

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд

„Theory of Exponential Functionals of Levy Processes”

за присъждане на научната степен **„Доктор на науките“**,

Област 4. Природни науки, математика и информатика,

Професионално направление 4.5. Математика, Научна специалност

„Теория на вероятностите и Математическа статистика“

Автор: Доцент д-р Младен С. Савов, ИМИ-БАН

Рецензент: Професор дмн Николай М. Янев, ИМИ-БАН

1. Основни сведения.

Представеният дисертационен труд е на английски език и съдържа 177 страници текст, от които 7 стр. са библиография със 102 работи. Освен това е представен Автореферат на български език със заглавие **„Теория на Експоненциалните Функционали на Процеси на Леви“**, което съответства на английския текст. Авторефератът съдържа 75 стр. текст, от които 5 стр. са библиография с 66 работи. По-нататък ще се придържахме към терминологията, въведена в автореферата.

Авторът д-р Младен С. Савов е доцент в секция „Изследване на операциите, вероятности и статистика” към ИМИ - БАН. През периода 2000 - 2004 г. М. Савов е бил студент във ФМИ на СУ. След това от 2005 до 2008 г. е бил аспирант в Университета на Манчестър, където защитава дисертация на тема „Small Time Behavior of Levy Processes” с научен ръководител професор R. Doney. През 2008-2009 г. е бил postdoc при професор J. Bertoin в Université Pierre et Marie Curie, Париж. От 2009 до 2012 г. е бил Research Fellow в New College, Oxford. През периода 2012 – 2014 г. е бил лектор в University of Reading, UK. Получил е три награди като студент и млад учен и е участвал в три проекта и 5 гранта, които са подробно описани в автобиографията.

Предзащитата на дисертационния труд е проведена в ИМИ-БАН на разширено заседание на секция ИОВС на 02.12. 2016. Журито е назначено с заповед 336/21.12.2016 на директора на ИМИ-БАН на основание решение на НС на ИМИ-БАН (Протокол №12 от 16.12.2016). Освен споменатите по-горе документи, са приложени още списък на публикациите със съответния импакт-фактор, както и самите публикации на електронен носител, а също и списък със цитатите по дисертацията.

Документацията и всички процедури по защитата са в съответствие с изисванията на закона и съответните правилници.

2. Структура и анализ на дисертационния труд и автореферата.

Най-общо казано, представената дисертация е в областта на теория на стохастичните процеси на Леви, които се явяват едно естествено продължение на класическата вече теория на безгранично-делимите случайни величини, важни приноси в която имат такива математици като Леви, Хинчин, Бернщайн, Колмогоров, Гнеденко, Фелър и др. От друга страна, процесите на Леви обхващат като частни случаи такива важни класове процеси като Брауново движение (Винеров процес) и Пуасонов процеси. Да отбележим, че това е една бурно развиваща се област на стохастиката с многобройни приложения. Представеният дисертационен труд е посветен на някои проблеми от тази теория, свързани с изследването на интеграли от еспоненти на траекториите на различни класове процеси на Леви, които естествено са случайни величини и се интерпретират като експоненциални функционали: $I(\Psi) = \int_0^\infty \exp\{-\xi(s)\} ds$, където $\Psi(z)$ е съответната функция на Леви-Хинчин, която определя процеса на Леви $\xi = \{\xi(s), s \geq 0\}$.

Дисертационният труд започва с кратък увод (Chapter 1) от 1 страница и има четири съдържателни глави (Chapter 2 – 5), които са дословно четири статии. Единствената разлика със статиите е всъщност променената номерация на формули и теореми, като към съответния номер от статията е добавен отпред номер на главата. Единствено в Глава 3 е съкратен §3.2 от съответната статия, който съдържа някои интересни примери. В последната глава (Chapter 6) са описани на 7 страници основните научни приноси на дисертацията, които ясно показват, че получените нови и интересни резултати са на високо научно ниво. Въпреки че главите (статии) са посветени на една и съща тематика - експоненциални функционали на процеси на Леви, то по форма не може да се каже, че дисертацията има монографичен характер, както обикновено сме свикнали с „големите докторски дисертации“. Най-малкото липсва едно общо въведение, с подробен научно-исторически обзор по тематиката.

Тази празнота на дисертацията се запълва до известна степен от подробния автореферат (75 стр. на български език). Всъщност читателят трябва да започне запознанството си с дисертационния труд именно от автореферата, който има в началото един по-подробен увод (от 11 стр.),

където са изложени целите и структурата на дисертацията, съответните публикации, дадени са някои основни дефиниции и означения, а накрая (на 3 стр.) са представени някои кратки историографски бележки и обзор на съответната литература. Интересната и модерна тематика определено заслужава едно много по-подробно и по-пълно представяне. Всъщност едва тук в автореферата се разбира, кои точно статии са влезли в дисертацията. След едно самостоятелно разследване читателят може да констатира, че представените 4 „статии, на които се базират главите от дисертационния труд“ са цитират по следния начин в дисертацията (Д), автореферата (А) и приложеният отделно файл със самите публикации (П): [1] – Гл. 2 – Д [68] – А [46] – П [5]; [2] – Гл. 3 – Д [78] – А [51] – П [6]; [3] – Гл. 4 – Д [79] – А [52] – П [7]; [4] – Гл. 5 – Д [82] – А [54] – П [10].

По същият начин могат да бъдат представени и останалите 9 статии, 6 от които са наречени „статии, директно свързани с дисертацията“ и последните три самостоятелни статии, класифицирани като „някои други публикации“. По-подробен анализ на публикациите ще бъде даден по-нататък, но и сега си струва да отбележим, че всички статии са в престижни международни списания с импакт фактор и имат добра цитируемост, независимо че са публикувани в последните години.

По-нататък в Гл. 2 от автореферата са дадени основните дефиниции и резултати от съответната Гл. 2 на дисертацията, като са изложени и някои основни идеи от доказателствата, свързани най-вече с основната Теорема 2.2.1. Аналогична структура има и следващата Гл. 3 от автореферата, която съответства на Гл. 3 от дисертацията. Да отбележим, че тематиката на тези две глави е свързана с факторизации от типа на Винер-Хопф относно експоненциални функционали на Леви процеси. Глава 4 от автореферата е посветена на Гл. 4 и Гл. 5 от дисертацията, предвид общата връзка на така наречените функции на Бернщайн-Гама с функционалите от експоненциален тип при Леви процеси. Въобще това е основната част от дисертацията с най-силните и интересни резултати. За съжаление тук се е получила една бъркотия в номерациите на теоремите, така че читателят трябва да положи доста усилия, за да се ориентира.

Например, за Теорема 4.2.2 от автореферата е посочено, че съответства на Теорема 5.3.1 от дисертацията. Отбелязано е също, че $T.4.3.1(\text{автореферат})=T.5.2.1(\text{дисертация})$, аналогично $T.4.4.1(a)=T.5.2.7(d)$. Читателят обаче сам трябва да намери, че Теорема 4.2.4 (Автореферат) е

всъщност Теорема 5.3.2 (Дисертация). Аналогично, читателят трябва сам да установи, че:

$T.4.2.4 (A)=T.5.3.2 (D)$, $T.4.3.4 (A)=T.5.2.5 (D)$, $T.4.4.5 (A)=T.5.2.14 (D)$, $T.4.4.10 (A)=T.5.2.27(D)$, $T.4.4.12 (A)=T. 5.2.24-2 (D)$.

Добра идея е, че в автореферата се обръща внимание на някои оригинални идеи от доказателствата в дисертацията, излагането на които заема около 14 страници. А и след като разполага с горните релации, читателят вече много по-лесно може да се ориентира при четенето на дисертацията.

3. Научни приноси.

Глава 5 от автореферата е озаглавена „Научни приноси в дисертационния труд“, където на 8 страници са дадени основните приноси в отделните глави, като е посочена номерацията на формули и теореми от автореферата. Отделно, като беше вече отбелязано, в Глава 6 на дисертацията тези научни приноси са представени на английски език, но със съответната номерация от дисертацията, която както беше показано е съвсем различна от тази в автореферата. Не е ясно, кое от кое е превод, но очевидно става въпрос за едни и същи неща, което вече лесно се установява с помощта на намерените по-горе равенства.

Като изключим тази двойственост, научните приноси са много ясно и точно представени, както в чисто математичен план (т.е. чрез формули), така и в описателен и специфично-стохастичен аспект. Тук веднага трябва да подчертаем, че наред с основните резултати, доказани в теореми (най-често с дълги и трудни доказателства), има и редица интересни следствия, които заслужават специално внимание. Ще се спрем накратко на някои от най-съществените и интересни резултати в отделните глави.

В Глава 2 от дисертацията и в Глава 2 от автореферата се разглеждат проблеми, свързани с факторизация от тип на Винер-Хопф за експоненциални функционали от процеси на Леви. Има известна разлика в двете представяния, тъй като в дисертацията знакът пред процеса в експонентата е $+$, докато в автореферата този знак е минус. Дисертантът нарича това „разлика от пренебрежима важност“, без да обяснява от какви съображения е направена. Във всеки случай това създава известни затруднения и затова, както вече обявено, ще се придържаме към автореферата. Основен резултат в тази глава е Теорема 2.2.1. Номерацията в автореферата и дисертацията съвпадат, но означенията естествено са

различни. Всъщност по-важното е, че духът на двете изложения е един и същ. Нещо повече, този смисъл като че ли по-добре се разбира като се сравняват двете представяния. Намерената факторизация от вероятностна гледна точка показва, че (съгласно автореферата) експоненциалният функционал на Леви се представя (по разпределение) като произведение на две независими случайни величини, които са също експоненциални функционали, единият от които е от H^+ (т. н. процес на максимум), а другият е процес на Леви само с отрицателни скокове (в дисертацията естествено е обратно: H^- и положителни скокове). Интересно е Следствие 2.2.4 (Сл. 2.2.1 от дисертацията), когато се разглежда процес на Леви притежаващ само положителни скокове (респективно отрицателни скокове в дисертацията). В този случай е показано, че втората случайна величина е $1/\Gamma$, където първият параметър на Гама-разпределението е отрицателна нула на експонентата на Леви-Хинчин, а вторият е просто единица. Намерено е и асимптотичното разлагане на плътността (2.2.7) [респективно (2.2.3) в дисертацията]. Доказателството на тези резултати е доста сложно и включва представянето на експоненциалният функционал на процеса на Леви като граница на обобщен процес на Орнщайн-Уленбек и преминава през няколко етапа, основните идеи на които са добре обяснени в автореферата.

В Глава 3 всъщност се продължават и съществено разширяват изследванията започнати в Глава 2. И тук ситуацията между автореферата и дисертацията е същата, както в предната глава (т.е. знак минус в автореферата и знак плюс в дисертацията). Основените резултати в Глава 3 са представени в Теорема 3.2.1 (А), на която съответства Теорема 3.1.1 (Д), които дават едно разширение на факторизационната Теорема 2.2.1 от предната глава (в смисъл, че условията са съществено отслабени). Всъщност условията в Т.3.2.1 (А) и Т.3.1.1 (Д) се различават, като условията в автореферата изглеждат по-слаби. Интересно е Следствие 3.2.4 (А), на което съответства Следствие 3.1.5 (Д), където се разглеждат стабилни (устойчиви) процеси на Леви с индекс в интервала $(0,2]$. Показано е, че моментът на първо излизане от интервала $(0,1)$ има същото разпределение като супремума на процеса в този интервал, но на степен минус индекса на стабилност. При допълнителни ограничения за индекса, това разпределение има и плътност. В Следствие 3.2.5 (А) за нарастващ убит процес на Леви е дадено, че експоненциалният функционал има напълно монотонна плътност и е намерено разлагането в асимптотичен

ред. Това съответства на Следствие 3.2.3 (Д), където има и други резултати. Основна роля при доказателствата в тази глава играе трансформация (3.3.3) от автореферата (вж. Също Твърдение 3.2.1 от дисертацията). Тази трансформация на експонентата на Леви-Хинчин зависи от произволен положителен параметър. Основният проблем е в изледване на трансформирания експоненциален функционал, когато параметърът клони към нула. Всъщност тази трансформация играе сега съответната роля на обобщения процес на Орнщайн-Уленбек от предната глава.

Глава 4 от автореферата представя Глава 4 и 5 от дисертацията. Всъщност Глава 4 е публикация в Доклади на Френската академия, където са анонсирани част от резултатите, които подробно се разглеждат и доказват в Глава 5. Както беше вече отбелязано, основните резултати на дисертацията са получени в Глава 5, която заема 103 страници от дисертацията.

Първите интересни резултати са представени в Теорема 4.2.2 (Автореферат), които са част от по-подробната Теорема 5.3.1 (Дисертация). В (4.2.9) от автореферата (респективно (5.3.9) от дисертацията) е дефинирана функцията $W(z; \phi)$, където $\phi(z)$ е функция на Бернщайн. За $W(z; \phi)$ е показано, че е функция на Бернщайн-Гама, т.е. удовлетворява уравнение (4.2.5)-А (респективно (5.3.4)-Д): $W(z+1; \phi) = \phi(z) W(z; \phi)$, което обобщава класическото рекурентно уравнение за Гама функцията на Ойлер (което се получава при $\phi(z) \equiv z$). Освен това са намерени редица интересни аналитични свойства, области на мероморфност, полюси, резидиуми и т.н. Теорема 4.2.4-А (респективно Т.5.3.2-Д) изследва асимптотичното поведение на $W(z; \phi)$ и предлага аналог на класическата асимптотика на Стирлинг. Интересни са Remarks 5.3.3-5.3.7 от дисертацията, две от които са представени и в автореферата. Теорема 5.3.8 (Д) изследва $\log W(z+1; \phi)$.

По-нататък фундаментална роля играе основното рекурентно уравнение $M(z+1; \psi) = [-z/\psi(-z)] M(z; \psi)$, където $\psi(z)$ е съответната функция на Леви-Хинчин, която дефинира процеса на Леви. В Теорема 4.3.1-А (респективно Т.5.2.1-Д) е намерено, че това уравнение се удовлетворява от функцията $M(z; \psi) = \Gamma(z) W(1-z; \phi^-) / W(z; \phi^+)$, където $\psi = (-\phi^+)(\phi^-)$, а $\phi^+(z)$ и $\phi^-(z)$ са дефинирани в (1.5.4)- (1.5.8) от автореферата чрез процесите на максимум H^+ и минимум H^- . Показано е, че $M(z; \psi)$ е мероморфна функция и са намерени нейните резидиуми. Интересни са Remarks 5.2.2-5.2.4 от дисертацията, две от които са представени и в автореферата. Т. 4.3.4-А

(Т.5.2.5-Д) изследва асимптотиката на M по фиксирано ординатно направление и показва полиномно намаляване към нула: (4.34) –(4.3.6). В Remark 4.3.6 е показано значението на тези резултати за обратната трансформация на Мелин.

Всъщност най-удобният аналитичен апарат за изследване на експоненциалния функционал $I(\Psi)$ се оказва неговото преобразование на Мелин: $M(z+1; I(\Psi)) = E\{\exp(z \log I(\Psi))\}$. В Т.4.4.1-А (Т.5.2.7-Д) е намерено, че $M(z; I(\Psi)) = \Phi^-(0) M(z; \Psi) = \Phi^-(0) \Gamma(z) W(1-z; \Phi^-) / W(z; \Phi^+)$ и е решение на основното рекурентно уравнение $M(z+1; \Psi) = [-z / \Psi(-z)] M(z; \Psi)$. Получени са интересни резултати за функцията на разпределение $F(x)$ на $I(\Psi)$, за плътността $f(x)$ и за нейните производни. Интересни случаи и коментари са представени в Remarks 5.2.8-5.2.11 от дисертацията. Следствие 5.2.12 дава асимптотиката на $F(x)$ около нулата.

Намирането на преобразование на Мелин в явен вид дава възможност за по-детайлно изследване на свойствата на функцията на разпределение и нейните производни. Теорема 4.4.5-А (Т.5.2.14-Д) предлага асимптотиката, когато аргументът x клони към безкрайност. Показано е, че $F(x)$ и нейните производни имат правилно изменящи се опашки, където показателите и съответните константи са точно намерени. Remarks 5.2.15-5.2.18 от дисертацията дават допълнителни детайли.

Теорема 4.4.9-А (Т. 5.2.19-Д) показва, че $F(x)/x$ клони към $-\Psi(0)$ при x клонящо към нула. При това в автореферата е дадено, че $-\Psi(0)=f(0+)$, а в дисертацията, че $\Psi(0)=f(0+)$, където $f(x)$ е плътността на $F(x)$. Изглежда, че последното равенство е техническа грешка.

Теорема 4.4.10-А (Т. 5.2.27-Д) престава факторизацията на $I(\Psi)$ в най-общ вид (т.е. при най-слаби условия), а също и във вид на безкрайно произведение. Финалът на доказателството на този факт в Теорема 5.2.27 на стр.156 от дисертацията оставя обаче известно съмнение във формата на съответното представяне.

Изследвано е и асимптотичното поведение на $I(t; \Psi)$ (интеграла до t), когато $I(\infty; \Psi) \equiv I(\Psi) = \infty$. Първо в Т.5.2.22-Д са намерени необходими и достатъчни условия за крайност на отрицателните моменти на $I(t; \Psi)$. Основният асимптотичен резултат се съдържа в Теорема 5.2.24-Д (Т.4.4.12-А), получен при условието на Спизер: $\mathbf{P}\{\xi(t) < 0\} \rightarrow \rho \in [0,1]$. Формула (5.2.41)-Д (респективно (4.4.19)-А) може да бъде интерпретирана като слаба сходимост на посочените в Remark 4.4.13 мерки. Както е отбелязано в Глава 5-А (респективно Гл. 6-Д), то подобни резултати за

случайни блуждания се прилагат при разклоняващи се случайни процеси в случайна среда.

Накрая да отбележим, че всички тези оригинални научни приноси са получени чрез сериозни изследвания, които изискват от една страна задълбочено познаване на стохастичната същност на процесите и съответно развитата теория, а от друга страна използване на редица дълбоки резултати от областта на реалния, комплексния и функционален анализ.

4. Научни публикации.

Структурата на дисертацията и научните публикации, свързани с нея, за добре представени и обяснени в §1.2 и § 1.3 на автореферата, които бяха частично коментирани и в §2 на рецензията. От всички 23 статии 10 са директно свързани с дисертацията, от които 7 са излезли от печат, 1 е приета за печат и две са в процес на рецензиране. Публикуваните статии са в периода 2010-2016 г. Всички те са в реномирани списания с импакт фактор (който е посочен в автореферата и списъкът на публикациите): Ann. Prob. – 1, J. London Math.Soc. – 1, Electron J. Prob. – 2, C.R.Math.Sci.Paris – 1, Prob.Theor.Rel.Fields – 1, Electron. Comm. Prob. - 1, J.Spectr.Theory – 1. Всички тези 10 статии са съвместни, като само две са с трима автори, а другите са с по двама. Всички съавтори са от чужбина, като сред тях името на P. Patie от Франция се среща в 6 статии. Освен това са посочени още 3 самостоятелни статии, които са в областта на процеси на Леви и имат връзка с дисертацията, като са публикувани в Prob.Theor.Rel.Fields – 1, J.Theor.Prob. – 1, Electron. Comm. Prob. – 1. В автореферата са посочени 44 цитирания, но има отделно подробен списък с 52 цитата по Скопус, допълнени до 111 цитата по Гугъл. Всички те са в реномирани списания с импакт фактор и някои дисертации в чужбина. Без съмнение научната продукция на дисертанта надхвърля минималните научни и научно-метрични изисквания съгласно правилника на ИМИ.

5. Бележки и препоръки.

Освен посочените по-горе забележки, биха могли да се посочат още някои очевидно поправими грешки и недостатъци, които обаче не затрудняват сериозно читателя.

Получените резултати имат почти завършен характер и като препоръка бих посочил, че заслужават по-подробно и последователно изложение във

вид на една монография. При това естествено може да се помисли и за опростяване на някои доказателства.

Имам непосредствени отлични впечатления от докладите на дисертанта пред Националния семинар по Стохастика.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представената дисертация има всички качества на сериозен монографичен труд в областта на Стохастиката. Получените интересни резултати дават пълни решения на редица въпроси, свързани с експоненциални функционали на Леви. При това са разработени редица нови методи, както в аналитичен, така и в стохастичен аспект. Особен интерес предствляват функциите на Бернщайн-Гама и техните стохастични приложения.

Всички тези резултати са публикувани в престижни издания с висок импакт фактор в последните 7 години, но имат вече много сериозен международен отзвук (над 111 цитирания). Освен това те са докладвани на редица престижни международни конференции и симпозиуми (някои по покана и като пленарни доклади), а също на семинари в редица реномирани университети.

Всичко това дава пълно основание да заключим, че са налице всички условия от ЗРАСРБ и неговия правилник, както и този на ИМИ-БАН, които се прилагат за получаване на научната степен „Доктор на науките“ по съответната специалност. Ето защо определено предлагам на почитаемото жури да оцени подобаващо високо представения дисертационен труд, а на неговия автор доцент д-р Младен С. Савов да бъде присъдена научната степен „ДОКТОР НА НАУКИТЕ“ в Област 4. Природни науки, математика и информатика, Професионално направление 4.5. Математика, Научна специалност „Теория на вероятностите и Математическа статистика“.

10.04.2017

Резензент:

/професор дмн Николай М. Янев/