

С Т А Н О В И Щ Е

по конкурс за заемане на академичната длъжност „доцент“
в професионално направление 4.5 Математика
Научна специалност „Геометрия и топология“ (Тропическа геометрия)
за нуждите на Института по математика и информатика (ИМИ),
към Българска академия на науките (БАН),
обявен в ДВ бр. 106 от 17.12.2024 г. и на интернет страницата на ИМИ-БАН

Становището е написано от Азнив Киркор Каспарян, катедра Алгебра, Факултет по математика и информатика, Софийски университет "Св. Климент Охридски", професионално направление 4.5 Математика, в качеството на член на научното жури за конкурса, съгласно Заповед 15/17.02.2025 на Директора на Института по Математика и информатика на Българска академия на науките.

Единствен кандидат за конкурса е д-р Михаил Светославович Школников от ИМИ-БАН. Той участва в конкурса с 13 статии. Една от статиите е самостоятелна, а останалите 12 са съвместни. Доколкото ми е известно, всички съавтори на съвместните публикации имат равностойни приноси. Михаил Школников има 42 забелязани цитирания, от които 20 са предоставени за конкурса. Освен копия на дипломите за придобиване на образователно-квалификационната степен "Магистър" и образователната и научна степен "Доктор", документите включват доказателства за научно-изследователски опит, авторска справка за научните приноси, списък на забелязаните цитирания и формуляр за изпълнение на минималните национални изисквания на Закона за развитие на академичния състав на Република България, Правилника за неговото прилагане, както и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в ИМИ-БАН.

След защитата на дисертацията си за придобиване на ОНС "доктор", Михаил Школников е специализирал в Института за наука и технологии в Клостернойбург, Австрия и Университета на Женева, Швейцария. От 2023 г. работи в ИМИ-БАН. Участвал е в три проекта на Швейцарската национална научна фондация. Михаил Школников участва в конкурса с 13 статии, десет от които са с Impact Factor. Много съм впечатлена от това, че пет от тези статии са от първи квартал и една е от втори квартал. Има също две са от трети квартал, две статии от четвърти квартал, две с SJR и една от реферирано и индексирано списание. По този начин, Михаил Школников изпълнява и дори преизпълнява минималните национални изисквания за заемане на академичната длъжност "доцент" и специфичните изисквания на ИМИ-БАН.

Да пристъпим към съдържателен анализ на статиите на Михаил Школников за конкурса. Класическата без-фазова тропикализация $\text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определена като изображението $\text{Log}_t(z_1, \dots, z_n) = (\log_t(|z_1|), \dots, \log_t(|z_n|))$ за някакво $t \in \mathbb{R}_{>0}$ е фактор-изображението по максималния тор $(S^1)^n$ на $(\mathbb{C}^*)^n$. Като некомутативен аналог, Григорий Михалкин въвежда фактор-изображението $\kappa : \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$ по $\text{SO}(3)$ върху тримерното реално хиперболично пространство $\mathbb{H}^3$ и неговото продължение $\bar{\kappa} : \overline{\text{PSL}_2(\mathbb{C})} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^3}$ до съответните затворени обвивки. Статия на Григорий Михалкин и Михаил Школников от "Bulletin of the London Mathematical Society" прави обзор на някои резултати за класически непараметризирани тропически криви. Тя изучава фазово-тропическата сходимост на амебите на нодални пунктирани Риманови повърхнини чрез разширени дуални графи и техните образи в $\mathbb{R}^n$. Чрез подходящи крайни графи, наречени $\mathbb{H}^3$ -етажни диаграми и техните съответни $\mathbb{H}^3$ -тропични сферични комплекси в $\overline{\mathbb{H}^3}$, авторите описват κ -тропическата сходимост на скалирани семейства от неприводими комплексни алгебрични криви в $\overline{\text{PSL}_2(\mathbb{C})} = \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Статията изучава също амебите на комплексни проективни повърхнини $S \subset \overline{\text{PSL}_2(\mathbb{C})}$, доказвайки че $\bar{\kappa}(S)$ съдържа винаги границата $\partial\mathbb{H}^3$. Ако S е различна от квадриката $Q = \partial\overline{\text{PSL}_2(\mathbb{C})}$, допълнението $\mathbb{H}^3 \setminus \kappa(S)$ е отворено, геодезично изпъкнало подмножество на $\mathbb{H}^3$. Повърхнините S от нечетна степен имат $\kappa(S) = \mathbb{H}^3$. Работата въвежда лявото PSL_2 -изображение на

Gauss γ_S^- на гладките точки на $S \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ в $\mathbb{P}(T_e^* \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})) = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ и изучава поведението на γ_N^- за равнини $N \subset \overline{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})}$. Гладките критични точки $z \in S$ на $\kappa|_S$ се характеризират с условието $\gamma_S^-(z) \in \mathbb{P}(T_e \kappa^{-1}(0)) \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

След като формулира, че тропическата граница на хиперболични амeби $\kappa(S_\alpha) \subset \mathbb{H}^3$ на повърхнини $S_\alpha \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, $\alpha \in A$ е допълнение на отворено кълбо с център $0 \in \mathbb{H}^3$, статия на Михаил Школников и Петър Петров от "Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences" въвежда нов тип фазово нормиране VAL. По-точно, ако $\mathbb{K}$ е полето на редовете на Puiseux на една променлива с реални експоненти и комплексни коефициенти, то $\mathrm{VAL} : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \overline{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})}$ свързва съответните затворени обвивки. За произволно комплексно проективно многообразие $V \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ без неприводими компоненти от Q , образът на $V(\mathbb{K})$ под действие на VAL е описан с помощта на сферични коамеби и разслоението чрез окръжности, индуцирано от двойното изображение на коамеби.

През 2010 г. Карачиоло, Паолети и Спортиело въвеждат пясъчните купчини и изучават тяхното поведение под действие на вълни. Статия на Никита Калинин и Михаил Школников от "Journal of Knot Theory and Its Ramifications" описва в явен вид релаксациите на смущения $\phi_m^P = \phi_m + \sum_{v \in P} \delta_v$ на максимални стабилни състояния ϕ_m във върховете на седмоъгълна хиперболична решетка, чиито разстояния до началото са ограничени отгоре от m . За произволно $m \in \mathbb{N}$, разликата на масите на ϕ_m^P и на резултата от релаксацията се оказва положителна константа. Да напомним, че функцията на срутване $\mathcal{T}_\psi$ на състояние ψ съпоставя на връх v от решетката броя $\mathcal{T}_\psi(v) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ на срутванията във v по време на релаксацията на ψ . Статията намира явна формула за $\mathcal{T}_{\phi_m^P}(v)$, зависеща само от разстоянието на v и P до началото. По този начин, $\mathcal{T}_{\phi_m^P}$ не зависи от броя на елементите на P и от положението на точките от P .

Статия на Никита Калинин и Михаил Школников от "Discrete and Continuous Dynamical Systems" развива динамиката на тропическите редове. За подходящо затворено изпъкнало множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, авторите определят Ω -тропическите редове като функциите $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ с $f|_{\partial\Omega} \equiv 0$, които са от вида $f(x, y) = \inf_{(i,j) \in \mathcal{A}} (ix + jy + a_{ij})$ за подмножество $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^2$ и $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Тропическата крива на f е сечението $C(f) := P \cap \mathrm{Int}(\Omega)$ на вътрешността на Ω с множеството P на не-гладките точки на f . Нека $V(\Omega, P, f)$ е множеството на онези Ω -тропически редове $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ с не-гладки точки P , за които $g|_\Omega \geq f$. Статията въвежда вълновия оператор G_P , действащ по правилото $G_P(f)(x) = \inf \{g(x) \mid g \in V(\Omega, P, f)\}$ и изучава неговата динамика. Операторите G_P се повдигат до тропически полиноми на две променливи с коефициенти от поле $\mathbb{K}$ с характеристика $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$, което има нормиране $\mathrm{val} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$. Статията изучава поведението на стените на $\Omega \setminus C(f)$ под действие на вълновия оператор G_P върху f . Подходящи Ω се приближават с канонична фамилия от $\mathbb{Q}$ -многоъгълници и динамиката на добри Ω -тропически редове $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ се редуцира до динамиката на тропическите редове върху $\mathbb{Q}$ -многоъгълници чрез редица от раздувания.

Статия на Никита Калинин и Михаил Школников от "Communications in Mathematical Physics" класифицира периодичните подвижни състояния с линейна форма в модел на пясъчна купчина и ги нарича решения. След като доказват съществуването на решения ϕ , авторите използват дискретни суперхармонични функции $G_n : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}_\phi - n \leq G_n \leq \mathcal{T}_\phi$, които съвпадат с $\mathcal{T}_\phi$ извън крайна околност на множеството на отклонение $D(\mathcal{T}_\phi) := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \Delta \mathcal{T}_\phi \neq 0\}$, за да определят изглажданията $S_n(\mathcal{T}_\phi) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ of $\mathcal{T}_\phi$. Доказано е, че изглажданията на подходящи явно зададени ϕ_{edge} , ψ_{vertex} , $\psi_{\mathrm{node}} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ се стабилизират след краен брой стъпки. Статията има приложение, което развива теорията на пясъчните купчини върху безкрайни области.

Статия на Михаил Школников от "Communications in Mathematics" доказва, че релаксацията върху 1-мерна област спира след краен брой стъпки. Експериментите подсказват, че броят на стъпките изпълнява степенно правило.

Статия на Никита Калинин, Алдо Гузмани-Саенц, Юлиет Пиерто, Михаил Школников, Вера Калинина и Ернесто Луперцио от "Proceedings of the National Academy of Sciences

of the United States of America” предоставя тропически модел със само-организирана критичност, който е вид скалирана граница на модела на пясъчна купчина. Този модел е непрекъснат, т.е. не е клетъчна автоматизация. Статията установява експериментално чрез компютърна симулация, че броят $N(s)$ на лавините с размер s изпълнява степенен закон $\log(N(s)) = -1.2\log(s) + c$. Нека Ω е квадрат в $\mathbb{R}^2$, а φ е състояние с 3 зърна във всяка точка на $\Omega \cap \mathbb{Z}^2$, освен върху голямо подмножество $P \subset \Omega \cap \mathbb{Z}^2$, върху което точките имат по 4 зърна. Статията доказва, че функцията на срутване $\mathcal{T}_\varphi$ е скалирана граница на поточковия минимум на вдлъбнати, частично-линейни функции, които са неотрицателни върху Ω , анулират се върху $\partial\Omega$ и не са гладки в P .

Статия на Никита Калинин и Михаил Школников от ”European Journal of Mathematics” изучава компактните изпъкнали области Ω , като им съпоставя тропически криви C_Ω , определени от решетъчното разстояние F_Ω to $\partial\Omega$. Изпъкналите многоъгълници от вида $\Omega_t := F_\Omega^{-1}[t, +\infty)$ могат да се разглеждат като множества на ниво на разпространението на вълнов фронт, така че тропическата крива C_Ω се интерпретира като негова каустика. Нека X е гладка компактна симплектична торична повърхнина, а $\mu : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ е изображението на момента на Хамилтоновото торично действие върху X . Известно е, че тогава $\Delta = \mu(X)$ е многоъгълник на Делзант, чиито върхове са фиксирани точки на гореспоменатото действие. Работата установява, че произволен неприводим дивизор D върху X се изобразява в страна $s = \mu(D)$ на $\Delta = \mu(X)$. Ако s_1, s_2 са ребрата на C_Δ , излизащи от краищата на s , то s_1, s_2 и продължението на s образуват триъгълник на Делзант тогава и само тогава, когато $D^2 = -1$. За страна s на Δ нека $\lambda_s : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ е разстоянието от правата, съдържаща s , а $F_\Delta(p)$ е минимумът на $\lambda_s(p)$ за всички страни s на Δ . Тогава C_Δ е ъгловото множество на F_Δ . Доказано е, че ако m_Δ е максимумът на непрекъснатите, вдлъбнати, частично-линейни функции F_Δ , то за всяко $0 < \varepsilon < m_\Delta$ съществува многоъгълник Δ_ε с граница $\partial\Delta_\varepsilon = F_\Delta^{-1}(\varepsilon)$, който е многоъгълник на Делзант за $0 \leq \varepsilon < m_\Delta$. Работата установява, че ако границата $\partial\Omega = F_\Omega^{-1}(0)$ на компактна изпъкнала област $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ няма ъгли, то междинните множества на ниво $F_\Omega^{-1}(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < m_\Omega$ са многоъгълници на Делзант.

Статия на Мориц Ленг и Михаил Школников от ”Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America” анализира еволюцията на тъждеството на пясъчна купчина под действие на хармонични полета от ред най-много 4. Стабилна конфигурация в модела на пясъчна купчина е повтаряща се, ако се появява безбройно много пъти в процеса на Марков на добавяне на частица във всеки връх с положителна вероятност, последвано от релаксация на състоянията. Множеството на повтарящите се конфигурации образува абелевата група G на пясъчната купчина относно събирането на частици по върхове, последвано от релаксация. За да докажат, че динамиката на пясъчна купчина има скалирани граници, авторите въвеждат разширения модел на пясъчна купчина, в който граничните върхове на изпъкнала област Γ могат да имат реален брой частици. Повтарящите се конфигурации на разширения модел на пясъчна купчина образуват група на Ли $\tilde{G}$, върху която хармоничните полета задават затворени геодезични. Обичайната група G на пясъчна купчина е подгрупа на $\tilde{G}$, която може да се разглежда като дискретизация на $\tilde{G}$. Факторът $\tilde{G}/G \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\partial\Gamma} \simeq (S^1)^{\partial\Gamma}$ е тор. Нека $\mathcal{H}$ е пространството на хармоничните функции върху $\mathbb{Z}^2$ с реални стойности, а $\mathcal{H}_\mathbb{Z}$ е подпространството на хармоничните функции с цели стойности. За произволна изчерпваща инективна фамилия от области $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_n \subset \Gamma_{n+1} \subset \dots \subset \mathbb{Z}^2$, $\cup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n = \mathbb{Z}^2$ е доказано, че разширените групи $\tilde{G}_n$ на пясъчни купчини на Γ_n имат канонични епиморфизми $\tilde{G}_{n+1} \rightarrow \tilde{G}_n$, чиято проективна граница $\tilde{G}_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{G}_n$ не зависи от избора на $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Естественото влагане $\mathcal{H}/\mathcal{H}_\mathbb{Z} \subset \tilde{G}_\infty$ задава универсални координати и индуцира ренормализации на Γ_n .

Друга статия на Мориц Ленг и Михаил Школников от ”Comptes Rendus Mathématique” съпоставя на ориентирано оцветено облицоване на полиформа P_2 чрез полиформа P_1 , инективен хомоморфизъм $G_{P_1} \rightarrow G_{P_2}$ на съответните групи на пясъчни купчини. По-точно, ако M е единственото облицоване на $\mathbb{R}^2$ с равнобедрени триъгълници с основа 1 и височина $\frac{1}{2}$,

то M -полиформа P е крайно свързано подмножество от триъгълници на M . Нека P_1^{DC} е M -полиформа, чиито ребра са ориентирани и оцветени по такъв начин, че всяко ребро е в различен цвят. Ориентирана и оцветена облицовка на M -полиформа P_2 чрез P_1 е такова облицоване на P_2 чрез копия на P_1^{DC} , за което всяко общо ребро на съседни плочки има един и същи цвят и ориентация в тези плочки. Чрез подходящи примери е илюстрирано, че съответствието, съпоставящо на ориентирана оцветена облицовка на P_2 чрез P_1^{DC} мономорфизъм $G_{P_1} \rightarrow G_{P_2}$ не е нито инективно, нито сюрективно. За произволно изпъкнало отворено подмножество $P \subseteq \mathbb{R}^2$ (не обезателно M -полиформа), сечението $\Gamma = P \cap \mathbb{Z}^2$ се нарича изпъкнала област. Нека Δ_Γ е редуцираният Лапласиан на граф, а $\mathcal{H}_R^\Gamma$ с $R = \mathbb{Z}$ или $R = \mathbb{Q}$ е R -модулът на хармоничните функции $\Gamma \rightarrow R$. Ако $\mathcal{H}_G^\Gamma$ е факторът на $\{H \in \mathcal{H}_\mathbb{Q}^\Gamma \mid \Delta_\Gamma H|_{\partial\Gamma} \in \mathbb{Z}^{\partial\Gamma}\}$ по $\mathcal{H}_\mathbb{Z}^\Gamma$, то $-\Delta_\Gamma : \mathcal{H}_G^\Gamma \rightarrow G_\Gamma$ е изоморфизъм с групата G_Γ на пясъчна купчина, така че G_Γ се влага в $\mathcal{H}_\mathbb{Q}^\Gamma/\mathcal{H}_\mathbb{Z}^\Gamma$ като подгрупа, чийто фактор е изоморфен на $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\partial\Gamma}$. За произволна крайна изпъкнала област $\Gamma \subset \mathbb{Z}^2$ е доказано, че редът на групата G_Γ на пясъчна купчина е равен на абсолютната стойност на детерминантата на матрицата на потенциала на базис на $\mathcal{H}_\mathbb{Z}^\Gamma$.

Статия на Сергей Дужин и Михаил Школников от "Arnold Mathematical Journal" дава две явни формули за HOMFLY-полинома P_n на рационален линк, отговарящ на верижна дроб с n четни знаменателя. Те са изведени от рекурентно съотношение за P_n , P_{n-1} и P_{n-2} .

Друга статия на Сергей Дужин и Михаил Школников от "Fundamenta Mathematicae" установява съществуването на възли, които не са двуседелни, т.е. не са двойносъчетани. За тази цел е доказано, че матрицата на Александър на двуседелен възел K е от вида $I_n + (t + t^{-1} - 2)B$ за някаква матрица $B \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ и ако идеалът на Александър $I_m(K) \neq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ е нетривиален, то $1 + t \notin I_m(K)$. По този начин, ако възел K има $1 + t \in I_2(K) \neq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, то K не е двуседелен. Гореспоменатият резултат дава редица примери за възли, които не са двойносъчетани и не са двуседелни.

Статия на Ендералп Якабойлу, Михаил Школников и Михаил Лемешко от "Physical Review Letters" прилага подхода на квантовите групи за изучаване на взаимодействието на линеен неподвижен ротор с баня от бозони. Групата от симетрии на изолиран ротор е $\text{SO}(3)$. След потапяне в обкръжение от много частици, полученият обект се описва с квантовата група $\text{SO}_q(3)$. Взаимодействията на много частици водят до "обличане" на ротора с облак от бозонни възбуждания, които индуцират ренормализация на ротационната константа B на ротора до $B^* < B$. Квантовата група $\text{SO}_q(3)$ е некомутативна деформация на универсалната обвиваща алгебра на Ли на $\text{SO}(3)$. Ако $q = e^{\sqrt{-1}\tau}$ за $\tau \in \mathbb{R} \cup \sqrt{-1}\mathbb{R}$, то $B^* = B \cos(3\tau)$ и основният резултат на статията дава явна формула за деформационния параметър τ . Въпреки, че формулата за τ е изведена за слаби взаимодействия, тя е в сила за произволни стойности на силата на свързване с баня от примеси. Статията сравнява подхода на квантовите групи с вариационен метод, както и с диаграмна техника на Монте Карло.

След като се запознах с представените в конкурса материали и научни трудове и въз основа на направения анализ на тяхната значимост и съдържащите се в тях научни и научно-приложни приноси, потвърждавам, че научните постижения отговарят на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за приложението му и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в Института по математика и информатика на Българска академия на науките, за заемане от кандидата на академичната длъжност „доцент“ в научната област и професионално направление на конкурса. В частност кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е установено плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

Затова

давам своята положителна оценка

за кандидатурата на Михаил Светославович Школников.

Въз основа на гореизложеното, **убедено препоръчвам** на научното жури да предложи на компетентния орган по избора на Института по математика и информатика към Българска академия на науките да избере

Михаил Светославович Школников

за „доцент“ в професионално направление 4,5 Математика

научна специалност "Геометрия и топология" (Тропическа геометрия)

в Института по математика и информатика на Българска академия на науките.

20.03. 2025 г.

Становището е написано от:

проф. д-р Азнив Каспарян,
Факултет по математика и информатика
Софийски университет "Св. Климент Охридски"