пръстени  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M})$  и техните полета от остатъци  $\kappa = \mathcal{A}/\mathfrak{M}$ . Комутативен локален пръстен  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \kappa)$  има поле от коефициенти  $\kappa$ , ако съществува такова спектрално сечение  $i_{\mathcal{A}} : \kappa \hookrightarrow \mathcal{A}$  на характера  $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{M} = \kappa$ , за което  $\theta_{\mathcal{A}} := \chi_{\mathcal{A}} \circ i_{\mathcal{A}}$  е автоморфизъм на  $\kappa$ . Параграф 0.1.11 изучава връзките между  $\text{char}(\mathcal{A})$  и  $\text{char}(\kappa)$ . Той обяснява защо произволна пълна  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \kappa)$  с  $\text{char}(\mathcal{A}) = \text{char}(\kappa)$  има поле от коефициенти  $\kappa$  и може да се разглежда като  $\kappa$ -алгебра. Параграф 0.1.12 напомним, че произволна Артинова  $R$ -алгебра е от вида  $\mathcal{A} \simeq \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \kappa_j)$ . В частния случай на  $\kappa_j = \mathbb{C}$ ,  $\forall 1 \leq j \leq n$ , комплексните структури  $J_j$  върху  $\mathcal{A}_j$  са единствени с точност да знак, така че  $J = (\pm J_1, \dots, \pm J_n)$  са всички комплексни структури върху  $\mathcal{A}$ . За локален Артинов пръстен  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, K)$  нека  $\nu(\mathcal{A})$  е индексът на нилпотентност на  $\mathfrak{M}$  и  $\mu(\mathcal{A}) := \dim_K(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2)$ . За  $\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ,  $K_{\mu, \nu} := K[x_1, \dots, x_{\mu}]/(x_1, \dots, x_{\mu})^{\nu}$  е локална Артинова  $K$ -алгебра с максимален идеал  $\mathfrak{M}_{\mu, \nu} := (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\mu})$ , която се нарича  $K$ -алгебра на джетове от тип  $(\mu, \nu)$ . Доказано е, че произволна Артинова  $K$ -алгебра  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, K)$  е фактор на  $(K_{\mu(\mathcal{A}), \nu(\mathcal{A})}, \mathfrak{M}_{\mu(\mathcal{A}), \nu(\mathcal{A})}, K)$  за  $\nu(\mathcal{A}) \geq \nu(\mathcal{A})$  и всяко такова представяне на  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, K)$  е единствено с точност до  $K$ -автоморфизъм на  $K_{\mu(\mathcal{A}), \nu(\mathcal{A})}$ . Произволна локална  $\kappa$ -алгебра  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \kappa)$  с  $\dim_{\kappa}(\mathcal{A}) = d$  е изоморфна на  $\kappa$ -алгебра от долно триъгълни матрици на Toeplitz от ред  $d$ . Ако  $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \kappa)$  е комутативна,  $d_j := \dim_{\kappa}(\mathcal{A}_j)$  и  $Z = (z_1 \oplus X_1, \dots, z_n \oplus X_n) \in \mathcal{A}$  с  $z_j \in \kappa$ ,  $X_j \in \mathfrak{M}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , то спектрът на матрицата  $Z$  е  $\sigma(Z) := \{z_1, \dots, z_n\}$  с алгебрични кратности  $d_j$  на  $z_j$ ,  $\text{tr}(Z) = \sum_{j=1}^n d_j \chi_j(Z)$  и  $\det(Z) = \prod_{j=1}^n \chi_j(Z)^{d_j}$ . Използвайки известна Теорема за обратната функция за формални степенни редове  $f \in \mathcal{A}[[Z]]$  с комутативен пръстен от коефициенти  $\mathcal{A}$ , параграф 0.1.12 извежда Формална теорема за неявната функция, която гласи че за произволно  $F(Z, W) \in \mathcal{A}[[Z, W]]$  с  $F(Z, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial W}(0, 0) \in \mathcal{A}^{\times}$  съществува единствено  $g \in \mathcal{A}[[Z]]$  с  $F(Z, g(Z)) \equiv 0$  и  $g(0) = 0$ . Параграф 0.1.13 дискутира параграфите от 0.1.4 до 0.1.10 в частния случай на крайномерна комутативна алгебра  $\mathcal{A}$  над поле  $K$ . Ако  ${}_{\mathcal{A}}M = \bigoplus_{k=1}^m {}_{\mathcal{A}}M_k$  е разлагане в неразложими  $\mathcal{A}$ -модули  ${}_{\mathcal{A}}M_k$ , то  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_K(\bigoplus_{k=1}^m {}_{\mathcal{A}}M_k)$  се пропуска през подходящото ко-ограничение  $\rho^{\text{mor}} = (\rho_1, \dots, \rho_m) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} := \prod_{k=1}^m (\mathcal{B}_k, \mathfrak{N}_k, \lambda_k)$ , чиито локални множители  $\mathcal{B}_k := \rho_k(\mathcal{A})$  са крайномерни комутативни  $K$ -алгебри. Това позволява интерпретацията на постановката с представяне като частен случай на постановката с морфизъм.

Параграф 0.2 обсъжда мултипликативната група  $\mathcal{A}^{\times}$  на крайномерна комутативна алгебра  $\mathcal{A}$  над поле  $K$ . Всяка такава  $\mathcal{A} \simeq \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \kappa_j)$ , така че изучаването на  $\mathcal{A}^{\times} \simeq \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j^{\times}$  се свежда до описанието на  $\mathcal{A}_j^{\times}$  за локална  $\mathcal{A}_j$ . Ако  $\kappa$  с  $\text{char}(\kappa) = 0$  е поле на коефициентите на  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \kappa)$ , то  $\mathcal{A} \simeq \kappa \oplus_{\kappa} \mathfrak{M}$  и съществува изоморфизъм  $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{\times} \rightarrow \kappa^{\times} \times (\mathfrak{M}, +)$ ,  $\Phi_{\mathcal{A}}(z \oplus X) = (z, \log(1 \oplus \frac{X}{z}))$ ,  $\forall z \oplus X \in \mathcal{A}$  на алгебрични групи. Доказано е, че крайномерна комутативна

$\mathbb{R}$ -алгебра  $\mathcal{A}$  има свързана мултипликативна група  $\mathcal{A}^\times$  точно когато  $\mathcal{A}$  има почти комплексна структура, което е в сила точно когато  $\chi(\mathcal{A}) \not\subseteq \mathbb{R}$  за всеки характер  $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M} \triangleleft_{\max} \mathcal{A}$ .

Параграф 0.3 е посветен на нормираните алгебри над  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Ако  $(V, \|\cdot\|_V)$ ,  $(W, \|\cdot\|_W)$  са нормирани  $\mathbb{K}$ -линейни пространства, то операторната норма на  $\Phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  е  $\|\Phi\|_{\text{op}} := \|\Phi\|_{V,W} := \sup \left\{ \frac{\|\Phi(v)\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{\mathcal{O}_V\} \right\}$ . В частност, ако върху  $\mathbb{K}^n$  е зададена евклидавата норма  $\|\cdot\|_2$ , спектралната норма  $\|A\|_{\text{sp}} := \|A\|_{2,2}$  върху  $M_n(\mathbb{K})$  може да се изрази чрез спектралния радиус  $\rho(A)$  на  $A$ , определен като максималния модул на собствена стойност на  $A$ . Произволно влагане  $\mathcal{A} \hookrightarrow M_n(\mathbb{K})$  на комутативна  $\mathbb{K}$ -алгебра задава спектрален радиус  $\rho_{\mathcal{A}}(a) := \rho(a)$  на  $a \in \mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{K})$ . Норма  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  на алгебра е единична, ако  $\|1_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{A}} = 1$ . Дисертацията проверява, че  $\rho_{\mathcal{A}}$  е единична норма върху  $\mathcal{A}$ . Ако  $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \mathbb{K}_j)$ ,  $\mathbb{K}_j \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , то спектралният радиус на  $Z = (z_1 \oplus X_1, \dots, z_n \oplus X_n) \in \mathcal{A}$  с  $z_j \in \mathbb{K}_j$ ,  $X_j \in \mathfrak{M}_j$  е  $\rho_{\mathcal{A}}(Z) = \max\{|z_j| \mid 1 \leq j \leq n\}$  и  $\rho_{\mathcal{A}}$  е мултипликативна тогава и само тогава, когато  $\mathcal{A}$  е локален пръстен. За произволен затворен идеал  $I$  в  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$  и  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\|a + I\|_{\mathcal{A}/I} := \text{dist}_{\mathcal{A}}(a, I) = \inf\{\|a - i\|_{\mathcal{A}} \mid i \in I\}$  е норма на  $\mathcal{A}/I$ . Левите нормирани модули  $(M, \|\cdot\|_M)$  над  $\mathbb{K}$ -алгебри  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$  с единица са характеризирани чрез операторните норми на образите на непрекъснатите представяния  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$ .

Нека  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  са крайномерни комутативни  $\mathbb{K}$ -алгебри, а  $M$  е крайномерен  $\mathcal{A}$ -модул. Глава 1 въвежда три типа диференцируемост на функция  $f : U \rightarrow M$  или  $f : U \rightarrow \mathcal{B}$  върху отворено  $U \subseteq \mathcal{A}$  относно  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$  или  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  и изучава свойствата на съответните производни. Резултатите на глави 1 и 2 са формулирани в статията от Доклади на БАН, 2024.

Параграф 1.1 определя класическата "гранична" диференцируемост, строгата Fréchet диференцируемост и Fréchet диференцируемостта в постановка на представяне или постановка на морфизъм. За произволно отворено  $U \subseteq \mathcal{A}$  и  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  е в сила  $\mathcal{L}_{\rho}^k(U, M) \subseteq \mathcal{F}_{\rho}^{\text{str}, k}(U, M) \subseteq \mathcal{F}_{\rho}^k(U, M) \subseteq \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(U, M)$  за съответните пространства от  $\rho$ -диференцируеми функции  $f : U \rightarrow M$ . Пространствата на  $k$ -кратно непрекъснато диференцируемите функции от всеки от изброените три типа съвпадат помежду си и се означават с  $\mathcal{C}_{\rho}^k(U)$ , съответно,  $\mathcal{C}_{\varphi}^k(U)$ . Функциите  $U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M$ , които са  $n$ -кратно  $\mathcal{A}$ -диференцируеми са онези  $\mathcal{A}$ -диференцируеми функции, които са  $n$ -кратно  $\mathbb{R}$ -диференцируеми. Параграф 1.1 дава формули за разлагане в Тейлъров ред с остатъчен член във формата на Реано за  $f \in \mathcal{F}_{\rho}^n(U)$  или с остатъчен член в интегрална форма за  $f \in \mathcal{C}_{\rho}^n(U)$ . Снопите  $\mathcal{L}_{\rho}$ ,  $\mathcal{F}_{\rho}^{\text{str}}$ ,  $\mathcal{F}_{\rho}$  имат действие на  $\text{End}_{\mathcal{A}}(M)$ , докато  $\mathcal{L}_{\varphi}$ ,  $\mathcal{F}_{\varphi}^{\text{str}}$ ,  $\mathcal{F}_{\varphi}$  се състоят от  $\mathcal{B}$ -алгебри и изпълняват правилото на Leibniz за производна на произведение. Верижното правило за диференциране е проверено за композиции на някои  $\mathcal{A}$ -диференцируеми функции с някои  $\mathcal{B}$ -диференцируеми функции, за композиции на морфизми с  $\mathcal{B}$ -диференцируеми функции, за композиции на  $\mathcal{A}$ -диференцируеми функции с хомоморфизми  $\Phi : {}_{\mathcal{A}}M \rightarrow {}_{\mathcal{A}}N$ , изпълняващи  $\text{Ann}_{\mathcal{A}}(N) \subseteq \text{Ann}_{\mathcal{A}}(M)$  в строго Fréchet диференцируемия случай, както и за композиции на  $\varphi$ -диференцируеми функции с морфизми  $\psi$ , чиито ограничения  $\psi|_{\text{im}(\varphi)}$  са инективни в строго Fréchet диференцируемия случай. Ако  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  е морфизъм, то произволен избор на  $\mathbb{K}$ -базиси на  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{K}^n$ ,  $\mathcal{B} \simeq \mathbb{K}^m$  превръща регулярното представяне  $\Upsilon_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  в изображение  $\Upsilon_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \hookrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{K})$ , трансформиращо производната на диференцируема в  $Z_0 \in \mathcal{A}$  функция  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  в Якобиевата матрица  $\Upsilon_{\mathcal{B}}(f'(Z_0)) = (J_{\mathbb{K}}f)(Z_0) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  на  $\mathbb{K}$ -диференцируемото изображение  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ . Дисертацията илюстрира горното равенство чрез три примера за комутативни асоциативни структури върху  $\mathbb{R}^2$  и извежда уравненията на Cauchy-Riemann-Scheffers за тях. Параграф 1.1 завършва с Хипотезата за Якобиана на  $\mathcal{A}$ -холоморфни изображения, която твърди че ако  $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^N (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \mathbb{K})$  е с  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}) = n$  и  $P : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  е  $\mathcal{A}$ -холоморфно регулярно изображение с  $\det(J_{\mathbb{K}}P) = \text{const} \neq 0$ , то  $P$  е бирегулярно.

Параграф 1.2 изучава взаимодействията между класовете на регулярност  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{F}^{\text{str}}$ ,  $\mathcal{F}$  и някои категорни конструкции. Ако  $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$  или  $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$  за епиморфизъм  $\pi : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \bar{\mathcal{A}}$  на  $\mathbb{K}$ -алгебри и  $\bar{\rho} : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M)$  или  $\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$ , то за всяка функция  $f \in \mathcal{F}_{\alpha}^{\text{str}, k}(U)$  или  $f \in \mathcal{L}_{\alpha}^k(U)$  с  $\alpha \in \{\rho, \varphi\}$

съществува единствена функция  $\bar{f} \in \mathcal{F}_\alpha^{\text{str},k}(\pi(U))$ , съответно,  $\bar{f} \in \mathcal{L}_\alpha^k(\pi(U))$  с  $f = \bar{f} \circ \pi$  и  $f$  има  $\mathcal{F}_\alpha^{\text{str},k}$ -диференцируемо или  $\mathcal{L}_\alpha^k$ -диференцируемо продължение  $f^\pi := \pi^*(\bar{f}) = \bar{f} \circ \pi$  върху  $U^\pi := U + \ker(\pi)$ . Подобни твърдения са в сила за непрекъснато диференцируеми функции. Гореспондиращите свойства за пропускане не са изпълнени за  $\mathcal{F}_\rho$  и  $\mathcal{F}_\varphi$ . Ако  $\varphi : (\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{K}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathfrak{N}, \mathbb{K})$  е морфизъм на локални Артинови  $\mathbb{K}$ -алгебри, то за всяка функция  $f \in \mathcal{L}_\mathcal{A}(U, \mathcal{B})$  съществува единствена функция  $\bar{f} \in \mathcal{L}_\mathbb{K}(\chi_\mathcal{A}(U), \mathbb{K})$  с  $\chi_\mathcal{B} \circ f = \bar{f} \circ \chi_\mathcal{A}$ ,  $(\chi_\mathcal{B} \circ f)' = \bar{f}' \circ \chi_\mathcal{A}$  и  $\chi_\mathcal{B} \circ f$  се продължава до функция  $U + \mathfrak{M} \rightarrow {}_\mathcal{A}\mathbb{K}$ . Параграф 1.2 установява следната Теорема за аксиоматично продължение: Ако  $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \mathbb{K}_j)$ ,  ${}_ \mathcal{A}M = \oplus_{k=1}^m {}_ \mathcal{A}M_k$  за неразложими  ${}_ \mathcal{A}M_k$  и  $\rho = (\times_{k=1}^m \bar{\rho}_k) \circ \Pi_\rho$  за  $\Pi_\rho : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{j(k)}$ ,  $\bar{\rho}_k : \mathcal{A}_{j(k)} \rightarrow \text{End}_\mathbb{K}(M_k)$ , то за всяка функция  $f \in \mathcal{L}_\rho(U)$  съществува единствена функция  $\bar{f} = \times_{k=1}^m \bar{f}_k \in \mathcal{L}_{\bar{\rho}}\left(\prod_{k=1}^m \text{pr}_{j(k)}(U)\right)$  с  $f = \bar{f} \circ \Pi_\rho$  и  $\mathcal{L}_\rho(U) \simeq \mathcal{L}_{\bar{\rho}}(\tilde{U}^\rho)$  като диференциални  $\text{End}_\mathcal{A}(M)$ -модули, където  $\tilde{U}^\rho := \cap_{k=1}^m \text{pr}_{j(k)}^{-1}(\text{pr}_{j(k)}(U))$  е затворената обвивка чрез проекции. За морфизъм  $\varphi : \mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \mathbb{K}_j) \rightarrow \mathcal{B} = \prod_{k=1}^m (\mathcal{B}_k, \mathfrak{N}_k, \mathbb{L}_k)$  съществува изоморфизъм на диференциални  $\mathcal{B}$ -алгебри  $\mathcal{L}_\varphi(U) \simeq \mathcal{L}_\varphi(\tilde{U}^\varphi)$ . Резултатите от параграф 1.2 позволяват да се сведе изучаването на  $\mathcal{L}_\rho$ - и  $\mathcal{L}_\varphi$ -диференцируемите функции към случаите на точни неразложими модули над локални алгебри или към вложения на локални алгебри.

Параграф 1.3 извежда обобщени хомогенни частни диференциални уравнения на Cauchy-Riemann и уравнения на Cauchy-Riemann-Scheffers. Нека  $\mathcal{A}$  е комутативна  $\mathbb{K}$ -алгебра със структурен тензор на умножението  $(\alpha_{jl}^k)_{k,j,l=1}^n$  относно  $\mathbb{K}$ -базис  $a_1, \dots, a_n$ ,  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_\mathbb{K}(M)$  е представяне,  $(\gamma_{jl}^k)_{j=1}^n {}_m$  е структурният тензор на  $\mathcal{A}$ -действието върху  $M$  относно избрания  $\mathbb{K}$ -базис на  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{K}$ -базис  $v_1, \dots, v_m$  на  $M$ , а  $f = f^1 v_1 + \dots + f^m v_m : U \rightarrow M$  е изображение на отворено подмножество  $U \subseteq \mathcal{A}$  с координатни функции  $f^k : U \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $1 \leq k \leq m$ . Тогава  $f$  е  $\rho$ -диференцируемо в  $Z_0 = Z_0^1 a_1 + \dots + Z_0^n a_n$  тогава и само тогава, когато  $f$  е напълно  $\mathbb{K}$ -диференцируемо в  $Z_0$  и съществува такава функция  $g := g^1 v_1 + \dots + g^m v_m$  със стойности в  $M$ , определена в  $Z_0$ , която изпълнява равенствата  $\frac{\partial f^k}{\partial z^j}(Z_0) = \sum_{s=1}^m \gamma_{js}^k g^s(Z_0)$ ,  $\forall 1 \leq j \leq n$ ,  $\forall 1 \leq k \leq m$  и  $f'(Z_0) = g(Z_0)$ . Още повече, ако  $\mathcal{A}$  има единица  $1_\mathcal{A} = \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n$ , то обобщените уравнения на Cauchy-Riemann се свеждат до  $\frac{\partial f^k}{\partial z^j}(Z_0) = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \varepsilon_r \gamma_{js}^k \frac{\partial f^s}{\partial z^r}(Z_0)$ ,  $\forall 1 \leq j \leq n$ ,  $\forall 1 \leq k \leq m$  и  $f'(Z_0) = \sum_{r=1}^m \varepsilon_r \frac{\partial f}{\partial z^r}(Z_0)$ . Броят на обобщените уравнения на Cauchy-Riemann е минимален за избора на  $a_1 = 1_\mathcal{A}$ , който позволява изразяването на всички частни производни  $\frac{\partial f^k}{\partial z^j}(Z_0) = \sum_{s=1}^m \gamma_{js}^k \frac{\partial f^s}{\partial z^1}(Z_0)$ ,  $\forall 2 \leq j \leq n$ ,  $\forall 1 \leq k \leq m$  чрез "свободните параметри"  $\frac{\partial f}{\partial z^1}(Z_0)$  и  $f'(Z) = \frac{\partial f}{\partial z^1}(Z)$ . Обобщените уравнения на Cauchy-Riemann-Scheffers гласят, че  $f$  е  $\rho$ -диференцируема в  $Z_0$  тогава и само тогава, когато  $f$  е напълно  $\mathbb{K}$ -диференцируема в  $Z_0$  и  $\left[\left(\sum_{r=1}^m \alpha_{ij}^r \frac{\partial}{\partial z^r}\right) f^k\right](Z_0) = \frac{\partial}{\partial z^j}\left(\sum_{s=1}^m \gamma_{is}^k f^s\right)(Z_0)$ ,  $\forall 1 \leq i, j \leq n$ ,  $\forall 1 \leq k \leq m$ . Параграф 1.3 доказва, че напълно  $\mathbb{K}$ -диференцируема функция  $f : U \rightarrow M$  принадлежи на  $\mathcal{F}_\rho(U)$  тогава и само тогава, когато  $f \in \cap_{1 \leq i < j \leq n} \ker(d_{ij})$  за обобщените оператори на Wirtinger  $d_{ij}(f) := a_i \frac{\partial f}{\partial z^j} - a_j \frac{\partial f}{\partial z^i}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . В частния случай на  $a_1 = 1_\mathcal{A}$ ,  $f \in \mathcal{F}_\rho(U)$  тогава и само тогава, когато  $f \in \cap_{j=2}^n \ker(d_{1j})$  и операторите  $d_{1j}$  се извеждат също чрез фиксиране на  $Z_1 = Z^1 a_1 + \dots + Z^n a_n$  и избор на такива  $Z_2, \dots, Z_n$ , че  $\frac{\partial Z_i}{\partial Z_j} = \delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Параграф 1.4 съпоставя на  $f \in \mathcal{F}_\mathcal{A}(U, {}_\mathcal{A}M)$  диференциалната 1-форма  $\omega := \rho(dZ)f(Z) \in \Omega^1(U, {}_\mathcal{A}M)$  и е прелюдия към следващата глава за интегриране. По определение,  $f : U \rightarrow {}_\mathcal{A}M$  е  $\mathcal{L}_\rho$ -,  $\mathcal{F}_\rho^{\text{str}}$ -,  $\mathcal{F}_\rho$ - или  $\mathcal{C}_\rho^1$ -интегруема, ако съществува  $F : U \rightarrow {}_\mathcal{A}M$  от съответния клас на диференцируемост с  $F' = f$ . За произволна затворена крива  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, U)$ , параграф 1.4 доказва, че  $\oint_\gamma \rho(dZ)f(Z) = 0$  за  $f \in \mathcal{C}^0(U, {}_\mathcal{A}M)$  и  $\left\|\oint_\gamma \rho(dZ)f(Z)\right\|_M \leq \|f\|_{\gamma, M} L_\rho(\gamma) \leq \|f\|_{\gamma, M} L_\mathcal{A}(\gamma)$  за  $f \in \mathcal{C}^0(\gamma, {}_\mathcal{A}M)$ ,  $L_\rho(\gamma) := \oint \|\rho(\gamma'(t))\|_{M, M} dt$ ,  $L_\mathcal{A}(\gamma) := \oint_{\mathbb{S}^1} \|\gamma'(t)\|_{\mathcal{A}} dt$ . Дисертацията дава два критерия за пре-Могера  $\rho$ -интегруемост на  $f \in \mathcal{C}^0(U, {}_\mathcal{A}M)$ . Първият предполага, че

$U \subseteq \mathcal{A}$  е свързано отворено подмножество и  $\oint \rho(dZ)f(Z) = 0, \forall \gamma \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, U)$ . Вторият изисква  $U \subseteq \mathcal{A}$  да е звездобразно изпъкнало отворено подмножество с център  $u_0 \in U$  и  $\oint_{\partial \Delta} \rho(dZ)f(Z) = 0$  за всички триъгълници  $\Delta \subseteq U$  с връх  $u_0$ . Дисертацията доказва резултат на Waterhouse от 1992 г., съгласно който  $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  тогава и само тогава, когато  $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  и  $d_{\mathbb{K}}(\rho(dZ)f(Z)) = 0$  за  $d_{\mathbb{R}} = d$  или  $d_{\mathbb{C}} = \partial$ . Параграф 1.4 установява Интегрална теорема на Cauchy-Goursat  $\oint_{\partial \Delta} \rho(dZ)f(Z) = 0$  за произволно свързано отворено подмножество  $U \subseteq \mathcal{A}$ , произволни  $Z_1, \dots, Z_s \in U$ , произволно  $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(U \setminus \{Z_1, \dots, Z_s\}, {}_{\mathcal{A}}M)$  и произволен триъгълник  $\Delta \subseteq U$ . Аналогично, хомологичната интегрална теорема на Cauchy гласи, че  $\int_{\Gamma} \rho(dZ)f(Z) = 0$  за произволна функция  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^1(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  и произволен 1-цикъл  $\Gamma \in Z_1(U, \mathbb{Z})$ , хомологичен на  $[\Gamma] = 0 \in H_1(U, \mathbb{Z})$ . Хомотопичната интегрална теорема на Cauchy установява, че  $\oint_{\gamma} \rho(dZ)f(Z) = 0$  за всички  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}^1(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  и всички  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, U)$ . Доказано е, че функциите  $f : U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M$ , интегрируеми безбройно много пъти образуват  $\mathcal{F}_{\rho}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  за звездобразно изпъкнало отворено подмножество  $U \subseteq \mathcal{A}$ . Непрекъснатите  $f : U \rightarrow {}_{\mathcal{A}}M$ , които са интегрируеми безбройно много пъти съставят  $\mathcal{C}_{\rho}^1(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  за отворено, хомологично 1-свързано  $U \subseteq \mathcal{A}$ .

Втората глава на дисертацията въвежда обобщения индекс на затворена крива или на 1-цикъл, за да изведе разнообразни обобщени интегрални формули на Cauchy. Доказателствата от първите три параграфа са публикувани в Сердика Математическо списание 2026 г. в частния случай на локална алгебра  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{C})$  без допълнителни усложнения за представянния.

Параграф 2.1 описва допустимите точки и сингулярни 1-цикли, необходими за съществуването на обобщено интегрално ядро на Cauchy. Той подготвя спектрално хомотопичното разсъждение, използвано в следващия параграф за явно пресмятане на обобщения относителен индекс на затворена крива. Нека  $\mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \mathbb{C})$  е разлагане на  $\mathbb{C}$ -алгебра  $\mathcal{A}$  с  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) < \infty$  в локални множители,  ${}_{\mathcal{A}}M = \bigoplus_{k=1}^m {}_{\mathcal{A}}M_k$  е разлагане в неразложими  ${}_{\mathcal{A}}M_k$ ,  $(\rho_1, \dots, \rho_m) = (\times_{k=1}^m \bar{\rho}_k) \circ \Pi_{\rho}$  за  $\Pi_{\rho} : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{j_{\rho}(k)}$ ,  $\bar{\rho}_k : \mathcal{A}_{j_{\rho}(k)} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M_k)$ ,  $\rho_k = \bar{\rho}_k \circ \text{pr}_{j_{\rho}(k)}^{\mathcal{A}}$ ,  $I_{\rho} := \rho([m]) \subseteq [n]$ . Спектралната затворена обвивка  $\hat{U} := \cap_{k=1}^m \chi_{j_{\rho}(k)}^{-1}(\chi_{j_{\rho}(k)}(U)) = \cap_{k=1}^m U + \mathfrak{M}_{j_{\rho}(k)}$  на отворено подмножество  $U \subseteq \mathcal{A}$  е строг деформационен ретракт на пълната спектрална проекция  $U^{\text{sp}} := \prod_{k=1}^m \text{pr}_{j_{\rho}(k)}(U)$ , така че  $H_1(\hat{U}, \mathbb{Z}) \simeq H_1(U^{\text{sp}}, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{k=1}^m H_1(\chi_{j_{\rho}(k)}(U), \mathbb{Z})$ .  $I_{\rho}$ -забранената зона на  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, U)$  е  $\mathcal{F}_{\rho}(\gamma) := \{Z \in \mathcal{A} \mid \exists j \in I_{\rho} : \chi_j(Z) \in \chi_j(\gamma)\}$  за  $\chi_j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_j/\mathfrak{M}_j \simeq \mathbb{C}$ , а  $I_{\rho}$ -допустимата зона е  $\text{Adm}_{\rho}(\gamma) := \mathcal{F}_{\rho}(\gamma)^c$ . За  $\Gamma := \sum_{l=1}^p g_l \gamma_l \in Z_1(U, G)$  определяме  $\mathcal{F}_{\rho}(\Gamma) := \cup_{l=1}^p \mathcal{F}_{\rho}(\gamma_l)$  и  $\text{Adm}_{\rho}(\Gamma) := \mathcal{F}_{\rho}(\Gamma)^c$ . Затворени криви  $\gamma, \delta \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, U)$  са спектрално хомотопни, ако  $\chi_{j_{\rho}(k)}(\gamma)$  и  $\chi_{j_{\rho}(k)}(\delta)$  са хомотопни в  $\chi_{j_{\rho}(k)}(U) \subseteq \mathbb{C}$  за всички  $1 \leq k \leq m$ . Спектралната фундаментална група  $\pi_1^{\text{sp}}(U)$  е факторът на  $\mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, U)$  по релацията на еквивалентност на спектрална хомотопия. Да отбележим, че  $\chi_j : U \rightarrow \chi_j(U) \subseteq \mathbb{C}$ ,  $j \in I_{\rho}$  индуцират изображения  $(\chi_j)_{\#} : B_1(U, G) \rightarrow B_1(\chi_j(U), G)$  на 1-границите и позволяват определянето на пространството  $B_1^{\text{sp}}(U, G) := \cap_{j \in I_{\rho}} (\chi_j)_{\#}^{-1}(B_1(\chi_j(U), G))$  на спектралните 1-границы, а оттам и първата спектрална хомологична група  $H_1^{\text{sp}}(U, G) := Z_1(U, G)/B_1^{\text{sp}}(U, G)$ .

Параграф 2.2 изучава обобщения индекс  $\text{Ind}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(\gamma, Z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\rho(dZ)}{\rho(Z-Z_0)} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$ ,  $Z_0 \in \text{Adm}_{\rho}(\gamma)$ , съответно,  $\text{Ind}_{\varphi}^{\mathbb{Z}}(\gamma, Z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\varphi(dZ)}{\varphi(Z-Z_0)} \in \mathcal{B}$ ,  $Z_0 \in \text{Adm}_{\varphi}(\gamma)$ . Тези определения се обобщават за 1-цикли над  $\mathbb{Z}$  и 1-цикли над произволна абелева група  $G$ . За  $[\Gamma_1] = [\Gamma_2] \in H_1([Z_0]_{\rho}^{\times}, \mathbb{Z})$ ,  $[Z_0]_{\rho}^{\times} := Z_0 + \rho^{-1}(\text{GL}_{\mathcal{A}}(M))$  е в сила  $\text{Ind}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(\Gamma_1, Z_0) = \text{Ind}_{\rho}^{\mathbb{Z}}(\Gamma_2, Z_0)$ . Ако  $\Gamma \in Z_1(U, \mathbb{Z})$  е  $\mathcal{C}_{\text{pw}}^1$ -регулярен и  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  са морфизми, то  $\text{Ind}_{\psi \circ \varphi}^{\mathbb{Z}}(\Gamma, Z_0) = \text{Ind}_{\psi}^{\mathbb{Z}}(\varphi_{\#}(\Gamma), \varphi(Z_0)) = \psi(\text{Ind}_{\varphi}^{\mathbb{Z}}(\Gamma, Z_0))$ ,  $\forall Z_0 \in \text{Adm}_{\psi \circ \varphi}(\Gamma)$ . Когато  $\varphi = (\times_{j=1}^n \varphi_j) : \mathcal{A} = \prod_{j=1}^n \mathcal{A}_j \rightarrow \prod_{j=1}^n \mathcal{B}_j = \mathcal{B}$  отговаря на пълна система от идемпотенти  $\{e_j^{\mathcal{B}} \mid 1 \leq j \leq n\}$  е изпълнено  $\text{Ind}_{\varphi}^{\mathbb{Z}}(\Gamma, Z_0) = \sum_{j=1}^n e_j^{\mathcal{B}} \text{Ind}_{\varphi_j}^{\mathbb{Z}}(\text{pr}_j(\Gamma), \text{pr}_j(Z_0))$ ,  $\forall Z_0 \in \prod_{j=1}^n \text{Adm}_{\varphi_j}(\text{pr}_j(\Gamma))$ . Ако  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{C})$  е локална  $\mathbb{C}$ -алгебра,

то  $\text{Ind}_\varphi^\mathbb{Z}(\Gamma, Z_0) = \text{ind}(\chi(\Gamma), \chi(Z_0))$  е класическият индекс в  $\chi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}/\mathfrak{M} = \mathbb{C}$  и прилагането на това свойство към ендоморфизъм  $\varphi : (\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{C}) \rightarrow (\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{C})$  дава  $d$ -затвореността на  $X^k dX \in \Omega_{\text{hol}}^1(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ ,  $1 \leq k \leq \nu - 2$  за индекса на нилпотентност  $\nu$  на  $\mathfrak{M}$ . За локална  $(\mathcal{B}, \mathfrak{N}, \mathbb{C})$  следва  $\text{Ind}_\varphi^\mathbb{Z}(\Gamma, Z_0) \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall Z_0 \in \text{Adm}_\varphi(\Gamma)$ . Ако  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) = (\times_{k=1}^m \overline{\varphi_k}) \circ \Pi_\varphi : \mathcal{A} = \prod_{j=1}^n (\mathcal{A}_j, \mathfrak{M}_j, \mathbb{C}) \rightarrow \prod_{k=1}^m (\mathcal{B}_k, \mathfrak{N}_k, \mathbb{C}) = \mathcal{B}$  за  $\Pi_\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{k=1}^m \mathcal{A}_{j_\varphi(k)}$ ,  $\overline{\varphi_k} : \mathcal{A}_{j_\varphi(k)} \rightarrow \mathcal{B}_k$ ,  $\varphi_k = \overline{\varphi_k} \circ \text{pr}_{j_\varphi(k)}^{\mathcal{A}}$ , то  $\text{Ind}_\varphi^\mathbb{Z}(\Gamma, Z) = \sum_{k=1}^m e_k^{\mathcal{B}} \text{ind}(\chi_{j_\varphi(k)}(\Gamma), \chi_{j_\varphi(k)}(Z_0)) \in \mathbb{Z}^m \subset \mathbb{C}^m \hookrightarrow \mathcal{B}$ ,  $\forall Z_0 \in \text{Adm}_\varphi(\Gamma)$ . Понеже индексът  $\text{Ind}_\varphi^G(\Gamma, Z_0) = \text{Ind}_\varphi^G(\Gamma, Z_0 + X_0)$  е инвариантен относно трансляции с  $X_0 \in \text{nil}_\varphi(\mathcal{A}) := \varphi^{-1}(\text{nil}(\mathcal{B}))$ ,  $\text{Ind}_\varphi^G(\Gamma, \cdot)$  индуцира изображение  $\text{Adm}_\varphi(\Gamma)/\text{nil}_\varphi(\mathcal{A}) \rightarrow G^m$ . За произволни  $\varphi, \psi : (\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{C}) \rightarrow (\mathcal{B}, \mathfrak{N}, \mathbb{C})$ ,  $\Gamma \in Z_1(U, G)$ ,  $Z_0 \in \text{Adm}_\mathcal{A}(\Gamma)$  е в сила  $\text{Ind}_\mathcal{B}^G(\varphi_\#(\Gamma), \psi(Z_0)) = \text{Ind}_\mathcal{A}^G(\Gamma, Z_0) = \text{ind}_\mathbb{C}^G(\chi(\mathcal{A}), \chi_\mathcal{A}(Z_0))$ . Локално постоянният  $\text{Ind}_\rho^G(\Gamma, \cdot) : \text{Adm}_\rho(\Gamma) \rightarrow G$  има множества на ниво от вида  $\prod_{j=1}^n \mathcal{A}'_j$ , където  $\mathcal{A}'_j = C_j \times \mathfrak{M}_j$  за  $j \in I_\rho$  и множество на ниво  $C_j$  на локално постоянната функция  $\text{ind}(\chi_j(\Gamma), \cdot)$  или  $\mathcal{A}'_j = \mathcal{A}_j$  за  $j \in [n] \setminus I_\rho$ . Множеството  $\mathcal{C}_\rho(\Gamma) := \{Z \in \text{Adm}_\rho(\Gamma) \mid \text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\Gamma, Z) \in \text{GL}_\mathbb{C}(M)\}$  се отъждествява с  $\prod_{j=1}^n \mathcal{A}'_j(\chi_j(\Gamma))$ , където  $\mathcal{A}'_j(\chi_j(\Gamma)) = C_j(\chi_j(\Gamma)) \times \mathfrak{M}_j$  за  $j \in I_\rho$ ,  $C_j(\chi_j(\Gamma)) := \{z_j \in \mathbb{C} \setminus \chi_j(\Gamma) \mid \text{ind}(\chi_j(\Gamma), z_j) \neq 0\}$  или  $\mathcal{A}'_j(\chi_j(\Gamma)) = \mathcal{A}_j$  за  $j \in [n] \setminus I_\rho$ . Ако  $[\gamma] = [\delta] \in \pi_1([Z_0]_\rho^\times)$ , то  $\text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\gamma, Z_0) = \text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\delta, Z_0)$ , което е изпълнено точно когато  $[\gamma] = [\delta] \in \pi_1^{\text{sp}}([Z_0]_\rho^\times)$ . Аналогично,  $\text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\Gamma, Z_0) = \text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\Delta, Z_0)$  за  $[\Gamma] = [\Delta] \in H_1^{\text{sp}}(U, \mathbb{Z})$ ,  $\forall Z_0 \in \hat{U} := \cap_{j \in I_\rho} (U + \mathfrak{M}_j)^c$ .

Параграф 2.3 е върху някои версии на интегралната формула на Cauchy и следствията от трансформацията на Cauchy. Локалната интегрална формула на Cauchy е  $\text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\gamma, Z)f(Z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W-Z)} f(W)$  за полидиск  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $f \in \mathcal{O}_\rho(\mathcal{P}, \mathcal{A}M)$ ,  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{P})$ ,  $Z \in \mathcal{P} \cap \text{Adm}_\rho(\gamma)$ . За нил-радикалната интегрална формула на Cauchy, нека  $V := \prod_{j=1}^n V_j$  с произволни отворени  $V_j \subseteq \mathcal{A}_j$  за  $j \in [n] \setminus I_\rho$  или  $V_j = \{c \in \mathbb{C} \mid |c| < r_j\} \times \mathfrak{M}_j$  за  $j \in I_\rho$  и някои  $r_j \in \mathbb{R}^{>0}$ . Тогава за произволни  $f \in \mathcal{O}_\rho(V, \mathcal{A}M)$ ,  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, V)$  с  $0 \in \text{Adm}_\rho(\gamma)$ ,  $\text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\gamma, 0) = 1$  и  $X \in \text{nil}_\rho(\mathcal{A}) := \rho^{-1}(\text{nil}(\text{End}_\mathbb{C}(M)))$  е в сила  $f(X) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W-X)} f(W)$ . Това води до локално автоматично аналитично продължение  $\hat{f}(Z+X) := \frac{1}{2\pi i \text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\gamma, Z)} \oint_\gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W-Z-X)} f(W)$  върху спектралната затворена обвивка  $\hat{\mathcal{P}} := \cap_{j \in I_\rho} (\mathcal{P} + \mathfrak{M}_j)$  на полидиск  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$  за произволни  $f \in \mathcal{O}_\rho(\mathcal{P}, \mathcal{A}M)$ ,  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, \mathcal{P})$ ,  $Z \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C}_\rho(\gamma)$ ,  $X \in \text{nil}_\rho(\mathcal{A})$ . Съответното глобално автоматично аналитично продължение се формулира като изоморфизъм  $\mathcal{O}_\rho(U) \simeq \mathcal{O}_\rho(\hat{U})$  на  $\mathcal{A}$ -модули или изоморфизъм  $\mathcal{O}_\varphi(U) \simeq \mathcal{O}_\varphi(\hat{U})$  на  $\mathcal{B}$ -алгебри. Затова областите на  $\mathcal{A}$ -холоморфност са от вида  $D \times \mathfrak{M}$  за област  $D \subseteq \mathbb{C}$ . За свързано отворено  $U \subseteq \mathcal{A}$ ,  $f \in \mathcal{O}_\rho(U, \mathcal{A}M)$ ,  $[\Gamma] = [0] \in H_1^{\text{sp}}(U, \mathbb{Z})$  и  $Z \in U \cap \text{Adm}_\rho(\Gamma)$  е в сила спектралната нул-хомологична обобщена формула на Cauchy  $\int_\Gamma \rho(dW) f(W) = 0$ . Оттук следва спектралната нул-хомотопична интегрална формула на Cauchy  $\text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\gamma, Z)f(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W-Z)} f(W)$  за свързано отворено  $U \subseteq \mathcal{A}$ ,  $f \in \mathcal{O}_\rho(U, \mathcal{A}M)$ ,  $[\gamma] = [0] \in \pi_1^{\text{sp}}(U)$ ,  $Z \in U \cap \text{Adm}_\rho(\gamma)$ . За произволно свързано отворено  $U \subseteq \mathcal{A}$  спектралната нул-хомологична формула на Cauchy за диференциране гласи че  $\mathcal{O}_\rho(U, \mathcal{A}M) = \mathcal{O}_\rho^\infty(U, \mathcal{A}M)$  и  $\text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\Gamma, Z)f^{(k)}(Z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\rho(dW)}{\rho(W-Z)^{k+1}} f(W)$  за  $[\Gamma] = [0] \in H_1^{\text{sp}}(U, \mathbb{Z})$ ,  $Z \in U \cap \text{Adm}_\rho(\Gamma)$ . Комбинирайки с автоматичното аналитично продължение, стигаме до извода, че за локална  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{C})$ ,  $f \in \mathcal{O}_\rho(U, \mathcal{A}M)$ ,  $Z \in \hat{U}$ ,  $X \in \mathfrak{M}$  и за индекса на нилпотентност  $\nu$  на  $\mathfrak{M}$  е в сила  $\hat{f}(Z+X) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\rho(X)^k}{k!} f^{(k)}(Z)$ . За свързано отворено  $U \subseteq \mathcal{A}$ ,  $f \in \mathcal{O}_\rho(U, \mathcal{A}M)$ ,  $\Gamma \in B_1^{\text{sp}}(U, \mathbb{Z})$ ,  $Z_0 \in U \cap \mathcal{C}_\rho(\Gamma)$  глобалното неравенство на Cauchy над  $\mathcal{A}$  гласи, че  $\|f^{(k)}(Z_0)\|_2 \leq \frac{k!}{2\pi} \left\| \frac{1}{\text{Ind}_\rho^\mathbb{Z}(\Gamma, Z_0)} \right\|_{\text{sp}} L_\rho(\Gamma) \left\| \frac{1}{\rho(Z-Z_0)^{k+1}} \right\|_{\text{sp}, \Gamma} \|f\|_{2, \Gamma}$ , където  $\mathcal{A}M$  е снабдено с евклидовата норма  $\|\cdot\|_2$ . Централното неравенство на Cauchy над  $\mathcal{A}$  е  $\|f^{(k)}(Z_0)\|_M \leq \frac{k!}{r^k} \|f\|_{M, \gamma_r}$  за достатъчно малко  $r \in \mathbb{R}^{>0}$  и  $\gamma_r(t) := Z_0 + r e^{2\pi i t}$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . От споменатите два типа неравен-

ства на Cauchy над  $\mathcal{A}$  следва Теорема на Liouville над  $\mathcal{A}$  и скаларен принцип за максимума на модула над  $\mathcal{A}$ . Параграф 2.3 дава също две Теореме на Weierstrass за сходимост на  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{O}_\rho(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  върху свързано отворено  $U \subseteq \mathcal{A}$ . Ако  $f_n \rightarrow f$  локално равномерно, то  $f \in \mathcal{O}_\rho(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  и  $f'_n \rightarrow f'$  локално равномерно. Ако  $\sum_{k=1}^n f_k \rightarrow f$  локално нормално, то  $f \in \mathcal{O}_\rho(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  и  $\sum_{k=1}^n f'_k \rightarrow f'$  локално нормално. За локална Артинова  $\mathbb{C}$ -алгебра  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{C})$ , крайномерен  ${}_{\mathcal{A}}M$ , крайна мярка  $\mu : S \rightarrow M$ , измерима функция  $\gamma := g \oplus G : S \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathfrak{M} = \mathcal{A}$  и такова отворено  $U \subseteq \mathcal{A}$ , че  $\inf_{s \in S} (|g(s) - z| - \|\rho(G(s)) - X\|_{\text{End}}) > 0$ ,  $\forall Z = z \oplus X \in U \subseteq \mathbb{C} \oplus \mathfrak{M} = \mathcal{A}$ , трансформацията на Cauchy над  $\mathcal{A}$  дава  $\rho$ -аналитична функция  $f(Z) := \int_S \rho(\gamma(s) - Z)^{-1} d\mu(s)$  върху  $U$  с  $\frac{f^{(k)}(Z)}{k!} = \int_S \rho(\gamma(s) - Z)^{-(k+1)} d\mu(s)$ . В частност, всички  $f \in \mathcal{O}_\rho(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  са  $\rho$ -аналитични в  $U$ . В сила е Теорема на Morea  $\oint_\gamma \rho(dZ) f(Z) = 0$  за  $f \in \mathcal{O}_\rho(U, {}_{\mathcal{A}}M) \cap \mathcal{C}^0(U, {}_{\mathcal{A}}M)$ ,  $\gamma \in \mathcal{C}_{\text{pw}}^1(\mathbb{S}^1, U)$ .

Параграф 2.4 е посветен на обобщена интегрална формула на Cauchy-Pompeiu над компактна ориентируема повърхнина  $\Sigma \subset \mathcal{A}$  в общо положение относно радикала  $\mathfrak{M}$  на локална  $\mathbb{C}$ -алгебра  $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \mathbb{C})$  с  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) < \infty$ . По-точно, нека  $\nu$  е индексът на-nilпотентност на  $\mathfrak{M}$  и  $\Sigma$  е  $\mathcal{C}^{\nu+1}$ -повърхнина с  $\mathcal{C}_{\text{pw}}^1$ -граница  $\partial\Sigma$ . Точка  $W_0 \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$  е  $\mathcal{A}$ -трансверсална, ако пресичането  $(W_0 + \mathfrak{M}) \cap \Sigma$  е трансверсално в  $W_0$ . Произволна  $\mathcal{A}$ -трансверсална точка  $W_0$  има  $\mathcal{A}$ -трансверсална отворена околност  $S \ni W_0$  в  $\Sigma$ , върху която  $\chi_S := \chi|_S : S \rightarrow \chi_S(S)$  има  $\mathcal{C}^{\nu+1}$ -дифеоморфно сечение  $W : \chi_S(S) \rightarrow S \subseteq \Sigma \subseteq \mathcal{A}$ ,  $W(w) = w \oplus Y(w) \in \mathbb{C} \oplus \mathfrak{M} = \mathcal{A}$ , наречено спектрална локална параметризация. Ако  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U, {}_{\mathcal{A}}M)$  и  $W \in \mathcal{C}^{k+2}(\chi_S(S), \mathcal{A})$ , то  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}_\Sigma(W(w_0), \varepsilon)} \frac{dZ}{(z-w_0)^{k+1}} f(Z) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial w^k} \Big|_{w_0} \left( \frac{\partial W}{\partial w}(w) f(W(w)) \right)$ . Ако  $W \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$  и сечението  $(W + \mathfrak{M}) \cap \Sigma = \{p_l \mid 1 \leq l \leq m\}$  е трансверсално, то произволна точка  $p_l$  има локална  $\mathcal{A}$ -трансверсална околност  $S_l$  със спектрална локална параметризация  $W_l : \chi_S(S_l) \rightarrow S_l$ . Можем да изберем всички  $S_l$  да имат един и същи образ  $S^{\text{sp}} := \chi_S(S_l)$  и да разглеждаме  $W_l(w)$  като спектрална локална параметризация на  $\mathcal{A}$ -трансверсален слой  $S_l$  на  $m$ -листното покритие  $\chi_S : \coprod_{l=1}^m S_l \rightarrow S^{\text{sp}}$ . Тогава  $\varepsilon_l := \deg(\chi_S|_{S_l}) \in \{\pm 1\}$  в зависимост от това дали  $\chi_S$  запазва или променя ориентацията върху  $S_l$ . Глобалната "спектрална" формула на Cauchy-Pompeiu гласи, че  $\sum_{l=1}^m \varepsilon_l \frac{\partial W_l}{\partial w}(w) f(W_l(w)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} \frac{dZ}{z-w} f(Z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \left[ \frac{dz \wedge dX}{(z-w)^2} f(Z) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{dZ \wedge dz_j}{z-w} \frac{\partial f}{\partial z_j}(Z) + \frac{dZ \wedge d\bar{z}_j}{z-w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(Z) \right) \right]$ ,  $\forall w \in S^{\text{sp}}$ . Обобщената формула на Cauchy-Pompeiu над  $\mathcal{A}$  е  $\sum_{l=1}^m \varepsilon_l f(W_l(w)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} \frac{dZ}{z-w} f(Z) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=2}^n \int_\Sigma \frac{dZ \wedge dz_j}{z-w} \frac{\partial f}{\partial z_j}(Z) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \int_\Sigma \frac{dZ \wedge d\bar{z}_j}{z-w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(Z)$  във всички  $w \in S^{\text{sp}}$ .

В приложението са събрани някои факти за структурните тензори на крайномерни алгебри, техните морфизми и представяния. Параграф A1 дава няколко необходими и достатъчни условия за крайномерна алгебра  $\mathcal{A}$  над поле  $K$  да има единица, да е асоциативна или комутативна, на езика на нейния структурен тензор. Същият параграф предоставя необходими и достатъчни условия за мономорфизъм  $\lambda : \mathcal{A} \hookrightarrow M_{n \times n}(K)$  да е съгласуван с единиците и доказва, че комутативността на  $\lambda(\mathcal{A})$  е достатъчна за нейната асоциативност. Параграф A2 въвежда представящата матрица  $\Phi \in M_{m \times n}(K)$  на морфизъм  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  относно  $K$ -базис  $a_1, \dots, a_n$  на  $\mathcal{A}$  и  $K$ -базис  $b_1, \dots, b_m$  на  $\mathcal{B}$ , както и матриците  $\Gamma_j \in M_{m \times m}(K)$ , съответно,  $\widehat{\Gamma}_j \in M_{m \times m}(K)$ , представящи левите, съответно, десните умножения с  $\varphi(a_j)$  върху  $\mathcal{B}$ . Матриците  $\Gamma_j, \widehat{\Gamma}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  са изразени чрез структурните константи на  $\mathcal{B}$  и чрез  $\Phi$ . Съгласуваността на  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  с умножението,  $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ , асоциативността на  $\mathcal{B}$  и комутативността на  $\mathcal{B}$  са формулирани на езика на структурните тензори на  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  и посредством  $\Phi, \Gamma_j, \widehat{\Gamma}_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Специално внимание е отделено на случая  $a_1 = 1_{\mathcal{A}}$ ,  $b_1 = 1_{\mathcal{B}}$ , с или без предположение за инективност или сюрективност на  $\varphi$ . Параграф A2 дава също трансформационните формули на  $\Phi, \Gamma_j$  и на структурния тензор на  $\mathcal{A}$  под действие на смяна на  $K$ -базиса на  $\mathcal{A}$  и  $K$ -базиса на  $\mathcal{B}$ . Параграф A3 изразява асоциативността на  $\mathcal{A}$  чрез структурните константи на  $\mathcal{A}$  и на представяне  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_K(M)$ .

## 4 Аprobация на резултатите

Резултатите на дисертацията са публикувани в две статии. Едната от тях се появява в Доклади на БАН през 2024 г. с IF от Q4 и носи 24 точки. Другата е отпечатана в Сердика Математическо списание през 2026 г. с SJR и се оценява за 20 точки. По този начин, Марин Генов има 44 точки и не само изпълнява, но и преизпълнява значително минималното национално изискване от 30 точки съгласно чл. 26, ал. 2 и 3 на ЗРАСРБ, както и допълнителните изисквания на Българска академия на науките за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в научната област и професионалното направление на процедурата. Резултатите на дисертацията са докладвани на 3 международни конференции и 10 национални научни форума.

Представените от кандидата резултати в дисертационния труд и научните трудове към него не повтарят такива от предишни процедури за придобиване на научно звание или академична длъжност. Няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представения дисертационен труд и научните трудове по тази процедура.

## 5 Качества на автореферата

Авторефератът на български отразява правилно резултатите и съдържанието на дисертацията. Той формулира всички твърдения от дисертацията и основните приноси. Авторефератът дава аprobацията на резултатите, декларация за оригиналност и част от библиографията.

## 6 Заключение

След като се запознах с представените в процедурата дисертационен труд и придружаващите го научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащите се в тях научни и научноприложни приноси, потвърждавам, че представеният дисертационен труд и научните публикации към него, както и качеството и оригиналността на представените в тях резултати и постижения, отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и съответния правилник на Българска академия на науките за придобиване от кандидата на образователна и научна степен "доктор" в научна област 4. Природни науки, математика и информатика и професионално направление 4.5 Математика. В частност, кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Въз основа на гореизложеното, **убедено препоръчвам** на научното жури да присъди на

**Марин Владимиров Генов**

образователната и научна степен „доктор“ в научна област 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, докторска програма "Геометрия и топология".

14.09.2026 г.

Рецензент :

(проф. д-р Азнив Каспарян)