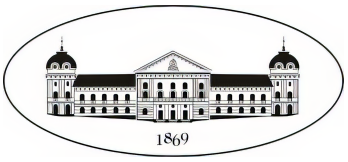
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА



ЕФЕКТИВНИ АЛГОРИТМИ С ПРИЛОЖЕНИЕ В КРИПТОГРАФИЯТА С ПУБЛИЧЕН КЛЮЧ И ТЕОРИЯ НА КОДИРАНЕТО

Мирослав Марков

Научен ръководител: доц. Юри Борисов

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

НА ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователна и научна степен „доктор“

Професионално направление: 4.6 „Информатика и компютърни науки“

Научна специалност: „Информатика“

София, 2024г.

Дисертацията е обсъдена и допусната до защита на разширено заседание на секция „Математически основи на информатиката“, към ИМИ-БАН, състояло се на 26 Юни 2024 г.

Дисертацията съдържа 75 стр., в които 7 таблици и 5 стр. литература, включваща 59 заглавия.

Защитата на дисертацията ще се състои на 9 Октомври 2024 г. от 14:00 часа в зала 256 на ИМИ-БАН, ул. „Акад. Георги Бончев“, бл. 8, на открито заседание на научно жури в състав:

1. Проф. дмн Илия Георгиев Буюклиев, ИМИ-БАН
2. Проф. д-р Николай Лазаров Манев, ИМИ-БАН
3. Проф. дмн Стоян Недков Капралов, ТУ-Габрово
4. Проф. д-р Владимир Тодоров Димитров, ФМИ-СУ
5. Доц. д-р Златко Георгиев Върбанов, ВТУ

Материалите за защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ-БАН, ул. „Акад. Георги Бончев“, бл. 8.

Автор: **Мирослав Цветков Марков**

Заглавие: **ЕФЕКТИВНИ АЛГОРИТМИ С ПРИЛОЖЕНИЕ В КРИПТОГРАФИЯТА С ПУБЛИЧЕН КЛЮЧ И ТЕОРИЯ НА КОДИРАНЕТО**

Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на темата

Преброяване на точките върху елиптична крива

Глави 1 и **2** на дисертацията са посветени на описанието на два ефективни алгоритъма за пресмятане броя на точките върху елиптични криви от семействата

$$\mathcal{E}_p = \{E_a : y^2 = x^3 + a \pmod p,\ a \neq 0\}$$

и

$$\mathcal{D}_p = \{D_a : y^2 = x^3 + ax \pmod p,\ a \neq 0\},$$

където p е просто число.

Елиптичните криви над крайни полета са основен компонент в съвременната криптография, характеризиращи се с хармонична комбинация от алгебрична елегантност и изчислителна ефективност. Те осигуряват стабилна основа за разработването на сигурни системи за криптиране с публичен ключ, които са устойчиви срещу различни видове криптографски атаки, включително и специално адаптирани. За по-задълбочено разбиране на криптографския им потенциал вижте [55] (вж. също така пионерските трудове на V. Miller и N. Koblitz от 80-те години [39, 29]). Основно предимство на криптографията с използване на елиптични криви (ECC), в сравнение с традиционната публична криптография (RSA), е че ECC може да осигури същото ниво на защита, но с по-къси ключове. Например, алгоритъмът за цифров подпис, базиран на елиптична крива (ECDSA), предлага еквивалентна криптографска сила при много по-къси ключове в сравнение с RSA (виж Таблица 1). Това е много полезно за ефективността и производителността на криптографските системи и особено за мобилни устройства и интернет на нещата (IoT), които обикновено имат ограничена изчислителна мощност.

Таблица 1 Еквивалентен размер на ключа (битове)

ECDSA	RSA
160	1024
224	2048
256	3072
384	7680
512	15360

Ключов аспект при проектирането на една система за криптиране с помощта на елиптични криви е изучаването на броя на точките върху избраната крива, тъй като той играе централна роля при определяне на сигурността, размера на ключа и производителността на криптографската система. В контекста на елиптичните криви над прости полета (напр. $\mathbb{F}_p$), броят на точките върху кривата (наречен ред на кривата) е основна характеристика, която може да служи като критичен параметър, влияещ на избора на останалите параметри на системата за криптиране с публичен ключ. Нека разгледаме всяка една от тези характеристики поотделно:

1. ***Брой на точките***: За елиптична крива E над просто поле $\mathbb{F}_p$, с уравнение $y^2 = x^3 + ax + b \pmod p$, броят на точките (означен като N) е фундаментална характеристика, представляваща общия брой точки (включително безкрайната точка), които удовлетворяват уравнението на кривата. Намирането на броя на точките върху кривата е задача от съществено значение за целите на криптографията. Добре известно е, че за да се избегне успешно прилагане на известните атаки срещу криптографска система, базирана на криптография с елиптични криви, броят на точките върху използваната крива трябва да има поне един много голям прост делител. По-специално, когато редът е голямо просто число, тогава се използва целият капацитет на кривата за постигане на максимално ниво на сигурност.

2. ***Сигурност и Размер на ключа***: Сигурността на криптографията с елиптични криви се основава на трудността за намиране на дискретния логаритъм на произволен елемент от елиптичната крива спрямо публично известната базова точка, т.е. намирането при произволно избрана точка P на скалара $k : P = kG$, където G е базовата точка на кривата. Тази задача често се нарича „задача за дискретния логаритъм върху елиптична крива“ или „Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem“ (ECDLP). Сигурността на системата е пряко свързана с размера на групата, образувана от точките върху кривата, който се определя от броя на точките N, удовлетворяващи уравнението на кривата

$E : y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p}$. По-голямо N обикновено предполага по-висока сигурност, тъй като увеличава изчислителната сложност за решаване на ECDLP чрез пълно изчерпване. Криптографите често избират елиптични криви от голям прост ред, за да осигурят високо ниво на сигурност. Размерът на ключа се определя от дължината в битове на N, като по-дългите ключове (както вече споменахме) осигуряват по-силни гаранции за сигурност. В заключение, при определянето на параметри на ECC-система е важно да се избират криви от достатъчно голям прост ред, за да е устойчива тя на атаки, прилагащи ρ-алгоритъма на Pollard и други подобни (вж. напр. [58]).

3. ***Производителност***: Броят на точките върху елиптична крива влияе на производителността на криптографските операции. Кривите с по-голям брой точки изискват повече изчислителни ресурси и време за генериране на ключове, както и за шифриране и дешифриране. За разлика от тях кривите с по-малък брой точки позволяват по-бързи изчисления и са подходящи за приложения, изискващи работа в реално време или с големи масиви от данни, но разбира се това е за сметка на сигурността, както вече споменахме. Затова предварителното познаване на съответните сценарии за използване позволява постигане на баланс между сигурност и производителност чрез избор на криви с подходящ брой точки.

4. ***Сигурност срещу Производителност***: При избора на елиптични криви за публична криптография се търси компромис между сигурността, размера на ключа и производителността. Кривите с изключително голям брой точки могат да предложат висока сигурност за сметка на по-ниска производителност и по-големи ключове. Обратно, кривите с малък брой точки могат да предложат по-висока производителност, но са по-уязвими при атаки. Криптографите трябва внимателно да оценят и направят необходимите компромиси за да изберат елиптични криви, които отговарят на желаното ниво на сигурност, като същевременно поддържат приемлива производителност.

5. ***Стандартизация***: Стандартизационни органи като National Institute of Standards and Technology (NIST) играят решаваща роля при определянето на насоки за избор на елиптични криви за публична криптография. Тези организации предоставят препоръки относно параметрите на кривата, включително броя на точките, които отговарят на специфични изисквания за сигурност. NIST публикува стандарти за криптография с елиптични криви, включително специфични елиптични криви с дефиниран брой точки, които се считат за сигурни при различни нива на сигурност. Тези стандартизирани криви

преминават стриктно оценяване, за да се гарантира, че предлагат добър баланс между сигурност, размер на ключа и производителност и са подходящи за широко използване в приложения за криптография.

В резюме, броят на точките върху елиптична крива над просто поле е критичен параметър, който влияе върху сигурността, размера на ключа и производителността на криптосистемите. Криптографите трябва много внимателно да вземат предвид последствията, които могат да са следствие от броя на точките върху избраните криви, за да се постигне сигурно и ефективно криптографско решение.

Теглово разпределение на двоичните кодове на Рид-Малер

Глава 3 на дисертацията е посветена на пресмятане тегловото разпределение на двоичния код на Рид-Малер $\mathcal{R}(4,9)$ с дължина 512 от 4−ти ред.

Добре известно е, че тегловото разпределение на линеен код позволява да се определят вероятностите за грешка и за неуспех при декодиране, когато съответният код се използва за предаване на информация по зашумен канал и декодерът прилага алгоритъм за декодиране, базиран на принципа за максимална правдоподобност.

За основните понятия от теория на кодирането се позоваваме на [34]. Кодовете, които разглеждаме тук, са двоични, т.е. над азбуката $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Двоичните кодове на Рид-Малер представляват фундаментален клас кодове за корекция на грешки, които намират приложение в безжичните комуникации. Техните възможности за коригиране на множество произволни грешки позволяват надеждно предаване на данни през огромни разстояния, където влошаването на сигнала поради шум и смущения е неизбежно, и това им отрежда значителна роля в комуникационните системи свързани с далечния космос [37]. Кодовете на Рид-Малер се наричат така според имената на техните изобретатели: David E. Muller, който ги открива през 50-те години на миналия век [40], и Irving S. Reed, който през 1954г. предлага първия ефективен алгоритъм за декодирането им [44], базиран на логически схеми с мажоритарна логика. Въпреки че са известни толкова отдавна, има малко общи резултати относно тегловата им структура, т.е., тегловите разпределения са известни само за:

- кодовете от $1^{ви}$ и $2^{ри}$ ред [51] (1970);

- произволен ред, когато теглото е по-малко от $2d$ [25] (1970), разширено по-късно ([26], 1976) за тегла по-малки от $2.5d$, където d е минималното тегло.

В едно по-ранно изследване [56] са представени резултати за спектрите на теглата на някои кодове от трети ред, а в съвсем скорошната работа [10] се разглеждат спектрите на цели семейства от двоични Рид-Малер кодове. Някои частични резултати относно тегловите разпределения на кодовете на Рид-Малер от трети и четвърти ред са получени в [46], [26], [54] и [53]. За повече информация по този въпрос, касаещ двоичните кодове от този вид с конкретни дължина и ред, на читателя се препоръчва да се обърне към [50].

Тегловият спектър на кода на Рид-Малер от четвърти ред с дължина 512, $\mathcal{R}(4,9)$, е намерен в [10], където е представен като числен пример, който демонстрира разработения там метод. Доколкото ни е известно, има съвсем малко опити да се определи точното теглово разпределение на този код, който е един от изброените най-малки кодове на Рид-Малер, чиито теглови разпределения са неизвестни към 1977 година (виж, [34, p. 447]). Конкретно, в заключителните бележки на докторската си дисертация [46], D. V. Sarwate обсъжда приложимостта на методите, описани от него, към кодовете на Рид-Малер с дължини по-големи от 256. Според неговата оценка има твърде много класове на еквивалентност, състоящи се от съседни класове от желания тип и съобразно това той прави заключението, че намирането на тегловото разпределение на $\mathcal{R}(4,9)$ е недостижимо чрез тези методи. Друг обещаващ подход за атакуване на разглеждания проблем се състои в използването на факта, че се занимаваме с двойночетен двоичен самодуален код и общата форма на нумераторите на теглата на такива кодове е известна от работата на A. M. Gleason (виж, например, [34, Ch.19]). Въпреки че този втори подход се е доказал в случая с по-къси кодове от този вид и изисква скромни изчислителни усилия, за успешното му прилагане се нуждаем от повече съществена информация за $\mathcal{R}(4,9)$ от тази, представена в [25] (виж, [11, Ch. 11] за подробности). Не е ясно също така дали разработеният в [54] инструментариум би могъл да бъде приложен успешно към $\mathcal{R}(4,9)$, тъй като по това време (около 1996г.) класификацията на Булевите форми от четвърта степен на осем променливи не е била налична.

Цели и задачи на дисертационния труд

Целта на настоящата дисертация е разработването на ефективни алгоритмични методи за:

1. Определяне броя на точките върху елиптични криви над просто поле от семействата:

   (а) $\mathcal{E}_p = \{ E_a : y^2 = x^3 + a \pmod p,\ a \neq 0\}$

   (б) $\mathcal{D}_p = \{D_a : y^2 = x^3 + ax \pmod p,\ a \neq 0\}$.

2. Изчисляване на тегловото разпределение на двоичния Рид-Малер код $\mathcal{R}(4, 9)$.

Конкретните задачи за постигането на тези цели са:

1. Да се изведе явна формула за реда на крива от семейството

$$\mathcal{E}_p = \{E_a : y^2 = x^3 + a \pmod p,\ a \neq 0\},$$

   редуциран по модул p.

2. Да се разработи ефективен алгоритъм за едновременно пресмятане на шестте възможни реда, свързани с $\mathcal{E}_p$, при фиксирано $p \equiv 1 \pmod 6$.

3. Да се сравни ефективността на алгоритъма SEA спрямо предложения, и двата работещи върху случая $p \equiv 1 \pmod 6$.

4. Да се изведе явна формула за реда на крива от семейството

$$\mathcal{D}_p = \{D_a : y^2 = x^3 + ax \pmod p,\ a \neq 0\},$$

   редуциран по модул p.

5. Да се разработи ефективен алгоритъм за едновременно пресмятане на четирите възможни реда, свързани с $\mathcal{D}_p$, при фиксирано $p \equiv 1 \pmod 4$.

6. Да се разработи ефективен алгоритъм за пресмятане на тегловото разпределение на двоичния Рид-Малер код $\mathcal{R}(4, 9)$.

Методология на изследването

Методологията на настоящите изследвания се основава на фундаментални резултати от следните области:

- елиптични криви над крайни полета [49]
- теория на вероятностите - задачата за *събирането на купони* [13]
- оценка на изчислителната сложност на алгоритми
- класификация на Булеви функции
- теория на кодирането

Програмните кодове на конструираните алгоритми са написани на следните езици за програмиране от високо ниво - C, C++ и Python. За числените експерименти са използвани и програмни среди за пресмятания като PARI/GP [42] и SageMath [45]. Паралелните пресмятания са реализирани чрез библиотеката за паралелно програмиране Message Passing Interface (MPI) [52], както и чрез C++11 ThreadPool реализацията [1]

Апробация на резултатите

Резултатите, включени в дисертацията, са докладвани на национални и международни семинари:

[T1] Borissov, Y. & Markov, M. *An Approach for Computing the Number of Points on Elliptic Curve* $y^2 = x^3 + a \pmod p$ *via Explicit Formula for That Number Modulo* p 2019 Ninth International Workshop on Signal Design and its Applications in Communications (IWSDA), Dongguan, China, 20-24 October 2019.

[T2] Borissov, Y. & Markov, M. *An Approach for Computing the Number of Points on Elliptic Curve* $y^2 = x^3 + a \pmod p$ *via Exact Formula for That Number Modulo* p Национален семинар по теория на кодирането "Професор Стефан Додунеков", Чифлика, България, 21-24 Ноември 2019.

[T3] Markov, M. & Borissov, Y. *Computing the Number of Points on Elliptic Curves Belonging to One Popular Family: Revisited* 17th International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT), online, Bulgaria, 11-17 October 2020.

[T4] Markov, M. & Borissov, Y. *On the weight distribution of the binary Reed-Muller code $RM(4,9)$* Национален семинар по теория на кодирането "Професор Стефан Додунеков", Арбанаси, България, 10-13 Ноември 2022.

[T5] Markov, M. & Borissov, Y. *Our experience with NCHDC resources, gained in finding the weight distribution of the binary Reed-Muller code $\mathcal{R}(4,9)$* High-Performance Computing for Mathematics and Applications, Sofia, Bulgaria, 28 June 2023.

[T6] Markov, M. & Borissov, Y. *On an Approach for Computing the Weight Distribution of a Binary Reed-Muller Code II* Национален семинар по теория на кодирането "Професор Стефан Додунеков", Хисаря, България, 2-5 Ноември 2023.

[T7] Markov, M. & Borissov, Y. *Weight Distribution of the Binary Reed-Muller Code $\mathcal{R}(4,9)$* The Thirteenth International Workshop on Coding and Cryptography (WCC), Perugia, Italy, 17-21 June 2024.

Списък на публикациите по дисертацията

[P1] Borissov, Y. & Markov, M. *An Approach for Computing the Number of Points on Elliptic Curve $y^2 = x^3 + a \pmod p$ via Explicit Formula for That Number Modulo p* in: *2019 Ninth International Workshop on Signal Design and its Applications in Communications (IWSDA)* (2019), pp. 1—5. https://ieeexplore.ieee.org/document/8966127.

[P2] Markov, M. & Borissov, Y. *Point-Counting on Elliptic Curves Belonging to One Prominent Family: Revisited* in: *2020 Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT)* (2020), pp. 106—109.

[P3] Borissov, Y. & Markov, M. An Efficient Approach to Point-Counting on Elliptic Curves from a Prominent Family over the Prime Field $\mathbb{F}_p$. *Mathematics* **9.** https://www.mdpi.com/2227-7390/9/12/1431 (2021).

[P4] Markov, M. & Borissov, Y. *Weight Distribution of the Binary Reed-Muller Code R(4,9)* in: *2024 The Thirteenth International Workshop on Coding and Cryptography (WCC)* (2024), pp. 288—298. https://wcc2024.sites.dmi.unipg.it/WCC_proceedings.pdf.

Глава 1

Метод за преброяване на точките върху елиптични криви от вида $y^2 = x^3 + a \pmod{p},\ a \neq 0$

Изследването, което се съдържа в тази глава, се основава на работата, представена от нас в статията със заглавие „*An Approach for Computing the Number of Points on Elliptic Curve* $y^2 = x^3 + a \pmod{p}$ *via Explicit Formula for That Number Modulo* p“ [P1] ≅ [4], както и в статията със заглавие „*An Efficient Approach to Point-Counting on Elliptic Curves from a Prominent Family over the Prime Field* $\mathbb{F}_p$“ [P3] ≅ [5].

1.1 Въведение

В [47] е представен ефективен детерминистичен алгоритъм за пресмятане реда (т.е. броя на точките) на дадена елиптична крива от общ тип, чиято сложност е най-много константа по $\log^8 q$ побитови операции, където q е реда на използваното крайно поле. В тази глава обаче интерес представлява цялото семейство от криви

$$\mathcal{E}_p = \{E_a : y^2 = x^3 + a \pmod{p}, a \neq 0\},$$

съдържащо $p - 1$ члена. Ето защо прилагането на алгоритъма на Schoof [47] за намиране редовете на кривите в $\mathcal{E}_p$ е под въпрос, когато p е голямо (въпреки че е осъществимо, вземайки предвид съществуването само на шест еднакво вероятни възможности (вж. Следствие 1.3.4) и задачата за *събирането на купони* от елементарната теория на вероятностите [13]). Подобно съждение е валидно и към стохастичното подобрение на алгоритъма на Schoof, т.е. SEA алгоритъма [47] с очаквано време за изпълнение, евристично, $\tilde{O}(\log^4 p)$.

В тази глава се разглежда задачата за определяне на реда $\#E_a$ на кривата $E_a \in \mathcal{E}_p$ в термините на параметъра a и модула p. Успешно решаване на поставената задача е възможно с помощта на алгоритмичния подход описан в [41], който отнема

$O(\log^3 p)$ побитови операции. Съществува обаче и още по-добър подход, предложен от нас, който е обект на изучаване в главата.

Има две основни разлики между подхода, следван в [41], и описания тук:

- Munuera и Tena предлагат да се използва стохастичен алгоритъм от общ тип [43] за намиране на квадратния корен на произволен квадратичен остатък по модул p, с цел да се пресметне $\sqrt{-3}$, където $p \equiv 1 \pmod 3$. По такъв начин техният алгоритъм става със сложност $O(\log^3 p)$, докато предложеният тук подобрява сложността до $\tilde{O}(\log^2 p)$, дължащо се на използвания ефективен целеви метод за пресмятане на тази специфична стойност;

- Авторите на [41] намират решения на диофантовото уравнение $F(X,Y) = X^2 + XY + Y^2 = 3p$, докато ние постигаме целта си чрез решаване на уравнението $X^2 + 3Y^2 = p$. Ще отбележим само, че и двете последни задачи се решават чрез подходящи прилагания на алгоритъма на Евклид за p и $\sqrt{-3} \bmod p$, така че и двете отнемат $O(\log^2 p)$ побитови операции съгласно оценките за сложност на този алгоритъм (вж. напр. [28] или [57]).

Въз основа на изложените две разлики може да се заключи, че нашият подход е по-добър от този в [41] почти на порядък, въпреки че също е от стохастичен тип.

За аналитично решаване на разглежданата задача препращаме читателя към [27], където са получени конкретни формули за реда на кривата $E_a \in \mathcal{E}_p$ по отношение на представянето на простото число p във вида $p = X^2 + Y^2 - XY$ за някакви цели числа X и Y. Тези формули обаче разглеждат множество отделни случаи, а изчислителната ефективност далеч не е сред основните цели на автора (вж. по-подробно в [27], Теорема 1). Някои частни случаи на тази задача са дадени и като упражнения в [24, Гл. 8, Упр. 15 и 27].

Накрая си струва да се отбележи, че резултатите, получени с помощта на подхода следван в тази глава, са изчерпателни и компактни, въпреки че използват някои отдавна установени факти от теорията на квадратичните разбивания на прости числа. Да отбележим, още, че този подход беше предложен за първи път от нас в [P1] $\cong$ [4], но там неговата ефективност бе демонстрирана само за случая $p \equiv 7 \pmod{12}$, докато в тази глава идеята е допълнително доразвита, усъвършенствана и разработена в пълна цялост.

Глава 1 е организирана, както следва. В Раздел 1.2 се предоставят някои предварителни знания. Раздел 1.3 излага подхода към проблема, включително подобрените оценки за изчислителната сложност при големи p. Раздел 1.4 предоставя пример със специално конструирано просто число за модул и също така обсъжда резултатите от експеримент с програма за сравняване производителността на предложената алгоритмична техника спрямо тази на алгоритъма SEA в разглеждания сценарий. В последния раздел са направени някои заключения.

1.2 Встъпителни бележки

Нека p е просто число, по-голямо от 3, и нека $\mathbb{Z}_p$ е пръстенът от остатъци по модул p, който може също така да бъде идентифициран с крайното поле $\mathbb{F}_p$. Разглеждаме семейството от елиптични криви, дефинирани като

$$\mathcal{E}_p = \{E_a : y^2 = x^3 + a \pmod{p},\ a \in \mathbb{Z}_p^*\},$$

където $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ е мултипликативната група на пръстена $\mathbb{Z}_p$. Целта е да се намери подходящ метод, даващ затворени алгебрични формули за пресмятане на реда на общия член на това семейство, кривата E_a, означаван като $\#E_a$.

Цялото число z се нарича квадратичен остатък по модул p, ако съществува цяло x, такова че $z = x^2 \pmod{p}$. В противен случай z се нарича квадратичен неостатък по модул p. По подобен начин се дефинира остатък (неостатък) от порядък $d > 2$ по модул p, а именно, когато съществува (не съществува) цяло число x, такова че да е изпълнено $z = x^d \pmod{p}$. Множеството на всички остатъци от порядък d лежащи в $\mathbb{Z}_p^*$ образуват подгрупа на $\mathbb{Z}_p^*$. Ще означаваме подгрупите от квадратичните и кубичните остатъци ($d = 2, 3$) по модул p съответно с $\mathcal{QR}_p$ и $\mathcal{CR}_p$.

Дефиниция 1.2.1 ***Символ на Лежандър****: За дадено нечетно просто число p и цяло число a, символът на Лежандър $(\frac{a}{p})$ се дефинира по следния начин:*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ако } a \text{ е квадратичен остатък по модул } p \text{ и } a \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ -1 & \text{ако } a \text{ е квадратичен неостатък по модул } p, \\ 0 & \text{ако } a \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Теорема 1.2.2 *Броят N на точките върху елиптичната крива $y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$ е*

$$N = p + 1 + \sum_{x=0}^{p-1} (\frac{x^3 + ax + b}{p}),$$

където $(\frac{r}{p})$ е символът на Лежандър.

Дефиниция 1.2.3 *Най-малък неотрицателен остатък ($\mathcal{LNR}$) на цяло число z по модул друго (нечетно) цяло число m: Ако $z \equiv a \pmod{m}$ и $0 \leq a \leq m-1$, тогава a се нарича най-малък неотрицателен остатък на z по модул m.*

Дефиниция 1.2.4 *Най-малък по абсолютна стойност остатък ($\mathcal{ALR}$) (минимален остатък) на цяло число z по модул друго (нечетно) цяло число m: Под най-малък по абсолютна стойност остатък на $z \pmod{m}$ имаме предвид този остатък на z, който лежи между $-\frac{1}{2}m$ и $\frac{1}{2}m$. Той е положителен или отрицателен в зависимост от това дали най-малкият неотрицателен остатък на $z \pmod{m}$ лежи съответно между 0 и $\frac{1}{2}m$ или между $\frac{1}{2}m$ и m.*

Означенията „$\equiv$“ за сравнимост по модул p и „$=$“ в $\mathbb{Z}_p$ ще бъдат използвани взаимозаменяемо, в зависимост от контекста.

Следващият факт е непосредствено разширение на известния критерий на Ойлер от елементарната теория на числата (вж., например, [19] гл. 7.5).

Твърдение 1.2.5 *Ако d дели $p-1$, тогава мономът $\mathbf{m}(z) = z^{\frac{p-1}{d}}$ приема точно d различни стойности в $\mathbb{Z}_p^*$, всяка от които $\frac{p-1}{d}$ пъти. Тези стойности са d-тите корени на единицата в $\mathbb{Z}_p^*$. В частност, $\mathbf{m}(z)$ е равно на 1 тогава и само тогава, когато z е остатък от порядък d по модул p.*

Добре известно е, че $-3 \in \mathcal{QR}_p$ тогава и само тогава, когато $p \equiv 1 \pmod{3}$. (Едно кратко доказателство на този факт може да се получи, като се използва например законът за квадратичната реципрочност.) Да отбележим също, че в този случай $\sqrt{-3} \mod p$ приема две стойности, които се различават с точност до знак.

Следващото твърдение е от съществено значение за ефективността на нашия подход и показва как да намерим поне един от исканите квадратни корени.

Твърдение 1.2.6 *Нека z е кубичен неостатък по модул p, където $p \equiv 1 \pmod{3}$. Тогава $2z^{\frac{p-1}{3}} + 1$ е равно на един от квадратните корени $\sqrt{-3} \mod p$.*

Забележка 1.2.7 *От Твърдение 1.2.5 (при $d = 3$) лесно може да се заключи, че когато $p \equiv 1 \pmod 3$, броят на елементите на множеството от кубични неостатъци по модул p е равен на $\frac{2}{3}(p-1)$. От последното може да се направи извода, че случайно избран елемент от $\mathbb{Z}_p^*$ е кубичен неостатък с вероятност от $2/3$. Следователно, при наличието на висококачествен генератор на случайни цели числа в интервала $[2, p-1]$, кубичен неостатък може да бъде намерен чрез средно 1.5 опита. По този начин, квадратните корени на -3 по модул p могат да бъдат ефективно определени с помощта на Твърдение 1.2.6.*

Следващото твърдение е факт от математическия фолклор и също се използва в нашия подход към поставената задача.

Твърдение 1.2.8 *За нечетно просто число p, нека*

$$S_k(p) = 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k,$$

където $k = 0, 1, \ldots$. Тогава е валидно:

$$S_k(p) \pmod p = \begin{cases} 0, & \text{ако } k \not\equiv 0 \pmod{p-1} \\ -1, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Няма явна формула за броя на точките върху елиптична крива над $\mathbb{Z}_p$ от общ тип. Най-подходящият и добре известен резултат в тази посока е следната граница (вижте, напр., [58] гл. 4).

Теорема 1.2.9 (Хасе) *Броят на точките N върху елиптична крива над $\mathbb{Z}_p$ удовлетворява неравенството*

$$|(N-1) - p| \leq 2\sqrt{p}.$$

В края на този раздел, припомняме един необходим факт от теорията на квадратичните разбивания на прости числа. Това е отдавна известен резултат, който дължим на Якоби (1827), и по-късно доразвит от Щерн (1832) (вижте, [16] том III, стр. 55 за исторически подробности).

Твърдение 1.2.10 *Ако p е просто число от вида $p = 6k + 1$, такова че $p = X^2 + 3Y^2$, тогава*

$$\pm 2X = \frac{(2k+1)\ldots(3k)}{k!} \pmod p,$$

където знакът е такъв, че $\pm X \equiv 1 \pmod 3$.

Ще използваме Твърдение 1.2.10 и Равенство 1.9, за да пресметнем биномния коефициент по модул p в Израз 1.7, като вземем подходящото X от решенията на квадратното диофантово уравнение $X^2 + 3Y^2 = p$.

1.3 Описание на метода

Следното твърдение помага недвусмислено да се намери броя N на точките върху дадена елиптична крива, при условие че може да се пресметне минималният по абсолютна стойност остатък на $(N-1)$ по модул p, означен като $\mathcal{ALR}(N-1,p)$.

Твърдение 1.3.1 *В означенията на Теорема 1.2.9, за просто число* $p \geq 17$*, е валидно:*

$$N = \mathcal{ALR}(N-1,p) + p + 1.$$

Между $\mathcal{ALR}$ и $\mathcal{LNR}$ има очевидна връзка, която се използва на определен етап в пресмятанията:

Забележка 1.3.2 *Ако се пресметне най-малкият неотрицателен остатък* R *на цяло число* z *при деление на нечетно* m*, то може лесно да се получи:*

$$\mathcal{ALR}(z,m) = \begin{cases} R, & \text{ако } R < \frac{m}{2} \\ R-m, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

1.3.1 Явна формула за реда на елиптичната крива $E_a \in \mathcal{E}_p$ редуциран по модул p

Като изключим точката в безкрайността и вземем предвид дефиницията на символа на Лежандър, за мощността $\#E_a - 1 = N'$ на множеството от „реални“ точки, лежащи върху кривата $E_a \in \mathcal{E}_p$, се получава следният израз:

$$N' = \sum_{x=0}^{p-1}[1 + (\frac{x^3+a}{p})] = p + \sum_{x=0}^{p-1}(\frac{x^3+a}{p}). \tag{1.1}$$

След това, като редуцираме Равенство 1.1 по модул p и използваме критерия на Ойлер, получаваме:

$$N' \equiv \sum_{x=0}^{p-1}(\frac{x^3+a}{p}) \equiv [(\frac{a}{p}) + h(a,p)] \pmod{p}, \tag{1.2}$$

където с $h(a,p)$ е означена сумата $\sum_{x=1}^{p-1}(x^3+a)^{\frac{p-1}{2}}$.

По-нататък, като развием биномите и променим реда на сумиране, получаваме:

$$h(a,p) = \sum_{x=1}^{p-1}\sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{i} x^{3(\frac{p-1}{2}-i)}a^i =$$

$$\sum_{x=1}^{p-1} x^{3\frac{p-1}{2}} + \binom{\frac{p-1}{2}}{1} a\sum_{x=1}^{p-1} x^{3\frac{p-3}{2}} + \ldots + \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-3}{2}} a^{\frac{p-3}{2}}\sum_{x=1}^{p-1} x^3 + a^{\frac{p-1}{2}}\sum_{1}^{p-1} 1 \tag{1.3}$$

Тъй като последното събираемо по-горе е равно на $a^{\frac{p-1}{2}}(p-1) \equiv -(\frac{a}{p}) \pmod{p}$, Сравнение 1.2 се опростява до

$$N' \equiv H(a,p) \pmod{p}, \tag{1.4}$$

където изразът за $H(a,p)$ се получава от (1.3) чрез премахване на това последно събираемо. И така, за броя на точките върху елиптична крива, без точката в безкрайността, се получава следната конгруенция:

$$\#E_a - 1 \equiv H(a,p) \pmod{p}, \tag{1.5}$$

където

$$H(a,p) = \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{i} a^i S_{3l}(p), \tag{1.6}$$

с $l = \frac{p-1}{2} - i$ и суми $S_{3l}(p)$, дефинирани в Твърдение 1.2.8.

След това, при оценката на $H(a,p) \pmod{p}$ с помощта на Твърдение 1.2.8, се забелязва, че участващите степени са кратни само на 3 и лежат в интервала $[3, 3\frac{p-1}{2}]$. Така че има два различни случая, които трябва да се разгледат:

- $p \equiv 5 \pmod 6$
  В този случай от Твърдение 1.2.8 следва, че всички събираеми от дясната страна на Равенство 1.6 са равни на 0 по модул p. Така че $H(a,p) \equiv 0 \pmod p$ и в резултат за всяко a е в сила: $\#E_a = p+1$. Действително това е добре известен факт (вижте, напр., [24] Гл. 18, Пример 1).

- $p \equiv 1 \pmod 6$
  В този съществен случай лесно може да се види, че $H(a,p)$ съдържа точно едно ненулево събираемо по модул p, а именно това, което се получава при $i = \frac{p-1}{6}$. Така че е валидно следното:

$$H(a,p) \equiv \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} a^{\frac{p-1}{6}} S_{p-1}(p) \equiv$$

$$-\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} a^{\frac{p-1}{6}} \pmod p. \tag{1.7}$$

Накрая, заедно с Твърдение 1.3.1, това води до следното:

Теорема 1.3.3 *За просто число $p \geq 19$, такова че $p \equiv 1 \pmod 6$, важи:*

$$\#E_a = \mathcal{R}(a,p) + p + 1, \tag{1.8}$$

където с $\mathcal{R}(a,p)$ е означен най-малкият по абсолютна стойност остатък на Израз 1.7.

Непосредствено следствие (с изключение на тривиалните случаи $p = 7, 13$) от Твърдение 1.2.5 при $d = 6$ и Теорема 1.3.3 е следващото.

Следствие 1.3.4 *Ако p е просто число $\equiv 1 \pmod 6$, то редът на кривите от $\mathcal{E}_p$ приема точно шест различни стойности, всяка една от които $\frac{p-1}{6}$ пъти в съответствие с шестите корени на единицата в $\mathbb{Z}_p^*$: $\pm 1, \pm\zeta, \pm(\zeta + \sqrt{-3})$, където $\zeta = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.*

Забележка 1.3.5 *Въпреки че твърдението в Следствие 1.3.4 е известно под една или друга форма (вижте, например, [6]), изглежда, че равномерното разпределение на реда на кривите не е широко обсъждано в литературата.*

1.3.2 Изчислителни аспекти на преброяването на точките в $\mathcal{E}_p$ когато p е голямо просто число

Съобразно развитата в предния параграф техника ключова част от пресмятанията е тази на $\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} \pmod p$. Ефективно решение за това пресмятане може да се намери, като се забележи, че когато p е от вида $6k+1$, то е в сила:

$$\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{6}} = \frac{(2k+1)\dots(3k)}{k!}. \tag{1.9}$$

Твърдение 1.2.10 позволява модулното пресмятане на интересуващия ни биномен коефициент да бъде извършено чрез вземане на подходящото X от решенията на квадратното диофантово уравнение $X^2+3Y^2=p$. Едно такова решение може да се намери чрез прилагане на метод, сходен с този, който е описан в [59]. А именно, последният се състои от следните две стъпки:

Стъпка 1. Намиране на квадратен корен от -3 в $\mathbb{Z}_p^*$;

Стъпка 2. Намиране на X, прилагайки (частично) алгоритъма на Евклид за p и вече намерения $\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}_p^*$.

Както следва от Твърдение 1.2.6, *Стъпка 1* може да бъде изпълнена, ако предварително се знае кубичен неостатък по модул p. Ако за дадено p такъв неостатък не е наличен, той може да бъде намерен след средно 1.5 опита, следвайки Забележка 1.2.7. При всеки опит със случайно избрано цяло число $z \in [2, p-1]$ се пресмята в $\mathbb{Z}_p$ елемента $z' = z^{\frac{p-1}{3}}$ и се проверява дали $z' \neq 1$. Ако това се случи, тогава $2z'+1$ е един от възможните необходими $\sqrt{-3} \mod p$. Така че взимайки предвид сложността на едно умножение (или повдигане в квадрат) (вижте, например, [20, 12]), очакваното количество работа в *Стъпка 1* е евристично $\tilde{O}(\log^2 p)$. Освен това *Стъпка 2* е със сложност $O(\log^2 p)$ (вижте например [57] Теорема 3.13 за подробности).

Забележка 1.3.6 *Ако $p \equiv 7 \pmod{12}$ лесно може да се види, че $\sqrt{\zeta} = \zeta^{\frac{p+1}{4}}$, където ζ е квадратичен остатък $/(\zeta^{\frac{p+1}{4}})^2 = \zeta^{1+\frac{p-1}{2}} = \zeta \cdot \zeta^{\frac{p-1}{2}} = \zeta/$. Това означава, че има ефективен детерминистичен начин за намиране на квадратен корен в съответното просто поле, а именно като се пресметне $\zeta^{\frac{p+1}{4}}$. В частност той е приложим и за $\zeta = -3$. (вижте [P1] $\cong$ [4]).*

Освен това както лесно се вижда от Следствие 1.3.4, шестте възможни различни стойности на втория множител в Израз 1.7, а именно $a^{\frac{p-1}{6}}$, могат да се изразят линейно чрез вече намерения $\sqrt{-3}$.

В заключение, разгледаните съображения доказват валидността на следната теорема:

Теорема 1.3.7 *Общата изчислителна сложност за едновременно намиране на шестте реда, свързани със семейството $\mathcal{E}_p$, чрез предложената алгоритмична техника, е $\tilde{O}(\log^2 p)$.*

1.3.3 Сравнение на ефективността спрямо алгоритъма SEA

Напомняме, че теоретичната оценка за сложността на алгоритъма SEA е $\tilde{O}(\log^4 p)$, докато нашата алгоритмична процедура е със сложност $\tilde{O}(\log^2 p)$ (вижте Теорема 1.3.7).

При проведените програмни експерименти за сравняване ефективността на алгоритъма SEA спрямо предложения, и двата работещи върху разгледания случай на задачата, е използван стандартен лаптоп с процесор Intel Core i7-6820HQ при 2,7 GHz (четири ядра). Реализацията на предложения алгоритъм е написана на Python, докато тази на SEA е високо оптимизиран код на C от системата за компютърна алгебра PARI/GP, предназначена специално за бързи изчисления в теорията на числата.

В Таблица 1.1 е даден списък на 257-битовите прости числа, използвани като входни данни за експериментите.

Таблица 1.1 Прости числа $p_i,\ i = 1, ..., 10$

p_i	**Prime Number (HEX)**
p_1	1744AA82FB357A0A99A571EABF8E72B860517859044F993E2606ECAF7BC6CB169
p_2	1032FAF22DC31F3E339E3F0CAC8BF44F21B383D3A687A41326A4CC77EAC31D881
p_3	19C7E604E23D3DEF8A371353FD8EFA4C9F7503083CD2FCE2EA7FEF1120EC3B3E9
p_4	1750F9C8F1490EEDC1B05F0CA012ED4B42925C588AA5FFCC285F84E802EA71C65
p_5	161D8802C08AC9AB133B20100B50C4CF1710A7BEDBA3292B56567D996DE3CEF4D
p_6	1BF6DA0DA929F9784E07C6835AD78389B06CBD5FB776F9F2371AC79B7C7FC1B6D
p_7	1946A87890B83A015439E75B2BA2C20C9D742E7A85B592815A5D6C11DDACD4695
p_8	1819AA8747CF5595260B5A3D7FF8E800DD365E21E26DEBC306F7E48B12C2E2A29
p_9	18864DC62E42429367F6826C5F2AAF1401875EA94E1DA3D70DB1BB7D049F90525
p_{10}	1304670800156954405D850ABD3086D0E8AC7B898E4CC9F18000CF2B9087DBD15

Както се вижда от Таблица 1.2, нашият метод е между 20 и 67 пъти по-бърз, въпреки че реализацията не е оптимизирана.

Таблица 1.2 Сравнение на ефективността

Test №	**Prime p_i**	**SEA Execution Time (ms)**	**Our Method Execution Time (ms)**
1	p_1	829.7	12.4
2	p_2	251.8	12.3
3	p_3	636.4	12.2
4	p_4	430.9	11.5
5	p_5	436.8	11.1
6	p_6	284.7	12.3
7	p_7	355.4	10.9
8	p_8	558.0	12.2
9	p_9	398.1	11.1
10	p_{10}	393.2	11.1

При проведен експеримент със случайно 857−битово просто число, SEA изчислява реда за $22,5$ секунди, докато разработената от нас програма извършва работата за $33,1$ милисекунди, т.е. почти 680 пъти по-бързо. Това показва, че методът е много по-ефективен от алгоритъма SEA за големи прости числа, да кажем, над 800 бита.

В съвременната литература са описани формули за пресмятане на реда на елиптични криви над крайни полета (вижте например [58, 49, 27], и т.н.). В тази глава е изведена явна формула за реда на крива от семейството

$$\mathcal{E}_p = \{E_a : y^2 = x^3 + a \pmod{p}, a \neq 0\},$$

редуциран по модул p. Освен това описаният подход позволява определяне на спектъра от редове при фиксирано $p \equiv 1 \pmod 6$, както и предоказва съответния известен факт в допълващия случай $p \equiv 5 \pmod 6$. Освен това въз основа на класическите резултати за квадратични разбивания на прости числа е описан ефективен алгоритъм (със сложност $\tilde{O}(\log^2 p)$) за едновременно пресмятане на шестте реда, свързани с $\mathcal{E}_p$. Експерименталните резултати потвърждават теоретичните оценки за ефективност, с очаквани леки отклонения поради все още неоптимизираната реализация. Тази техника подобрява с почти един порядък най-доброто известно досега алгоритмично решение, предложено от Munuera и Tena в [41] през 1993г., позволявайки при същите разходи да се постигнат стойности на параметъра p, характерни за ECC системи с по-висока сигурност.

Резултатите, получени в тази глава, са докладвани на „*2019 Ninth International Workshop on Signal Design and its Applications in Communications (IWSDA)*, Dongguan, China, 20-24 October 2019“ [T1], както и на „*Национален*

семинар по теория на кодирането "Професор Стефан Додунеков", Чифлика, България, 21-24 Ноември 2019“ [T2].

Глава 2

Метод за преброяване на точките върху елиптични криви от вида $y^2 = x^3 + ax \pmod{p},\ a \neq 0$

Изследването, което се съдържа в тази глава, се основава на работата, представена от нас в статията със заглавие „*Point-Counting on Elliptic Curves Belonging to One Prominent Family: Revisited*“ [P2] ≅ [35].

2.1 Въведение

Съществува ефективен алгоритъм (SEA), който изчислява реда на дадена елиптична крива от общ тип (вижте например [47]). В тази глава обаче интерес представлява цялото семейството от криви

$$\mathcal{D}_p = \{D_a : y^2 = x^3 + ax \pmod{p},\ a \neq 0\}$$

с мощност $p-1$, и директното прилагане на споменатия алгоритъм, за намиране редовете на всички криви в $\mathcal{D}_p$, не е осъществимо при големи стойности на p. Затова са необходими затворени алгебрични формули, по отношение на параметрите a и p, които решават интересуващата ни задача.

Едно алгоритмично решение, за което научихме неотдавна, е дадено в [41], а именно за случая на елиптични криви с $j-$инвариант 1728. Но както авторите на [41] са отбелязали, техният алгоритъм изисква $O(\log^3 p)$ битови операции, докато нашият подход подобрява сложността до $\tilde{O}(\log^2 p)$.

Също така следва да се отбележи, че подходът, следван в настоящата глава, е подобен на решението на същата задача, относно семейството от елиптични криви

$$\mathcal{E}_p = \{E_a : y^2 = x^3 + a \pmod{p}\ a \neq 0\}$$

[P1] $\cong$ [4], и работи еднакво успешно и в двата случая, тъй като получените резултати са изчерпателни и компактни, въпреки че използват някои отдавна установени факти от теорията на квадратичните разбивания на прости числа. Поради тази причина главата е по-кратка.

2.2 Встъпителни бележки

Целта ни е да опишем подход за определяне на реда на обща крива D_a от семейството $\mathcal{D}_p$ в зависимост от a и p.

За удобство на читателите припомняме едно основно свойство на символа на Лежандър, изложено тук като лема.

Лема 2.2.1 *За всяко цяло число z е в сила:* $(\frac{z}{p}) \equiv z^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Лема 2.2.1 е общоизвестна като критерий на Ойлер за определяне дали цялото число z е квадратичен остатък по модул p.

Ще припомним също един по-малко известен отдавнашен, но полезен факт, дължащ се на К.Ф. Гаус (вижте, [15, том II, стр. 234] за исторически подробности).

Твърдение 2.2.2 *(***Наблюдение на Гаус***) Ако простото число $p = 4k + 1$ се представи във вида $X^2 + Y^2$, където X е нечетно, а Y е четно, то $\pm X$ е равно на най-малкия по абсолютна стойност остатък (т.е., $\mathcal{ALR}$) по модул p на*

$$\frac{1}{2}\,\frac{(k+1)\ldots(2k)}{k!},$$

и този остатък е положителен или отрицателен в зависимост от това дали положителната стойност на X е от вида $4m + 1$ или $4m + 3$.

Скорошна дискусия относно това наблюдение на Гаус може да бъде намерена в [33, стр. 192, 202] (вижте също [24, Гл. 8, Упр. 26]).

2.3 Описание на подхода

Най-напред ще напомним, че Твърдение 1.3.1 позволява недвусмислено да се намери броя N на точките върху дадена елиптична крива, при условие че може да се пресметне минималният по абсолютна стойност остатък на $(N - 1)$ по модул p, означаван като $\mathcal{ALR}(N - 1, p)$.

2.3.1 Явна формула за реда на елиптичната крива $D_a \in \mathcal{D}_p$, редуциран по модул p

Нека, за удобство, $N' = \#D_a - 1$ за фиксирана крива $D_a \in \mathcal{D}_p$. Действайки по сходен начин, както в Раздел 1.3.1, лесно получаваме:

$$N' \equiv h(a,p) \pmod{p}, \tag{2.1}$$

където

$$h(a,p) = \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{\frac{p-1}{2}}{i} a^i S_{k(i)}(p). \tag{2.2}$$

Тук са използвани означенията $S_{k(i)}(p)$ за сумите от степените на целите положителни числа, въведени в Твърдение 1.2.8, където $k(i) = 3\frac{p-1}{2} - 2i$.

По-нататък оценяваме $h(a,p) \pmod{p}$, като използваме Твърдение 1.2.8 и забелязваме, че въвлечените степени са само нечетните (или само четните) цели числа от интервала $[\frac{p-1}{2}, 3\frac{p-1}{2}]$. Следователно има два различни случая, които трябва да бъдат разгледани:

- $p \equiv 3 \pmod 4$
  В този случай няма индекс i, за който $k(i) = p-1$, и от Твърдение 1.2.8 следва, че всички събираеми в дясната страна на уравнение (2.2), редуцирани по модул p, са равни на 0. Така, че $h(a,p) \equiv 0 \pmod{p}$, и Сравнение (2.1) заедно с границата на Хасе водят до $N' = p$. Следователно за всяко a е изпълнено $\#D_a = p+1$, което е добре известен факт (вижте, например, [24, Гл. 18.4, Теорема 5]);

- $p \equiv 1 \pmod 4$
  В този съществен случай е лесно да се види, че изразът (2.2) съдържа точно едно ненулево събираемо, а именно когато $i = \frac{p-1}{4}$. Следователно според Твърдение 1.2.8 е валидно:

$$h(a,p) \equiv \binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}} a^{\frac{p-1}{4}} S_{p-1}(p) \equiv -\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}} a^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

или според Сравнение (2.1) еквивалентното:

$$N' \equiv -\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}} a^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}. \tag{2.3}$$

Накрая, от Сравнение (2.3), Твърдение 1.3.1 и забележката след него, директно извеждаме основния резултат на тази глава.

Теорема 2.3.1 *За просто число $p \geq 17$, такова че $p \equiv 1 \pmod 4$, важи:*

$$\#D_a = \begin{cases} p + 1 + \mathcal{R}(a,p), & \text{ако } \mathcal{R}(a,p) < \frac{p}{2} \\ 1 + \mathcal{R}(a,p), & \text{в противен случай,} \end{cases} \tag{2.4}$$

където $\mathcal{R}(a,p)$ представлява най-малкия неотрицателен остатък на дясната страна на Сравнение (2.3).

2.3.2 Спектърът на $\#D_a$, когато a варира в $\mathbb{Z}_p^*$

Следното твърдение характеризира по-прецизно възможните редове на криви в съществения случай $p \equiv 1 \pmod 4$.

Твърдение 2.3.2 *Ако $p \equiv 1 \pmod 4$ е просто число ≥ 17, то редът на кривите от $\mathcal{D}_p$ приема точно четири различни стойности, всяка една от които $\frac{p-1}{4}$ пъти, в съответствие с четвъртите корени на единицата в $\mathbb{Z}_p^*$: $\pm 1, \pm\sqrt{-1}$.*

Забележка 2.3.3 *Като непосредствено следствие от Теорема 4.23 в [58], може да се изведе, че редът на всяка елиптична крива от семейството $\mathcal{D}_p$ винаги е четно число, което не може да се види директно от Теорема 2.3.1.*

2.3.3 Изчислителни аспекти на преброяването на точките в $\mathcal{D}_p$, когато p е голямо просто число

По-долу е описан ефективен подход за пресмятане на редовете на кривите в $\mathcal{D}_p$, когато p е голямо просто число.

Ключов момент в този изчислителен процес е пресмятането на $\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}} \pmod p$.

Тази задача може да бъде решена с помощта на Твърдение 2.2.2, като забележим, че ако p е от вида $p = 4k + 1$, то тогава е валидно:

$$\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4}} = \frac{(k+1)\dots(2k)}{k!}.$$

Следователно, това твърдение позволява модулното пресмятане на интересуващия ни биномен коефициент да се извърши чрез решаване на квадратното диофантово уравнение $X^2 + Y^2 = p$. Решението може да бъде намерено чрез метод, представен в [8], който е значително опростен в сравнение с този, открит по-рано от Сере и Ермит [48, 21]. Накратко, методът се състои от следните две стъпки:

- *Стъпка 1.* Намиране на квадратен корен от -1 в $\mathbb{Z}_p^*$;
- *Стъпка 2.* Намиране на нечетното X чрез прилагане на алгоритъма на Евклид за p и вече намерения $\sqrt{-1} \in \mathbb{Z}_p^*$.

Стъпка 1 може да бъде изпълнена ефективно, ако е известен предварително квадратичен неостатък по модул p (за подробности как да се избере или намери такъв неостатък, вижте например [8, *Забележка, стр.1012*]).

Тук ще дискутираме един друг общ подход това да се осъществи. А именно, въз основа на Твърдение 1.2.5 (Лема 2.2.1), квадратен корен от -1 по модул p може да бъде намерен след средно два опита, при условие че е наличен висококачествен генератор на случайни цели числа в интервала $I_p = [2, p-1]$. Всеки един от тези опити се състои от пресмятане, за произволно избрано $\mathcal{R} \in I_p$, на елемента $\mathcal{R}' = \mathcal{R}^{\frac{p-1}{4}}$, както и проверка дали последният е различен от ± 1. Ако това се случи, то $\mathcal{R}'$ е търсеният $\sqrt{-1}$. (Читателят се препраща към [60, Гл. 10] или към ранната работа [2] за допълнително обосноваване на този вероятностен подход.) Грубо казано, работата в *Стъпка 1* е пропорционална на $\log p \log^2 p$. Да напомним също, че *Стъпка 2* има горна граница на изчислителната сложност $O(\log^2 p)$, което вече беше споменато в **Глава 1** (вижте например [57, Теорема 3.13]).

Имайки предвид Твърдение 2.3.2, за да намерим едновременно четирите реда, свързани със семейството $\mathcal{D}_p$, може да следваме следния подход. След като пресметнем $2X$, умножаваме резултата по вече намерения $\sqrt{-1}$ и след това вземаме противоположните стойности по модул p. В заключение, общата сложност на задачата за определяне на интересуващите ни редове е $\tilde{O}(\log^2 p)$.

Преразглеждайки задачата за пресмятане реда на елиптична крива от семейството $\mathcal{D}_p$, намерихме опростена явна формула, когато този ред се редуцира

по модул p. Въпросната формула, в комбинация със знаменитата граница на Хасе, решава задачата изчерпателно и кратко. Освен това, въз основа на класическите резултати за квадратичните разбивания на прости числа, описваме ефективна техника, със сложност най-много $\tilde{O}(\log^2 p)$, за едновременно пресмятане на четирите възможни редове на кривите от $\mathcal{D}_p, p \equiv 1 \pmod 4$. Следователно предложеният подход подобрява най-доброто известно досега решение почти на порядък.

Резултатите, получени в тази глава, са докладвани на „*17th International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT)*, online, Bulgaria, 11-17 October 2020“ [T3].

Глава 3

Теглово разпределение на двоичния код на Рид-Малер $\mathcal{R}(4, 9)$

Изследването, което се съдържа в тази глава, се основава на работата, представена от нас в статията със заглавие „*Weight Distribution of the Binary Reed-Muller Code R(4,9)*“ [P4] $\cong$ [36].

3.1 Основни понятия

Нека $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ е крайно поле с два елемента, а $\mathbb{F}_2^n$ е $n-$мерното векторно пространство над $\mathbb{F}_2$. Булева функция f на n променливи е изображение на $\mathbb{F}_2^n$ в $\mathbb{F}_2$. Нека с B_n да означим множеството от всички булеви функции на n променливи. Да отбележим, че мощността му е $|B_n| = 2^{2^n}$. Булевите функции имат различни представяния, някои от които канонични (вектор), а други не (формули, схеми от функционални елементи, хиперкуб).

Всяка булева функция на n променливи може да бъде представена като множество от 2^n наредени двойки, първият елемент на които е $n-$битов вектор, т.е. елемент на $\mathbb{F}_2^n$, а вторият, булева стойност (0 или 1).

Таблицата на истинност на булева функция f може да бъде представена чрез вектор, чиито координати са стойностите на функцията за всеки $n-$битов

вход $T_f = \{f(0,\ldots,0), f(0,\ldots,0,1),\ldots,f(1,\ldots,1)\}$, допускайки имплицитно, че входните вектори са подредени лексикографски. Това е *каноничното* представяне на булева функция. Броят на единиците в последния стълб на таблицата на истинност T_f се нарича *Хеминго̀во тегло* на f, означено с $wt(f)$. *Хеминговото разстояние* между две булеви функции $f, g \in B_n$ се означава с $d(f,g)$ и е равно на $wt(f+g)$. Това означава, че *Хеминговото разстояние* е мощността на множеството $\{x \in \mathbb{F}_2^n |\ f(x) \neq g(x)\}$.

Булевите функции се представят също така уникално и чрез полиноми на много променливи, наречени *алгебрична нормална форма* (ANF):

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{u\in\mathbb{F}_2^n} a_u x^u, \tag{3.1}$$

където $x^u = x_1^{u_1} x_2^{u_2} \cdots x_n^{u_n}$ е *моном*, съставен от променливите за които $u_i = 1$ и $a_u \in \mathbb{F}_2$. Това представяне се нарича също така *полином на Жегалкин* на f.

Дефиниция 3.1.1 *Степен на булева функция, означена с d_f, е степента на монома с най-висока степен в ANF представянето.*

За по-задълбочени познания относно булевите функции и тяхното приложение в теория на кодирането и криптографията, насочваме читателя към [9] и [14].

Дефиниция 3.1.2 *Тегло (по Хеминг) на двоичен вектор $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n$, означавано с $wt(\underline{x})$, се нарича броят на ненулевите координати на вектора, т.е. на координатите, равни на* 1*:*

$$wt(\underline{x}) = |\{i|\ x_i = 1\}|.$$

Дефиниция 3.1.3 *Разстояние (по Хеминг) между два двоични вектора $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ от $\mathbb{F}_2^n$, означавано с $d(\underline{x}, \underline{y})$, се нарича броят на координатите, в които те се различават:*

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = |\{i|\ x_i \neq y_i\}|.$$

Дефиниция 3.1.4 *Под сума на векторите $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ от $\mathbb{F}_2^n$, означавана с $\underline{x} + \underline{y}$, ще разбираме вектора*

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

принадлежащ на $\mathbb{F}_2^n$.

Дефиниция 3.1.5 *Под скаларно произведение на векторите* $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *от* $\mathbb{F}_2^n$, *означавано с* $(\underline{x}, \underline{y})$ *или* $\underline{x} \cdot \underline{y}$, *ще разбираме елемента*

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

принадлежащ на $\mathbb{F}_2$.

Два вектора са *ортогонални*, ако скаларното им произведение е равно на 0.

Дефиниция 3.1.6 *Под умножение на вектор* $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *от* $\mathbb{F}_2^n$ *със скалар* $a \in \mathbb{F}_2$, *означавано с* $a\underline{x}$, *ще разбираме вектора*

$$a\underline{x} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n),$$

принадлежащ на $\mathbb{F}_2^n$.

Теорема 3.1.7 *(Критерий за подпространство) Множеството* $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ *е подпространство на* $\mathbb{F}_2^n$ *тогава и само тогава, когато са изпълнени следните две условия:*

(1) $\forall \underline{x}, \underline{y} \in C \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \in C$

(2) $\forall a \in \mathbb{F}_2$ *и* $\forall \underline{x} \in C \Rightarrow a\underline{x} \in C$

Дефиниция 3.1.8 *Ако* $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ *са вектори от* $\mathbb{F}_2^n$ *и* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *са скалари от* $\mathbb{F}_2$, *то векторът*

$$a_1\underline{x}_1 + a_2\underline{x}_2 + \cdots + a_k\underline{x}_k \in \mathbb{F}_2^n$$

се нарича линейна комбинация на $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ *с координати* $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Теорема 3.1.9 *Ако* $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ *са вектори от* $\mathbb{F}_2^n$, *то множеството от всички линейни комбинации на* $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ *е подпространство на* $\mathbb{F}_2^n$.

Подпространството от Теорема 3.1.9 се нарича *линейна обвивка* на $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$.

Дефиниция 3.1.10 *Векторите* $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in \mathbb{F}_2^n$ *се наричат линейно зависими, ако съществуват скалари* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{F}_2$, *поне единият от които е различен от* 0, *за които*

$$a_1\underline{x}_1 + a_2\underline{x}_2 + \cdots + a_k\underline{x}_k = 0$$

Ако $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ не са линейно зависими, то те се наричат *линейно независими.*

Дефиниция 3.1.11 *Нека C е подпространство на $\mathbb{F}_2^n$. Множеството от вектори $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in C$ се нарича пораждащо за C, ако всеки вектор на C може да се представи като линейна комбинация на $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$.*

Дефиниция 3.1.12 *Базис на подпространството $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ наричаме всяко пораждащо множество за C, което се състои от линейно независими вектори.*

Теорема 3.1.13 *Ако $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ и $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \in C$ е базис на C, то:*

(1) всеки вектор от C може да се представи еднозначно като линейна комбинация на базисните вектори $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$;

(2) C съдържа точно 2^k вектора.

От Теорема 3.1.13 следва, че ако $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ е подпространство с 2^k елемента, то всеки базис на C съдържа точно k линейно независими вектора.

Дефиниция 3.1.14 *Броят на векторите в кой да е базис на подпространството $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ се нарича размерност на C и се означава с $dim(C)$.*

Следователно $|C| = 2^k \iff dim(C) = k$ и, в частност, $dim(\mathbb{F}_2^n) = n$, тъй като $|\mathbb{F}_2^n| = 2^n$.

Нека $V = \mathbb{F}_2^n$ е n-мерното векторно пространство над крайното поле $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Всяко непразно подмножество $\mathbf{C}$ на V ще наричаме двоичен код с дължина n. Векторите от $\mathbf{C}$ се наричат *кодови думи.* В частност, всяко k-мерно линейно подпространство на V се нарича двоичен линеен код с дължина n и размерност k и се означава като $[n, k]-$код.

Като източник за част от следващите дефиниции е използван [7].

Дефиниция 3.1.15 *Пораждаща матрица на линеен код $\mathbf{C}$ с дължина n и размерност k наричаме всяка матрица с k реда и n стълба с елементи от полето $\mathbb{F}_2$, чиито редове образуват базис на $\mathbf{C}$.*

Дефиниция 3.1.16 *Дуален код $\mathbf{C}^\perp$ на линейния код $\mathbf{C}$ наричаме ортогоналното допълнение на $\mathbf{C}$, т.е.*

$$\mathbf{C}^\perp = \{\underline{y} \in \mathbb{F}_2^n |\ (\underline{x}, \underline{y}) = 0,\ \forall \underline{x} \in \mathbf{C}\}.$$

Да отбележим, че е в сила равенството $dim(\mathbf{C}) + dim(\mathbf{C}^{\perp}) = n$ (Теорема за ранга и дефекта).

Дефиниция 3.1.17 *Наричаме линейния код* $\mathbf{C}$ *самоортогонален, ако* $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^{\perp}$, *и самодуален, когато* $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\perp}$.

Дефиниция 3.1.18 *Проверочна матрица* H *на кода* $\mathbf{C}$ *наричаме всяка пораждаща матрица на дуалния му код* $\mathbf{C}^{\perp}$.

Дефиниция 3.1.19 *Нека* $\mathbf{C}$ *е линеен* $[n, k]$ *код над* $\mathbb{F}_2$ *и* $\underline{x} \in \mathbb{F}_2^n$ *е произволен вектор. Тогава множеството*

$$\underline{x} + \mathbf{C} = \{\underline{x} + \underline{c} \mid \underline{c} \in \mathbf{C}\}$$

се нарича съседен клас на $\mathbf{C}$.

Дефиниция 3.1.20 *Лидер на съседен клас наричаме вектор с минимално тегло в съседния клас, т.е. всеки вектор* $\underline{y} \in \underline{x} + \mathbf{C}$ *може да е лидер на съседния клас, ако* $wt(\underline{y}) = min\{wt(\underline{x} + \underline{c}) \mid \underline{c} \in \mathbf{C}\}$.

Теорема 3.1.21 *(Теорема на Лагранж) Нека* $\mathbf{C}$ *е линеен* $[n, k]$ *код над* $\mathbb{F}_2$. *Тогава за съседните класове на* $\mathbf{C}$ *са в сила следните твърдения:*

(1) Всеки вектор на $\mathbb{F}_2^n$ *принадлежи на съседен клас на* $\mathbf{C}$;

(2) Всеки съседен клас съдържа точно $2^k = |\mathbf{C}|$ *вектора;*

(3) Два съседни класа или съвпадат или въобще не се пресичат.

Дефиниция 3.1.22 *Теглово разпределение на кода* $\mathbf{C}$ *с дължина* n *е векторът* $W(\mathbf{C}) = (W_0, \ldots, W_n)$, *където* W_i *е броят на кодовите думи с тегло по Хеминг* i.

Дефиниция 3.1.23 *Спектър на кода* $\mathbf{C}$ *с теглово разпределение* $W(\mathbf{C}) = (W_0, \ldots, W_n)$ *е множеството от индекси* $\{i : \ 0 \leq i \leq n, W_i > 0\}$.

Дефиниция 3.1.24 *Нумератор на теглата в кода* $\mathbf{C}$, *притежаващ теглово разпределение* $W(\mathbf{C}) = (W_0, \ldots, W_n)$, *се дефинира като следния полином (с цели неотрицателни коефициенти) на променливата* z:

$$\mathcal{W}[z; \mathbf{C}] = \sum_{i=0}^{n} W_i z^i.$$

Понякога за номератор на теглата се използва и следната дефиниция:

Дефиниция 3.1.25 *Номератор на теглата в кода* $\mathbf{C}$*, притежаващ теглово разпределение* $W(\mathbf{C}) = (W_0, \ldots, W_n)$*, се дефинира като следния полином (с цели неотрицателни коефициенти) на две променливи:*

$$\mathcal{W}[x, y; \mathbf{C}] = \sum_{i=0}^{n} W_i x^{n-i} y^i.$$

Тук се интересуваме от следната $(\underline{u}, \underline{u} + \underline{v})$ конструкция за получаване на нов код от известни кодове [34, Ch.2.9].

Дефиниция 3.1.26 *При дадени* $[n, k_1, d_1]-$*код* $\mathbf{C_1}$ *и* $[n, k_2, d_2]-$*код* $\mathbf{C_2}$*, с еднакви дължини* n *на кодовите думи, можем да конструираме нов код* $\mathbf{C_3}$ *с дължина* $2n$*, състоящ се от всички вектори*

$$(\underline{u}, \underline{u} + \underline{v}),\ \underline{u} \in \mathbf{C_1},\ \underline{v} \in \mathbf{C_2}.$$

Теорема 3.1.27 *([34, Ch.2.9])* $\mathbf{C_3}$ *е* $[2n, k_1 k_2, d = min\{2d_1, d_2\}]-$*код.*

Задачата, която изучаваме в тази глава, касае една много популярна фамилия от кодове, така наречените кодове на Рид-Малер, чиято дефиниция е следната:

Дефиниция 3.1.28 *Нека* r *и* m *са цели числа и* $0 \leq r \leq m$*. Двоичен код на Рид-Малер от ред* r *с дължина* $n = 2^m$*, е множеството от всички двоични вектори* $\underline{\mathbf{f}}$ *с дължина* n*, които са таблици на истинност на булевите функции* $f(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$*, с алгебрични нормални форми от степен най-много* r*. За този код ще използваме означението* $\mathcal{R}(r, m)$*.*

Оттук нататък двоичен вектор $\underline{\mathbf{f}}$ с дължина 2^m ще бъде идентифициран със съответната Булева функция f на m променливи, т.е. $\underline{\mathbf{f}}$ е таблицата на истинност на f. Означенията f и $\underline{\mathbf{f}}$ ще се използват взаимозаменяемо, в зависимост от контекста. Ще използваме означението $\underline{\mathbf{f}}_n$ вместо $\underline{\mathbf{f}}$, когато искаме да наблегнем на дължината на вектора.

При двоични променливи е изпълнено ${x_i}^2 = x_i$ и всеки моном от степен $r : 0 \leq r \leq m$ на m променливи е резултат от произведението на r различни променливи, следователно има точно $\binom{m}{r}$ монома от степен r. Под действието на операцията събиране тези мономи генерират група, която означаваме с $\mathcal{H}^{(r)}(m)$ - групата на хомогенните полиноми от степен r на m променливи.

Добре известен е следният факт:

Твърдение 3.1.29 *За всяко m и всички r, за които $0 \leq r \leq m$, двоичният код на Рид-Малер $\mathcal{R}(r,m)$ е линеен $[n,k,d]$ код с:*

- *дължина $n = 2^m$*
- *размерност $k = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}$*
- *минимално тегло $d = 2^{m-r}$;*

Дуалният код на $\mathcal{R}(r,m)$ е $\mathcal{R}(m-r-1,m)$. В частност за всяко $s \geq 1$ кодът $\mathcal{R}(s,2s+1)$ е самодуален код.

Кодове на Рид-Малер с дължина 2^{m+2} могат да бъдат получени лесно от такива с дължина 2^{m+1}, като използваме $(\underline{u}, \underline{u}+\underline{v})$ конструкцията.

Теорема 3.1.30 *([34, Ch.13.3])*

$$\mathcal{R}(r+2,m+2) = \{(\underline{u}, \underline{u}+\underline{v}) \colon\ \underline{u} \in \mathcal{R}(r+2,m+1),\ \underline{v} \in \mathcal{R}(r+1,m+1)\}.$$

Ще използваме и два факта, публикувани за първи път в [46] през 1973г., които са формулирани в следващите две теореми.

Теорема 3.1.31 *([46, 5.12]) За $0 \leq r \leq m$, е в сила следното:*

$$\mathcal{W}[z;\mathcal{R}(r+2,m+2)] = \sum_{p \in \mathcal{H}^{(r+2)}(m+1)} \mathcal{W}^2[z;\ \underline{p} + \mathcal{R}(r+1,m+1)].$$

Теорема 3.1.32 *([46, 5.13]) Нека $p = e + f \cdot x_{m+1} \in \mathcal{H}^{(r+2)}(m+1)$ за дадени $e \in \mathcal{H}^{(r+2)}(m)$ и $f \in \mathcal{H}^{(r+1)}(m)$. Тогава нумераторът на теглата в съседния клас $\mathcal{C}(p) = \underline{p} + \mathcal{R}(r+1,m+1)$ е равен на:*

$$(*)\ \ \mathcal{W}[z;\underline{p}+\mathcal{R}(r+1,m+1)] = \sum_{g \in \mathcal{H}^{(r+1)}(m)} \mathcal{W}[z;\underline{e}+\underline{g}+\mathcal{R}(r,m)] \cdot \mathcal{W}[z;\underline{e}+\underline{f}+\underline{g}+\mathcal{R}(r,m)].$$

Следват дефинициите на *Общата афинна група* $GA(m)$ и нейната подгрупа - *Общата линейна група* $GL(m,2)$ [34, Ch.13.9].

Нека $A = (a_{ij})$ е обратима $m \times m$ двоична матрица, а $\underline{b}$ е двоичен вектор с дължина m. Трансформацията

$$T: \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} + \underline{b} \tag{3.2}$$

е пермутация на множеството от 2^m вектора с дължина m, която изпраща $\underline{0}$ във вектора $\underline{b}$.

Можем също така да разглеждаме трансформацията T като пермутираща булеви функции:

$$T: \quad f(v_1, \cdots, v_m) \quad \rightarrow \quad f(\sum a_{1j}v_j + b_1, \ldots, \sum a_{mj}v_j + b_m). \tag{3.3}$$

Множеството от всички такива трансформации T образува група, като операцията на групата е композиция. Наричаме тази група *Обща афинна група* и я означаваме с $GA(m)$.

Подгрупата на $GA(m)$, състояща се от всички трансформации

$$T: \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

(т.е. за които $\underline{b} = \underline{0}$) се нарича *Обща линейна група* и се означава с $GL(m, 2)$.

Действието на $A \in GA(m)$ върху булева функция $f(\mathbf{x})$ означаваме с $f \circ A$, т.е., $f \circ A = f(A(\mathbf{x}))$. Друга необходима дефиниция е тази за афинна еквивалентност на два съседни класа на код на Рид-Малер:

Дефиниция 3.1.33 *Съседните класове C_1 и C_2 на $\mathcal{R}(r, m)$, с представители $f_1 \in C_1$ и $f_2 \in C_2$ съответно, се наричат афинно еквивалентни, ако съществува трансформация $A \in GA(m)$, такава че $f_1 \circ A = f_2$.*

Ако съседните класове C_1 и C_2 са афинно еквивалентни, т.е. съществува въпросната афинна трансформация A, то под нейното действие съседният клас C_1 се изобразява в съседния клас C_2, тъй като A изобразява биективно $\mathcal{R}(r, m)$ в себе си.

По-нататък ще използваме широко следното добре известно свойство (вижте например [22]):

Свойство $\mathcal{P}$. *Нумераторите на теглата на два афинно еквивалентни съседни класа на един код на Рид-Малер са идентични.*

Класификацията по афинна еквивалентност на съседните класове на кодовете на Рид-Малер е полезна при изучаването на важни кодово-теоретични и криптографски свойства на Булевите функции, които съставят тези класове. В статията [32] е представена стратегия за пресмятане на пълната класификация на Булевите форми от четвърта степен на осем променливи, т.е. класификацията на фактор-пространството $\mathcal{R}(4,8)/\mathcal{R}(3,8)$ под действието на $GL(8,2)$. На това място само като екстракт от този резултат, отбелязваме, че Булевите форми от четвърта степен на осем променливи могат да бъдат класифицирани в 999 класа на линейна еквивалентност, изброени в [31]. От информацията, представена в [31], ще използваме само представителите и размера на орбитата на всеки клас. Наскоро интересът към тази тема бе подновен от [17], където (освен всичко друго) е предоставена класификация по афинна еквивалентност на фактор-пространството $\mathcal{R}(4,7)/\mathcal{R}(2,7)$. Авторите на [17] и [32] скицират някои приложения на своите резултати, свързани с радиусите на покритие на някои RM кодове, както и с Булевите бент функции. В Раздел 3.3 ще опишем още едно приложение на горепосочените резултати, а именно пресмятането на тегловото разпределение на $\mathcal{R}(4,9)$.

3.2 Опит за намиране на тегловото разпределение чрез теоремата на Gleason

От теоремата на McEliece за делимостта на теглата на кодовите думи в $\mathcal{R}(r,m)$ (вж., напр., [34, Гл. 15, Теорема 12]) следва:

Следствие 3.2.1 *Всички тегла в* $\mathcal{R}(r,m)$ *са кратни на*

$$2^{\lfloor (m-1)/r \rfloor} = 2^{\lceil m/r \rceil - 1}.$$

В случая на $\mathcal{R}(4,9)$ всички тегла са кратни на 4, т.е. $\mathcal{R}(4,9)$ е двойночетен код.

Нека с W_w означим броя на кодовите думи с тегло w в $\mathcal{R}(r,m)$. Добре известно е (вж., напр., [34, Гл. 13, Теорема 9(b)]), че е в сила:

Твърдение 3.2.2 *Броят на кодовите думи с минимално тегло в* $\mathcal{R}(r,m)$ *е*

$$W_{2^{m-r}} = 2^r \prod_{i=0}^{m-r-1} \frac{2^{m-i}-1}{2^{m-r-i}-1}.$$

От [25, Теорема 2] за тегловото разпределение на $\mathcal{R}(r,m)$, в интервала $d = 2^{m-r} < w < 2d$, е в сила следното:

Твърдение 3.2.3 *За* $r \geq 2$ *и* $2^{m-r} < w < 2^{m-r-1}$, *нека* $\alpha = min(m-r, r)$ *и* $\beta = \frac{1}{2}(m-r+2)$. *Тогава*

(i) $W_w = 0$, *освен ако* $w(\mu) = 2^{m-r+1} - 2^{m-r+1-\mu}$ *за* $\mu:\ 1 \leq \mu \leq max(\alpha, \beta)$.

(ii) Ако $\mu = 2$ *или* $max(\alpha, 2) < \mu \leq \beta$, *то*

$$W_{w(\mu)} = 2^{r+\mu^2+\mu-2} \frac{\prod_{i=0}^{r+2\mu-3}(2^{m-i}-1)}{\prod_{i=0}^{r-3}(2^{r-2-i}-1)\prod_{i=0}^{\mu-1}(4^{i+1}-1)}. \tag{3.5}$$

(iii) Ако $max(\beta, 2) < \mu \leq \alpha$, *то*

$$W_{w(\mu)} = 2^{r+\mu^2+\mu-1} \frac{\prod_{i=0}^{r+\mu-1}(2^{m-i}-1)}{\prod_{i=0}^{r-\mu-1}(2^{r-\mu-i}-1)\left[\prod_{i=0}^{\mu-1}(2^{\mu-i}-1)\right]^2}. \tag{3.6}$$

(iv) Ако $3 \leq \mu \leq min(\alpha, \beta)$, *то* $W_{w(\mu)}$ *е равно на сумата от (3.5) и (3.6).*

Ще използваме Твърдение 3.2.3, за да намерим всички тегла (включително нулевите) на $\mathcal{R}(4,9)$ в интервала $[36, 60]$.

Твърдение 3.2.3 е разширено за тегла $w:\ 2d \leq w < 2.5d$ в [26]. Ще използваме това разширение, за да намерим теглата на $\mathcal{R}(4,9)$ в интервала $[64, 76]$.

$\mathcal{R}(4,9)$ е двойночетен двоичен самодуален код и общата форма на нумераторите на теглата на такива кодове е известна от теоремата на A. M. Gleason [18, 3]. Ще представим тази теорема във форма, която касае само разглеждания код.

Теорема 3.2.4 *Нека* $\mathbf{C}$ *е двоичен самодуален линеен код, на който всяко тегло е кратно на* 4 *(двойночетен код). Тогава нумераторът на теглата на кода* $\mathbf{C}$ *е сума от произведенията на следните два полинома*

$$f_1(x,y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$$

и

$$f_2(x,y) = x^4y^4(x^4 - y^4)^4,$$

т.е.

$$\mathcal{W}(x,y;\mathbf{C}) = \sum_{i,j} K_{ij} f_1^i(x,y) f_2^j(x,y),$$

където i, j *са неотрицателни цели числа,* K_{ij} *са някакви константи, и* $n = 8i+24j$ *е дължината на кода.*

Според Следствие 3.2.1 всички ненулеви тегла на Рид-Малер кода $\mathcal{R}(4,9)$ се делят на 4. В опит да намерим тегловото му разпределение, последователно извършваме следните действия:

(1) Пресмятаме броя на кодовите думи с минимално тегло, използвайки Твърдение 3.2.2

$$W_{32} = 52955952$$

(2) С помощта на Твърдение 3.2.3 от [25], намираме следващата част от тегловото разпределение:

$$W_{36} = W_{40} = W_{44} = W_{52} = 0$$

$$\begin{aligned} W_{48} &= 919315326720, \\ W_{56} &= 271767121346560, \\ W_{60} &= 860689275027456. \end{aligned}$$

(3) Използвайки разширената версия на Твърдение 3.2.3 от [26], намираме следващата част от тегловото разпределение:

$$\begin{aligned} W_{64} &= 89163020044002040, \\ W_{68} &= 1777323352931696640, \\ W_{72} &= 64959328938397057024, \\ W_{76} &= 2094952122987829002240. \end{aligned}$$

(4) Използвайки теоремата на Gleason (Теорема 3.2.4) и вече намерените 20 тегла, се опитваме да намерим тегловото разпределение на $\mathcal{R}(4,9)$.

(i) Трябва да решим системата

$$\sum_{i=0,4|i}^{n} W_i x^i y^{n-i} = \sum_{i,j} K_{ij} f_1^i(x,y) f_2^j(x,y),$$

където $n = 512 = 8i + 24j$ и за (i,j) има 22 възможни комбинации.

(ii) Тъй като имаме 22 уравнения, а знаем стойностите само на 20 от теглата, не можем да намерим стойностите на всички коефициенти K_{ij}.

От получения резултат става ясно, че за да намерим тегловото разпределение на $\mathcal{R}(4,9)$, използвайки теоремата на Gleason, се нуждаем от повече съществена информация от тази, представена в [25] и [26] (вижте [11, Ch. 11] за подробности).

3.3 Описание на метода на Sarwate и прецизирането му

3.3.1 Теоретично представяне

Ще опишем стратегия, която прави възможно пресмятането на $\mathcal{W}[z;\mathcal{R}(4,9)]$. Нека $n(r,m)$ е броят на орбитите на които фактор-пространството

$$\mathcal{R}^*(r,m) = \mathcal{R}(r,m)/\mathcal{R}(r-1,m),$$

се разбива под действието на $GL(m,2)$, когато $1 \leq r \leq m$. Освен това приемаме, че е фиксирано произволно номериране на тези орбити (класове на линейна еквивалентност).

Следното следствие от Теорема 3.1.31 ни дава възможност да я използваме ефективно.

Следствие 3.3.1 *Нека $p_i \in \mathcal{H}^{(r+2)}(m+1)$ е представител на $i-$тия клас на линейна еквивалентност в $\mathcal{R}^*(r+2, m+1)$ с размер L_i. Тогава е вярно следното:*

$$\mathcal{W}[z; \mathcal{R}(r+2, m+2)] = \sum_{i=1}^{n(r+2,m+1)} L_i \mathcal{W}^2[z; \underline{p_i} + \mathcal{R}(r+1, m+1)]. \tag{3.7}$$

Това следствие намалява броя на необходимите пресмятания на номератори на теглата до $n(r+2, m+1)$, което е значително по-малко от директния израз

$$|\mathcal{H}^{(r+2)}(m+1)| = 2^{\binom{m+1}{r+2}}$$

в Теорема 3.1.31. Например, както вече беше споменато, $n(4, 8) = 999 \approx 2^{10}$, което е 2^{60} пъти по-малко в сравнение с $|\mathcal{H}^{(4)}(8)| = 2^{70}$.

Забележка 3.3.2 *Следствие 3.3.1 се използва неявно в [46] за намиране номераторите на теглата на по-късите кодове на Рид-Малер.*

Ще формулираме още едно твърдение, което позволява допълнително намаляване на пресмятанията.

Следствие 3.3.3 *За дадено $e \in \mathcal{H}^{(r+2)}(m)$, нека $\mathcal{H}^{(r+1)}(m)$ бъде разбито на блокове (подмножества) $G_i, 1 \leq i \leq s$, такива че, винаги когато $g \in G_i$, номераторът на теглата $\mathcal{W}[z; \underline{e} + \underline{g} + \mathcal{R}(r, m)]$ е (различен) константен полином $w_i(z)$. Тогава е вярно следното:*

*(**a**) номераторът на теглата на съседния клас $\mathcal{C}(p) = \underline{p} + \mathcal{R}(r+1, m+1)$, $p = e + f \cdot x_{m+1}$ за фиксирано $f \in \mathcal{H}^{(r+1)}(m)$, се изразява чрез*

$$\sum_{i=1}^{s} w_i(z) \left(\sum_{g \in G_i} \mathcal{W}[z; \underline{e} + \underline{g} + \underline{f} + \mathcal{R}(r, m)] \right).$$

*(**b**) броят на умноженията на полиноми за пресмятане на посочения номератор на теглата е равен на s, т.е. на броят на различните номератори на тегла $\mathcal{W}[z; \underline{e} + \underline{g} + \mathcal{R}(r, m)]$, $g \in \mathcal{H}^{(r+1)}(m)$, докато този на събиранията на полиноми е $2^{\binom{m}{r+1}} - s$.*

Класификацията по афинна еквивалентност на $\mathcal{R}(r+2, m)/\mathcal{R}(r, m)$ позволява да се реализира използването на Следствие 3.3.3. За да се види това, ще припомним следната дефиниция:

Дефиниция 3.3.4 *Подгрупата $\mathcal{S}t(e)$ на $GA(m)$, която фиксира $e \in \mathcal{H}^{(r+2)}(m)$, се нарича стабилизатор на e в $GA(m)$, т.е., за всяко $A \in \mathcal{S}t(e)$ е в сила:* $e \circ A \in \underline{e} + \mathcal{R}(r+1, m)$,.

За дадено $e \in \mathcal{H}^{(r+2)}(m)$ стабилизаторът $\mathcal{S}t(e)$ разбива съседните класове от вида $\underline{e} + \underline{g} + \mathcal{R}(r, m)$, където $g \in \mathcal{H}^{(r+1)}(m)$, в непресичащи се орбити. Да означим това разбиване с $\Delta(e)$. Освен това Свойство $\mathcal{P}$ влече, че когато g се движи по орбита от $\Delta(e)$, нумераторът на теглата $\mathcal{W}[z; \underline{e} + \underline{g} + \mathcal{R}(r, m)]$ се запазва. Последното позволява да се състави ефективно разбиването $\Delta'(e) = \{G_i, 1 \leq i \leq s\}$ на $\mathcal{H}^{(r+1)}(m)$ (вижте Следствие 3.3.3) чрез обединяване на тези орбити, които имат идентични нумератори на теглата (като последните се пресмятат предварително върху избрани представители на орбитите).

3.3.2 Пресмятане на $\mathcal{W}[z; \mathcal{R}(4, 9)]$

Изчислителната работа се разделя на две основни фази: предварително изчисление и същинско изчисление.

Целта на предварителното изчисление е да предостави инструменти за ефективно пресмятане на израза (*) в Теорема 3.1.32 за конкретни e и f и се извършва, следвайки Следствие 3.3.3 и последващите съображения от предишния подраздел.

Нека $\mathcal{E}(4, 7)$ бъде множеството от представителите на дванадесетте класа на линейна еквивалентност на $\mathcal{R}^*(4, 7)$, дадени в [30]. За фиксирано $e \in \mathcal{E}(4, 7)$, предварителното изчисление включва следните три задачи:

$\mathcal{T}1$: Съставяне и съхранение на орбитите на разбиването $\Delta(e)$;

$\mathcal{T}2$: Пресмятане на нумераторите на теглата на съседните класове $\underline{e}+\underline{g}+\mathcal{R}(2, 7)$, когато g варира върху множеството от представители на орбитите на $\Delta(e)$;

$\mathcal{T}3$: Сливане на орбитите с идентични нумератори на теглата, за да се получи „по-грубото“ разбиване $\Delta'(e)$.

Забележка 3.3.5 *Заслужава да се отбележи, че:*

- *задача $\mathcal{T}1$ се извършва ефективно на базата на така наречения „orbit algorithm“ [23], използвайки множеството от генератори на стабилизатора $\mathcal{S}t(e)$, предоставени от [30];*

- *задача $\mathcal{T}2$ може да бъде извършена едновременно за всички представители на орбитите, чрез генериране на всички кодовите думи на $\mathcal{R}(2,7)$ с помощта на код на Грей.*

Следвайки стратегията, описана в Раздел 3.3.1, представяме алгоритъм за пресмятане на номератора на теглата $\mathcal{W}[z; C(p)]$ на съседния клас $C(p) = \underline{p}+\mathcal{R}(3,8)$, където $p = e + f \cdot x_8$ за фиксирано $e \in \mathcal{E}(4,7)$ и дадено $f \in \mathcal{H}^{(3)}(7)$. Да обърнем внимание, че алгоритъмът може да бъде имплементиран като подпрограма. Да отбележим също така, че общият номератор на теглата $w_i(z)$, съответстващ на блока G_i в $\Delta'(e)$, вече е пресметнат в задача $\mathcal{T}2$ от предварителните изчисления, където $1 \leq i \leq |\Delta'(e)| = s(e)$ и с $s(e)$ е означен размерът на $\Delta'(e)$, т.е. броят на блоковете, които се съдържат в $\Delta'(e)$.

Algorithm 1: Връща номератора на теглата $\mathcal{W}[z; C(p)]$, където $p = e+f\cdot x_8$ при фиксирано e и дадено $f \in \mathcal{H}^{(3)}(7)$

```
1 U[z] := 0;
2 for i in [1,s(e)] do
3 |   UU(z) := 0;
4 |   for g in G[i] do
5 |   |   j := FindBlock(g+f);
6 |   |   UU(z) := UU(z) + w[j](z);
7 |   U(z) := U(z) + w[i](z) * UU(z);
8 W[z; C(p)] := U(z);
```

При същинското изчисление прилагаме уравнение (3.7), предполагайки, че е наличен списък $\mathcal{S}$ от двойки: (представител p_i, размер на орбита L_i) за $i-$тия клас $O_i, 1 \leq i \leq 999$, от класификацията на $\mathcal{R}^*(4,8)$. Без ограничение на общността, можем да предположим, че всеки p_i е от вида $e + f_i x_8$ за някое $e \in \mathcal{E}(4,7)$ и $f_i \in \mathcal{H}^{(3)}(7)$, така че множеството от класове е естествено разбито на подмножества $\mathcal{O}(e)$ с мощност $\mu(e), e \in \mathcal{E}(4,7)$. По-долу е представен алгоритъм за пресмятане на сумата в уравнение (3.7) и съответно номератора на теглата $\mathcal{W}[z; \mathcal{R}(4,9)]$. (Обръщаме внимание, че се извиква подпрограмата $\mathcal{W}[z; C(p)]$.)

Algorithm 2: Пресмятане на $\mathcal{W}[z; \mathcal{R}(4,9)]$

```
1 V(z) := 0;
2 for e ∈ E(4,7) do
3     for j in [1,n(e)] do
4         p := Representative(O(e)[j]);
5         L := Size(O(e)[j]);
6         V(z) := V(z) + L * W^2[z;C(p)];
7 W[z; R(4,9)] = V(z);
```

Данните, представени в [31], съдържат необходимата информация за формирането на списък $\mathcal{S}'$ от вид, подобен на $\mathcal{S}$. Въпреки подобието представителите p'_i в $\mathcal{S}'$ в него са от вида $e' + f'_i \cdot x_8$, и новите e' образуват различно множество от представители на дванадесетте класа на $\mathcal{R}^*(4,7)$, да речем $\mathcal{E}'(4,7)$. Линейната еквивалентност на някои от елементите на $\mathcal{E}(4,7)$ и $\mathcal{E}'(4,7)$ е очевидна при визуална проверка. За останалите определяме двойките линейно еквивалентни, като пресмятаме инвариантите на техните дуални (за подробности, препращаме читателите към [22, pp. 115-117]). По-нататък, за да намерим за всяка една от определените двойки (e', e) неособена (7×7) матрица $\mathbf{A}$ (т.е. линейната трансформация на преход) със свойството $e' \circ \mathbf{A} \in \underline{e} + \mathcal{R}(3,7)$, написахме проста програма на C, която генерира на „случаен“ принцип такава неособена квадратна матрица и след това проверява дали е удовлетворено наложеното условие. Тази техника е достатъчно ефективна поради относително големите размери на стабилизаторите и програмата свърши успешно своята работата за разумно време. (За подобна техника за изследване на афинната еквивалентност на Булеви функции вижте [38].) Накрая, прилагайки линейните трансформации на преход върху съответните f'_i, $1 \leq i \leq 999$, (разбира се, като се игнорират членовете от степен по-малка от 3), получаваме списък от представители, който е необходим за прилагане на **Алгоритъм 2**.

Забележка 3.3.6 *Функциите FindBlock(...), Representative(...) и Size(...) имат имена, които сами обясняват тяхното предназначение.*

3.3.3 Оценяване на изчислителните разходи

Следвайки [23] и [30], оценяваме, че изчислителната цена на задача $\mathcal{T}1$ е

$$|\mathcal{H}^{(3)}(7)| \times \sum_{e \in \mathcal{E}(4,7)} |Sg(e)| = 2^{35} \times 26 \approx 2^{39.7}$$

афинни трансформации, където с $Sg(e)$ е означено множеството от генераторите на стабилизатора $\mathcal{S}t(e)$. Изчислителната сложност на задача $\mathcal{T}2$ е пропорционална на произведението $68443 \times 2^{29} \approx 2^{45.06}$, като първият множител тук е броят на класовете на $\mathcal{R}(4,7)/\mathcal{R}(2,7)$, а вторият е обемът на $\mathcal{R}(2,7)$. Задача $\mathcal{T}3$ може да бъде изпълнена чрез прилагане на техника за сортиране. Резюмирайки, може да кажем, че предварителните изчисления в случая $r = 2$ и $m = 7$ се извършват ефективно. Освен това компресираното съхранение на орбитите и подредба на данните в RAM изисква най-много 124 GB памет. Също така, както вече беше споменато в предишния подраздел, намирането на линейните трансформации на преходите не изисква много изчислителни усилия.

Множеството от класове на линейни еквивалентност на $\mathcal{R}^*(4,8)$ е естествено разбито на подмножества с мощности $\mu(e)$ за фиксирано $e \in \mathcal{E}(4,7)$ и различни $f \in \mathcal{H}^{(3)}(7)$ (вижте [31]):

$$\overline{\mu} = (3, 2, 21, 15, 89, 56, 10, 7, 502, 1, 1, 292)$$

При действителното изчисление, за всяко $e \in \mathcal{E}(4,7)$, **Алгоритъм 1** изисква $|\Delta'(e)|$ умножения и около 2^{35} събирания на полиноми от степен 128 с неотрицателни цели коефициенти, докато **Алгоритъм 2** изисква

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(4,7)} (\mu(e) \times |\Delta'(e)|) = 1\,827\,252 \approx 2^{20.8}$$

умножения и около

$$n(4,8) \times 2^{\binom{7}{3}} = 999 \times 2^{35} \approx 2^{45}$$

събирания на полиноми от същия вид; също така 999 повдигания на квадрат на полиноми от степен 256, както и някои допълнителни операции с пренебрежимо ниска цена.

Забележка 3.3.7 *Директното прилагане на Теорема 3.1.32 (базирано на оригиналното разбиване $\Delta(e)$) ще изисква около* 6 *пъти повече умножения на полиноми от* 128*-ма степен отколкото са изпълнени в действителност.*

Забележка 3.3.8 *Накрая, имаме две забележки относно имплементацията:*

- *За да се справим с ограниченията на RAM паметта (128 GB в нашия случай), използваме подходящите за тази цел Delta компресия и VByte кодиране на данните;*

- *Използваме 256-битовите CPU регистри, което гарантира, че аритметичните операции се извършват ефективно и отстранява необходимостта от допълнително оценяване на броя на процесорните операции.*

Благодарение на скорошния напредък в класификацията на Булевите функции [17],[32] и използването на съвременни високопроизводителни компютри бе получено решение на задачата за намиране тегловото разпределение на двоичния код на Рид-Малер $\mathcal{R}(4, 9)$. Въпреки това трябва да се признае, че едва ли е възможно този подход да бъде приложен за по-дълги кодове на Рид-Малер, тъй като изчислителните разходи нарастват неимоверно с увеличаване на кодовата дължина.

Резултатите, получени в тази глава, са докладвани на „*Национален семинар по теория на кодирането "Професор Стефан Додунеков"*, Арбанаси, България, 10-13 Ноември 2022“ [T4], на „*High-Performance Computing for Mathematics and Applications*, Sofia, Bulgaria, 28 June 2023“ [T5], на „*Национален семинар по теория на кодирането "Професор Стефан Додунеков"*, Хисаря, България, 2-5 Ноември 2023“ [T6], както и на „*The Thirteenth International Workshop on Coding and Cryptography (WCC)*, Perugia, Italy, 17-21 June 2024“ [T7].

Авторска справка

Основните научни приноси на настоящата дисертация са:

1. Изведена е явна формула за реда на крива от семейството

$$\mathcal{E}_p = \{E_a : y^2 = x^3 + a \pmod p,\ a \neq 0\},$$

редуциран по модул p.

2. Изведена е явна формула за реда на крива от семейството

$$\mathcal{D}_p = \{D_a : y^2 = x^3 + ax \pmod{p},\ a \neq 0\},$$

редуциран по модул p.

Основните научно-приложни приноси на настоящата дисертация са:

1. Разработен е ефективен метод за едновременно пресмятане на шестте възможни реда, свързани със семейството $\mathcal{E}_p$, при фиксирано $p \equiv 1 \pmod 6$. Сложността на този метод е $\tilde{O}(\log^2 p)$, което подобрява най-доброто известно досега алгоритмично решение [41] с почти един порядък.

2. Разработен е ефективен метод за едновременно пресмятане на четирите възможни реда, свързани със семейството $\mathcal{D}_p$, при фиксирано $p \equiv 1 \pmod 4$. Сложността на този метод е $\tilde{O}(\log^2 p)$.

3. Разработен е ефективен алгоритъм за пресмятане на тегловото разпределение на двоичния Рид-Малер код $\mathcal{R}(4, 9)$, като е комбиниран подхода, описан в докторската дисертация на D. V. Sarwate [46] от 1973 г., с резултатите за класификацията на Булевите функции според афинната им еквивалентност, публикувани през 2008г. в [32] и 2023г. в [17].

4. Пресметнато е тегловото разпределение на двоичния Рид-Малер код $\mathcal{R}(4, 9)$.

Благодарности

Бих искал да изразя най-дълбоката си признателност към моя научен ръководител доц. Юри Борисов за неговата неизменна подкрепа, насоки и търпение по време на процеса на създаване на тази дисертация. Получената обратна връзка и конструктивни забележки оказаха дълбоко влияние върху качеството и оригиналността на моите изследвания.

Изразявам своята признателност към ръководството и служителите на Института по математика и информатика (ИМИ) на Българската академия на

науките (БАН), които създадоха благоприятна среда за провеждането на моите изследвания. Оказаната институционална подкрепа и предоставения достъп до огромни изчислителни ресурси изиграха съществена роля за успешното завършване на този труд. Изследването, довело до постигането на част от резултатите, е извършено с помощта на инфраструктурата, закупена по Националната пътна карта за научна инфраструктура, финансирана от Министерството на образованието и науката на Република България (договор № Д01-168/28.07.2022г.).

Бих искал да изразя своята благодарност и към колегите си от секция „Математически основи на информатиката“, към ИМИ-БАН. Общуването с тях и техните ценни предложения и конструктивна критика несъмнено подобриха цялостната стойност на моето изследване.

Накрая бих искал да изразя своята признателност към моето семейство за тяхната любов, търпение и безрезервна вяра в мен. Тяхната подкрепа беше безценна по време на процеса на създаване на тази дисертация.

Литература

[1] *A simple C++11 Thread Pool implementation* available from https://github.com/log4cplus/ThreadPool/. log4cplus (GitHub, 2021).

[2] Aladov, N. S. On the distribution of quadratic residues and nonresidues modulo a prime number p in the sequence $1, 2, \ldots, p-1$. (in Russian). *Matematicheskii Sbornik* **18,** pp. 61—75 (1896).

[3] Berlekamp, E., MacWilliams, F. & Sloane, N. Gleason's theorem on self-dual codes. *IEEE Transactions on Information Theory* **18,** pp. 409—414. DOI: 10.1109/TIT.1972.1054817 (1972).

[4] Borissov, Y. & Markov, M. *An Approach for Computing the Number of Points on Elliptic Curve* $y^2 = x^3 + a \pmod p$ *via Explicit Formula for That Number Modulo* p in: *2019 Ninth International Workshop on Signal Design and its Applications in Communications (IWSDA)* (2019), pp. 1—5. DOI: 10.1109/IWSDA46143.2019.8966127.

[5] Borissov, Y. & Markov, M. An Efficient Approach to Point-Counting on Elliptic Curves from a Prominent Family over the Prime Field $\mathbb{F}_p$. *Mathematics* **9.** DOI: 10.3390/math9121431 (2021).

[6] Bos, J. W. *и др. Elliptic curve cryptography in practice* in: *Financial Cryptography and Data Security: 18th International Conference, FC 2014, Christ Church, Barbados, March 3-7, 2014, Revised Selected Papers 18* (2014), pp. 157—175.

[7] Boyvalenkov, P. *Кодиране, комбинаторика и криптография* (ЮЗУ „Неофит Рилски", 2003).

[8] Brillhart, J. Note on Representing a Prime as a Sum of Two Squares. *Mathematics of Computation* **26,** pp. 1011—1013 (1972).

[9] Carlet, C. *Boolean Functions for Cryptography and Coding Theory* DOI: 10.1017/9781108606806 (Nov 2020).

[10] Carlet, C. & Solé, P. The weight spectrum of two families of Reed-Muller codes. *Discrete Mathematics* **346,** pp. 113568. DOI: https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113568 (2023).

[11] Charpin, P., Pless, V. & Huffman, W. Open problems on cyclic codes. *Handbook of coding theory* **1,** pp. 963—1063 (1998).

[12] Cohen, H. *A course in computational algebraic number theory* (Springer Science & Business Media, 2013).

[13] Croucher, J. S. Collecting Coupons-A Mathematical Approach. *Australian Senior Mathematics Journal* **20,** pp. 31—35 (2006).

[14] Cusick, T. W. & Stănică, P. *Cryptographic Boolean Functions and Applications* (Academic Press/Elsevier, 2009).

[15] Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers: Quadratic and Higher Forms* (The New Era Printing Company, Lancaster, PA., 1919).

[16] Dickson, L. E. *History of the Theory of Numbers: Quadratic and Higher Forms* (The Lord Baltimore Press, Baltimore, MD., 1923).

[17] Gillot, V. & Langevin, P. Classification of some cosets of the Reed-Muller code. *Cryptography and Communications* **15,** pp. 1129—1137. DOI: 10.1007/s12095-023-00652-4 (2023).

[18] Gleason, A. M. *Weight polynomials of self-dual codes and the MacWilliams identities* in: *Actes Congres International des Mathematiciens* **3** (1970), pp. 211—215.

[19] Hardy, G. H., Wright, E. M., Heath-Brown, D. R. & Silverman, J. H. *An Introduction to the Theory of Numbers* (Oxford University Press, 2008).

[20] Harvey, D. & Hoeven, J. v. d. Integer multiplication in time $O(n\log n)$. *Annals of Mathematics* **193,** pp. 563—617. DOI: 10.4007/annals.2021.193.2.4 (2021).

[21] Hermite, C. (in French). *Note sur un théorème relatif aux nombres entiers* in: *Œuvres de Charles Hermite* pp. 264—264 (Cambridge University Press, 2009).

[22] Hou, X.-d. GL(m, 2) acting on R(r, m)/R(r - 1, m). *Discrete Mathematics* **149,** pp. 99—122. DOI: https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)00342-G (1996).

[23] Hulpke, A. *Computing with group orbits* available at https://www.math.colostate.edu/~hulpke/talks/polyhedralpost.pdf. 2006.

[24] Ireland, K. & Rosen, M. I. *A Classical Introduction to Modern Number Theory* (Springer Science & Business Media, 1990).

[25] Kasami, T. & Tokura, N. On the weight structure of Reed-Muller codes. *IEEE Transactions on Information Theory* **16,** pp. 752—759. DOI: 10.1109/TIT.1970.1054545 (1970).

[26] Kasami, T., Tokura, N. & Azumi, S. On the weight enumeration of weights less than 2.5d of Reed-Muller codes. *Information and Control* **30,** pp. 380—395. DOI: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(76)90355-7 (1976).

[27] Kirlar, B. B. On the elliptic curves $y^2 = x^3 - c$ with embedding degree one. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **235.** Congressional Contributions to Computational and Applied Mathematics: ICCAM2009, pp. 4724—4728. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.08.020 (2011).

[28] Knuth, D. E. *The art of computer programming, volume 2: Seminumerical Algorithms* (Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1997).

[29] Koblitz, N. Elliptic curve cryptosystems. *Mathematics of computation* **48,** pp. 203—209 (1987).

[30] Langevin, P. *Classification of $RM(4,7)/RM(2,7)$* available at https://langevin.univ-tln.fr/project/rm742/rm742.html. 2012.

[31] Langevin, P. *Classification of Boolean Quartic Forms in eight Variables,* Output of the numerical experiment available at https://langevin.univ-tln.fr/project/quartics/index.html. 2007.

[32] Langevin, P. & Leander, G. *Classification of Boolean Quartic Forms in eight Variables* in: *Boolean Functions in Cryptology and Information Security* (eds. Preneel, B. & Logachev, O. A.) **18** (IOS Press, 2008), pp. 139—147.

[33] Lemmermeyer, F. *Reciprocity Laws: from Euler to Eisenstein* (Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000).

[34] MacWilliams, F. & Sloane, N. *The Theory of Error-correcting Codes* (North-Holland Publishing Company, 1977).

[35] Markov, M. & Borissov, Y. *Point-Counting on Elliptic Curves Belonging to One Prominent Family: Revisited* in: *2020 Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT)* (2020), pp. 106—109. DOI: 10.1109/ACCT51235.2020.9383390.

[36] Markov, M. & Borissov, Y. *Weight Distribution of the Binary Reed-Muller Code R(4,9)* in: *2024 The Thirteenth International Workshop on Coding and Cryptography (WCC)* (2024), pp. 288—298.

[37] Massey, J. L. *Deep-space communications and coding: A marriage made in heaven* in: *Advanced Methods for Satellite and Deep Space Communications* (ed. Hagenauer, J.) (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1992), pp. 1—17.

[38] Meng, Q.-S., Zhang, H.-G., Yang, M. & Wang, Z.-Y. Analysis of Affinely Equivalent Boolean Functions. *Science in China Series F: Information Sciences* **50,** pp. 299—306. DOI: 10.1007/s11432-007-0030-9 (2007).

[39] Miller, V. S. *Use of elliptic curves in cryptography* in: *Conference on the theory and application of cryptographic techniques* (1985), pp. 417—426.

[40] Muller, D. E. Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection. *Transactions of the I.R.E. Professional Group on Electronic Computers* **EC-3,** pp. 6—12. DOI: 10.1109/IREPGELC.1954.6499441 (1954).

[41] Munuera, C. & Tena, J. G. An algorithm to compute the number of points on elliptic curves of j-invariant 0 or 1728 over a finite field. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **42,** pp. 106—116 (1993).

[42] *PARI/GP version `2.15.2`* available from http://pari.math.u-bordeaux.fr/. The PARI Group (Univ. Bordeaux, 2023).

[43] Peralta, R. A simple and fast probabilistic algorithm for computing square roots modulo a prime number (Corresp.) *IEEE Transactions on Information Theory* **32,** pp. 846—847 (1986).

[44] Reed, I. A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme. *Transactions of the IRE Professional Group on Information Theory* **4,** pp. 38—49. DOI: 10.1109/TIT.1954.1057465 (1954).

[45] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.8.1)* `https://www.sagemath.org` (2023).

[46] Sarwate, D. V. *Weight enumeration of Reed-Muller codes and cosets* Advisors: E. R. Berlekamp and J. D. Ullman. PhD thesis (Princeton University, Princeton, NJ, Aug 1973).

[47] Schoof, R. Counting points on elliptic curves over finite fields. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux* **7,** pp. 219—254 (1995).

[48] Serret, J.-A. Sur un théorème relatif aux nombres entiers. (in French). *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **1e série, 13,** pp. 12—14 (1848).

[49] Silverman, J. H. *The Arithmetic of Elliptic Curves* (Springer, 2009).

[50] Sloane, N. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* available at https://oeis.org/wiki/List_of_weight_distributions. 2024.

[51] Sloane, N. & Berlekamp, E. Weight enumerator for second-order Reed-Muller codes. *IEEE Transactions on Information Theory* **16,** pp. 745—751. DOI: 10.1109/TIT.1970.1054553 (1970).

[52] Snir, M., Otto, S. W., Walker, D. W., Dongarra, J. & Huss-Lederman, S. *MPI: The Complete Reference* (MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1995).

[53] Sugino, M., Ienaga, Y., Tokura, N. & Kasami, T. Weight distribution of (128, 64) Reed-Muller code (Corresp.) *IEEE Transactions on Information Theory* **17,** pp. 627—628. DOI: 10.1109/TIT.1971.1054678 (1971).

[54] Sugita, T., Kasami, T. & Fujiwara, T. The weight distribution of the third-order Reed-Muller code of length 512. *IEEE Transactions on Information Theory* **42,** pp. 1622—1625. DOI: 10.1109/18.532911 (1996).

[55] van Tilborg, H. C. A. Elliptic curve cryptosystems; too good to be true? *Nieuw Archief Voor Wiskunde* **5,** pp. 220—225 (2001).

[56] van Tilborg, H. C. A. *Weights in the third-order Reed-Muller codes* in: *Technical Report 32–1526* **4** (NASA Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 1971).

[57] von zur Gathen, J. & Gerhard, J. *Modern Computer Algebra, Third Edition* DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139856065 (Cambridge University Press, 2013).

[58] Washington, L. C. *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography* (CRC press, 2008).

[59] Wilker, P. An Efficient Algorithmic Solution of the Diophantine Equation $u^2 + 5v^2 = m$. *Mathematics of Computation* **35,** pp. 1347—1352 (1980).

[60] Wright, S. *Quadratic Residues and Non-Residues: Selected Topics* 2016. arXiv: 1408.0235 [math.NT].