

РЕЦЕНЗИЯ

Върху дисертацията на Младен С. Савов

“Теория на експоненциалните функционали на процесите на
Леви”

представена за придобиване на научната степен

“Доктор на науките”

В дисертацията на Младен Савов се изследва разпределението на експоненциалните функционали на процесите на Леви. Тази задача е актуална и върху нея се работи интензивно през последните години, като съществен принос за развитието на теорията има авторът на представения дисертационен труд. Приложенията на тази теория са многобройни и включват области като финансовата математика, разклоняващите се случайни процеси в случайна среда, биологията и астрофизиката. От друга страна, задачата е извънредно сложна и подходът към нея изисква задълбочено познаване на най-новите достижения в различни области на математиката като теорията на процесите на Леви, комплексния анализ, теорията на интегралните трансформации, спектралната теория и др. В преобладаващата си част, резултатите на автора са нови или са нетривиални обобщения на резултатите на други учени, работещи в тази област. Аналитичният подход, реализиран в пета глава е свързан с въвеждането и изучаването на свойствата на нов клас функции- Бернщайн-Гама функциите, с помощта на които е направена връзка между възможните разпределения на експоненциалните функционали на процесите на Леви и свойствата на експонентата на Леви-Хинчин на тези процеси. Дадени са многобройни примери, илюстриращи цялата мощ на развитата обща теория, като много от тях представляват самостоятелен интерес.

Дисертацията се състои от увод, четири глави, справка за научните приноси и списък на литературните източници, включващ 102 заглавия.

Основният резултат, доказан във втора глава е факторизационна теорема, според която, при определени условия, експоненциалният функционал от процеса на Леви съвпада по разпределение с произведението на два независими експоненциални функционала на по-просто устроени процеси на Леви, свързани с изходния. И двата, участващи във факторизацията процеси са свързани с разлагането на Винер-Хопф на експонентата на Лаплас на изходния процес. Именно, първият представлява отрицателният ladder height процес, а вторият-спектрално положителен процес на Леви, построен с помощта на експонентата на Лаплас на положителния ladder height процес. В съответствие с факторизацията на Винер-Хопф, експонентата на Лаплас на изходния процес е със знак минус произведение на експонентите на Лаплас на двата ladder height процеса. Основните

предположения, при които е доказана теоремата са наличие на краен отрицателен първи момент на изходния процес, наличие на ненарастваща плътност на мярката на Леви на положителния ladder height процес и ограниченост на експонентата на Лаплас на изходния процес в ивица на комплексната равнина, ограничена отляво от имагинерната ос. С помощта на апроксимационна техника тези предположения в следствие са отслабени значително и теоремата е доказана при спазването на две други групи условия.

Главните факти, които се използват при доказателството на теоремата в основния случай са следните:

- 1) Разпределението на експоненциалния функционал на всеки процес на Леви съвпада със стационарното разпределение на обобщен процес на Орнщайн-Уленбег, построен по дадения процес на Леви. Известно е, че плътностите на стационарните разпределения на случайните процеси са хармонични функции на инфинитезималните генератори на тези процеси;
- 2) При направените предположения, трансформациите на Мелин и на двата участващи във факторизацията процеса удовлетворяват функционалното уравнение (2.4.1) в същата ивица на комплексната равнина, в която е ограничена експонентата на Лаплас на изходния процес на Леви.

Тези два факта са свързани в доказателството по следния начин. От факторизацията на Винер-Хопф и от това, че участващите във факторизацията процеси удовлетворяват функционалното уравнение (2.4.1) следва, че случайната величина, съвпадаща по разпределение с произведението на двата независими експоненциални функционала също удовлетворява това уравнение. От този факт и от доказаната формула (2.4.2) в Лема 2.4.4, следва, че трансформацията на Мелин на оператор, двойствен на инфинитезималния генератор на обобщения процес на Орнщайн-Уленбег, построен по дадения процес на Леви е равен на нула във въпросната ивица на комплексната равнина. От тук, поради взаимната еднозначност на трансформацията на Мелин, плътността на построената случайна величина принадлежи на ядрото на споменатия оператор, т.е. тя е плътност на стационарното разпределение на обобщения процес на Орнщайн-Уленбег.

Следва да се отбележи, че авторът по изяснен начин е преодолял трудностите, свързани със структурата на инфинитезималния генератор на обобщения процес на Орнщайн-Уленбег. Това е локален оператор и към него трудно може непосредствено да се приложи трансформацията на Мелин. За целта е въведен интегрален оператор, действащ в пространство, спрегнато на областта на действие на инфинитезималния генератор на процеса, като връзката между двата оператора е дадена в Предложение 2.3.1, формула (2.3.7). В случая е използвана модификация на идеята, която в теорията на диференциалните уравнения води до понятието слабо решение.

В качеството на приложения на основния резултат са разгледани три примера. Първият пример се отнася до спектрално отрицателни процеси на Леви. Техният положителен ladder height процес представлява детерминирано движение

със скорост 1, изчезващо с интензивност, равна на максималния положителен корен на експонентата на Лаплас на процеса. Съответният спектрално положителен процес, участващ във факторизацията на експоненциалния функционал е Брауново движение с отрицателен дрифт, разпределението на експоненциалния функционал на който е известно от по-ранна работа на Ж. Бертоан и М. Йор. Като се използва този факт е получена асимптотична формула за поведението опашката на разпределението на експоненциалния функционал, както и разлагане в ред на неговата плътност при достатъчно големи стойности на аргумента. При втория пример аналогични резултати са получени за процес на Леви с дифузионна компонента и експоненциална плътност на мярката на Леви на положителната част на реалната права. В този случай, разпределението на експоненциалния функционал на участващия във факторизацията спектрално положителен процес също допуска явно описание. В третия пример резултати от същия тип са получени за процес на Леви, отрицателният ladder height процес на който е такъв, че неговата плътност се изразява чрез плътността на α -устойчива случайна величина, $0 < \alpha < 1$.

Факторизационната теорема, доказана във втора глава е усилена значително в трета глава, в която са снети две съществени ограничения, свързани с основния процес на Леви. Първо, допуска се той да изчезва с положителна интензивност, и второ, да няма крайно математическо очакване. В тази ситуация методът на доказателство, използван във втора глава не работи, тъй като областите на аналитичност на двата множителя участващи във факторизацията на Винер-Хопф могат да не се пресичат. Тази трудност е преодоляна по следния начин. Използвана е идея от неотдавнашна, все още не излязла от печат работа на М. Chazal, А Курпианов и Р. Ратие, в която въведена трансформация, с помощта на която е показано, че спектрално отрицателен процес на Леви с безкрайно или несъществуващо очакване, може да бъде апроксимиран с процеси на Леви с крайно математическо очакване, при условие, че неговата експонента на Лаплас е ограничена в ивица, граничеща отляво с имагинерната ос. В трета глава този резултат е разпространен върху произволни процеси на Леви, стига мярката им на Леви на големите положителни скокове да намалява достатъчно бързо. За трансформирания процес на Леви са изпълнени всички условия, при които е вярна факторизационната теорема от втора глава, и в Теорема 3.2.4 е показано, че разпределението на експоненциалния функционал на изходния процес на Леви може да се получи с граничен преход от разпределенията на същите функционали на трансформирания процес. По такъв начин авторът се справил с трудността, свързана с отсъствието на крайно математическо на изходния процес.

Що се отнася до изискването основният процес на Леви да е изчезващ с положителна интензивност, в Лема 3.2.8 е направено обобщение на съответния резултат от втора глава, необходим за реализирането на апроксимационната процедура. Обобщения на известни резултати на V. Vigon в случай на изчезващи процеси са направени още в Лема 3.2.10, където са дадени необходими условия да е изпълнена факторизацията на Винер-Хопф и в Предложение 3.2.7, където е доказано, че изпълнено известното equation amicale inversee.

Основният резултат на тази глава е илюстриран с примери, в които е характеризирано разпределението на експоненциални функционали на изчезващи процеси на Леви. Доказано е, че плътността на разпределението на експоненциален

функционал на процес, експонентата на Лаплас на който е ограничена в интервала $[-1,0]$ е непрекъсната и ненамаляваща функция. В случай на субординатор с мярка на Леви, удовлетворяваща условията на факторизационната теорема е показано, че плътността на разпределението на експоненциалния му функционал приема стойност в нулата, равна на интензивността на изчезване на субординатора. Получени са разлагания на плътността в степенен и функционален ред, като е установено, че в случай на степенен ред радиусът на сходимост на реда е реципрочен на дрифта на субординатора. Освен това резултатите, получени във втора глава и отнасящи се до спектрално положителни и спектрално отрицателни процеси са разпространени за процеси с положителни интензивности на изчезване.

Друго, нетривиално приложение на факторизационната теорема е направено за изследване на разпределението на момента на първо достигане на ниво от страна на устойчиви процеси на Леви. Получени са общи свойства на плътността на този момент в зависимост от индекса на устойчивост и от вероятността в даден момент той да се намира в горната полуравнина.

Най-новите резултати на автора се съдържат в пета глава. За разлика от първите две глави, където при изследването на свойствата на експоненциалните функционали на процесите на Леви е използван вероятностен подход, в пета глава е развит мощен аналитичен апарат, основан на въвеждането на нов клас от функции, по терминологията на автора, Бернщайн-Гама функции. Мотивацията за използването на тези функции е свързана със следните две обстоятелства:

- 1) Функциите на Бернщайн, с помощта на които се дефинират Бернщайн-Гама функциите, са тясно свързани с участващите във факторизацията на Винер-Хопф експоненти на Лаплас на положителния и отрицателен ladder height процеси¹;
- 2) Функционалното уравнение, което удовлетворява трансформацията на Мелин на разпределението на експоненциалния функционал, може да се сведе до две по-прости функционални уравнения, решения на които са именно Бернщайн-Гама функции.

Тогава когато функцията на Бернщайн е тъждествената функция, т.е. когато съответния ladder height процес представлява дрейф със скорост 1, Бернщайн-Гама функцията съвпада с класическата Гама функция. В пета глава е показано, че свойствата на Бернщайн-Гама функциите в голямата си част са подобни на тези на класическата Гама функция. Именно, за тях съществуват аналози на интегралните представяния и на разлагането в безкрайно произведение (формулата на Вайерщрас). Освен това, тяхното асимптотично поведение, особени точки и други важни характеристики твърде много напомнят тези на класическата Гама функция. Предимството на този аналитичен подход се състои в това, че ако е известно разлагането на Винер-Хопф на експонентата на Лаплас на изходния процес на Леви, то като се използва формулата на Вайерщрас (по-точно нейното обобщение

¹ По-конкретно, експонентата на Лаплас на отрицателния ladder height процес е умножена на -1 функция на Бернщайн, а тази на положителния ladder height процес- нечетна трансформация на такава функция

за представянето на Бернщайн-Гама функцията като безкрайно произведение), може в явен вид да се намери преобразованието на Мелин на разпределението на експоненциалния функционал. От друга страна, тъй като това разлагане еднозначно се определя от експонентата на Лаплас, това позволява да се анализират вероятностните свойства на функционала единствено въз основа на аналитичните свойства на тази експонента.

Илюстрация на този подход е Теорема 5.2.7, в която е показано, че гладкостта на плътността на разпределението на експоненциалните функционали, представляващи предмет на изследване в първите две глави, зависи от скоростта на намаляване на експонентата на Лаплас на процеса по правите, успоредни на имагинерната ос и лежащи в ивицата на аналитичност на тази експонента. От друга страна, от Теорема 5.2.5 става ясно, че тази скорост е поне полиномиална, а при наличието на дрейф на отрицателния ladder height процес или отсъствие на такъв при положителния ladder height процес, при изпълнени допълнителни условия, отнасящи се до опашката на неговата мярка на Леви, е налице дори експоненциална скорост на намаляване. Важно е да се отбележи, че в тази теорема са намерени точните стойности на константите, определящи асимптотичното поведение на експонентата на Лаплас на тези прави. Теорема 5.2.14 и 5.2.19 описват асимптотичното поведение на функцията на разпределение на експоненциалния функционал при големи ($x \rightarrow \infty$) и малки ($x \rightarrow 0$) на аргумента. В първият случай се оказва, че въпросната асимптотика се определя от характерна константа, свързана с отрицателния ladder height процес. Ако изходният процес на Леви не приема дискретно множество от стойности е намерена точната асимптотика. Авторът въвежда понятието *weak non-lattice class* и в рамките на този клас получава точни асимптотични формули не само за функцията на разпределение, но и за нейните производни до определен ред.

В дисертацията са разгледани и експоненциални функционали с краен времеви хоризонт. Тъй като за такива функционали въпросите свързани със сходимостта отпадат, това дава възможност развитата теория да се приложи и към консервативни процеси на Леви. В Теорема 5.2.24 е получена асимптотична формула, характеризираща разпределението на експоненциалните функционали на широк клас процеси на Леви при големи стойности на хоризонта.

Забелязани неточности и несъответствия:

- във формули (2.1.2) и (2.1.3) на стр. 9 е написано $\mu_{\pm}(y)$. Трябва да бъде $\mu_{\pm}(dy)$;
- на стр. 8 на ред 12 отдолу се цитират статии [73] и [76] от библиографията, като читателят остава с впечатление, че статиите имат два автора. Те обаче са с единствен автор;
- формулата на предпоследния ред на стр. 47 започва с $T_{\beta}\Psi_q(z+\beta)$. Трябва да бъде $T_{\beta}\Psi_q(z)$;
- на стр. 58, ред 4 отдолу е написано $\phi_{q-}(z)=1$. Трябва да бъде $\phi_{q-}(z)=-1$;
- във формулировката на Теорема 5.2.19 на стр.79 на два съседни реда е написано веднъж $f_{\Psi}(0^+)=\Psi(0)$, и втори път $f_{\Psi}(0^+)=-\Psi(0)$. Очевидно, вярна е втората от тези формули.

Всички споменати по-горе неточности са чисто технически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ:

В представения дисертационен труд почти в завършен вид е представена теорията на експоненциалните функционали на процесите на Леви. Стилът и изложението правят силно впечатление с ясното и точно представяне на идеите, връзката на получените резултати с изследванията на други автори, с перфектната техника на доказателствата, които не оставят отворени въпроси. Заедно с други блестящи млади математици, кандидатът има съществен принос за създаването на мощна и красива теория, имаща многобройни и важни приложения. Въз основа на това убедено предлагам на уважаемото жури да присъди на Младен Савов научната степен «Доктор на науките».

Рецензент:

/доц. д-р Дончо Дончев/