

РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р Цецка Григорова Рашкова

на дисертационен труд на тема

„Някои класове от некомутативни пръстени и абелеви групи“

за придобиване на научната степен „доктор на науките“

в професионално направление: 4.Природни науки, математика и информатика,

област: 4.5 Математика

Със заповед на Директора на Института по математика и информатика при БАН ном. 75 от 28.02.2020г. съм определена за член на Научното Жури във връзка с процедурата за защита на дисертационния труд на тема „Някои класове от некомутативни пръстени и абелеви групи“ за придобиване на научната степен „доктор на науките“ в професионално направление: 4.Природни науки, математика и информатика, област: 4.5 Математика с автор д-р Петър Василев Данчев.

Анализ на научните постижения и изложение на основните от тях

Представеният дисертационен труд е в обем 230 страници. Част от него, съдържанието на Глава III в два раздела, представлява своеобразно обобщение на изследванията, направени в първата докторска дисертация. Начална база са понятията чисти и разменни пръстени, въведени от Николсон (TAMS, 1977), нил-чисти пръстени, разглеждани от Дизл (Thesis, 2006; JA, 2013), уникално чисти и уникално нил-чисти пръстени, изучавани от Чен (CA, 2011), както и понятието чист индекс, въведено от Ли и Зо (CA, 2012, 2013). Те обаче са доразвити много детайлно, направени са съществени обобщения от широк спектър, като акцентът е вече върху некомутативни пръстени с 1. Новите части, съдържание на Глава IV, разглеждащи транзитивни и напълно транзитивни абелеви групи, както и просто представени абелеви p -групи, ясно показват хода на развитие на изследванията, а използваният доказателствен апарат вече включва много по-задълбочени и далеч не класически алгебрични резултати от хомологичната алгебра, формалната логика и теория на графите.

Основните постижения на представения дисертационен труд могат да се формулират по следния начин:

1. Намерено е необходимо и достатъчно условие един пръстен да е слабо чист. То е изложено и доказано в Теорема 1.8 от дисертацията (Т. 2.4 от [D1]).
2. Направено е пълно описание (т.е. дадено е необходимо и достатъчно условие за определяне) на разменните 2-UU пръстени. То е формулирано в Теорема 1.30 от дисертационния труд (Т. 2.5 от [D3]).
3. Даден е пример, че за n -UU пръстени при $n > 2$ горното описание не е в сила. Пръстенът $M_2(Z_2)$, който е 3-UU пръстен, е разгледан подробно в Пример 1.51 на описвания труд (Пример 2.6 от [D3]).

4. Намерено е необходимо и достатъчно условие един пръстен да е инво-чист. То е формулирано и доказано в Теорема 1.49 от дисертационния труд (Т. 2.15 от [D4]).
5. Аналогично на 4. е направено описание и за силно инво-чисти пръстени – Следствие 1.51 (Сл. 2.17 от [D4]).
6. Въведена е нова числова характеристика на слабо нил-чистите пръстени, а именно слабо нил-чист индекс. Намерено е необходимо и достатъчно условие този индекс да е 1 (Твърдение 1.63 от дисертационния труд, Тв. 2.11 от [D5]) , както и кога е 2 (Твърдение 1.78 от дисертационния труд, Тв. 2.27 от [D5]). Пресметнат е и индексът за някои матрични пръстени над крайни полета (ще отбележим Примери 1.74, 1.75 и 1.77 от дисертационния труд, съответно Примери 2.23, 2.24 и 2.26 от [D5]).
7. Доста подробна характеристика на абелевите чисти пръстени R с крайна експонента на групата им $U(R)$ дава Теорема 1.102 от дисертационния труд (Т. 3.13 от [D7]).
8. Пълно описание на силно n -периодичните чисти пръстени за нечетно n е направено в Теорема 1.104 (Теорема 3.15 от [D7]).
9. Изследвана е връзката между UU -свойството на пръстен R и груповия му пръстен $R[G]$ и като резултат е получено необходимо и достатъчно условие за наследяване на това свойство, когато G е абелева 2-група. Това е Следствие 2.4 в дисертацията (Сл. 2.2 от [D6]).
10. Доказано е необходимо и достатъчно условие директна сума на делима и редуцирана група да е проективно напълно транзитивна. То се съдържа в Теорема 3.52 от дисертацията (Т. 3.4 от [D12]).
11. Намерено е необходимо и достатъчно условие абелева p -група G да е sft -група (както и $scft$ -група), определено от силно комутаторното напълно транзитивно действие на пръстена от ендоморфизми $E(G)$ върху първата подгрупа на Улм в Лема 3.122 и Лема 3.136 от дисертацията (съответно Л. 3.12 и Л. 3.26 от [D14]).
12. Подробно са описани ω -тотално Σ -цикличните групи в Теорема 4.6 от дисертацията (Т. 2.6 от [D10]). Еквивалентност на свойства на собствени такива групи в теоретико-множествен аспект е дадена в Теорема 4.24 на дисертационния труд (Т. 3.11 от [D10]).
13. Обобщена е теоремата на Нунке (Math.Z., 1967) за тотално проективни групи, като в Теорема 4.43 на дисертацията е доказано необходимо и достатъчно условие абелева p -група да е n -просто представена (Т. 4.4 от [D11]).

Като заключение може да се каже следното: Изучавайки две различни на пръв поглед теми в съвременната алгебра, авторът е успял да намери тясна връзка между тях и посочените приноси са успешния резултат, постигнат чрез нови идеи и методи и чрез развитие и прилагане на модерни алгебрични средства при провежданите изследвания.

Общо описание на публикациите по дисертацията

По дисертацията са цитирани 16 научни публикации, 5 са самостоятелни ([D1]-[D4], [D16]), а останалите 11 са с по един съавтор всяка.

В [D1] са обобщени понятията чисти и разменни пръстени, дефинирани от Николсон (TAMS,1977). Дадени са определенията на слабо чисти и на слабо разменни пръстени в некомутативния случай. Ще посочим, че пръстен R (асоциативен и с 1) е слабо чист, ако е в сила представянето $r=ue$ или $r=u-e$ за всяко $r \in R$, а елементите u и e са съответно обратим елемент и идемпотент в R . Направена е характеристика на двата вида пръстени чрез фактор-пръстена $R/J(R)$ и лифтирането по модул $J(R)$ (т.е. при $r \in R$: $r-r^2 \in J(R)$ съществува $e \in Id(R)$: $e-re \in J(R)$), където $Id(R)$ е множеството на идемпотентите на пръстена R , а $J(R)$ е радикалът на Джекобсон). Доказано е, че при $2 \in J(R)$ направената характеристика се явява необходимо и достатъчно условие пръстенът да е слабо чист (Теорема 2.4) и съответно слабо разменен (Теорема 2.2). При $2 \in J(R)$ понятията чист и слабо чист пръстен съвпадат (Твърдение 2.6), съответно разменен и слабо разменен пръстен (Твърдение 2.5).

В [D2] се въвежда понятието пръстен R само от Джекобсонови единици, означен като JU пръстен (в сила е $U(R)=1+J(R)$). Разглеждат се свойства на тези пръстени, както и на UU пръстените ($U(R)=1+Nil(R)$). Означенията $U(R)$ и $Nil(R)$ са стандартните за множеството на обратимите елементи и съответно на нилпотентите на пръстен R . Ще посочим три от доказаните в [D2] свойства:

- крайните UU пръстени са JU;
- крайните JU пръстени са UU;
- съществуват UU пръстени, които не са JU, както и JU пръстени, които не са UU.

Описани са разменните JU пръстени, разгледани са и приложения на получени резултати за комутативни групови пръстени. Ще посочим Твърдение 5.2 от [D2], според което, ако R е комутативен пръстен и G е абелева група, то ако $R[G]$ е UU (или JU), то R е също UU (или JU).

В [D3] са намерени четири еквивалентни условия, характеризиращи 2-UU пръстените (Теорема 2.5). В Пример 2.6 подробно е разгледан пръстенът $M_2(\mathbb{Z}_2)$ доказващ, че при $n > 2$ цитираната теорема не е вече в сила.

[D4] е посветена на инво-чистите пръстени. Дадено е определението им (за тях $U(R)=1+Inv(R)$), където $Inv(R)$ е множеството на инволюциите в R) и е направена пълната им характеристика (Теорема 2.15). Аналогичен е подходът за силно инво-чисти пръстени (с условие $ve=ev$, $v \in Inv(R)$), характеризирани в Следствие 2.17. Изучена е и алгебричната структура на силно инво-чистите пръстени с единственост на идемпотента от съответното представяне (Теорема 2.19).

В [D5] се въвежда нова числова характеристика за слабо нил-чистите пръстени, а именно слабо нил-чист индекс, посочват се условия кога той е 1 (Твърдение 2.11) и кога е 2 (Твърдение 2.27) и се изчислява стойността му за някои матрични пръстени над крайни полета (ще посочим Примери 2.23, 2.24 и 2.26).

В [D6] се изследва връзката между UU-свойството на пръстен R и груповия му пръстен $R[G]$. Следствие 2.2 представлява необходимо и достатъчно условие кога и двата разглеждани пръстена са UU.

В [D7] са разгледани подробно силно n -периодичните чисти пръстени (допълнителните условия са $u^n=1$ и комутативното свойство на елементите e и u). В Теорема 3.4 е доказано, че тези пръстени удовлетворяват полиномно твърждение от степен $2n$ и радикалът им на Джекобсон е нил с ограничен от n индекс. Теорема 3.13 дава описание на силно n -периодичните абелеви пръстени, а случаят на нечетно n е разгледан в Теорема 3.15.

В [D8] във връзка с общата задача за класификация на напълно инвариантните подгрупи на редуцирана абелева p -група, се разглеждат цокли от напълно инвариантни подгрупи, а именно класът на цокълно-регулярните групи, съдържащ класа на напълно транзитивните групи. Основни свойства на тези групи се съдържат в две теореми. В Теорема 1.2 е доказано, че директна сума на сепарабелна група с произволна група G е цокълно-регулярна тогава и само тогава, когато G е цокълно-регулярна. Освен това е в сила, че G е цокълно-регулярна тогава и само тогава, когато директните ѝ степени са също цокълно-регулярни групи (Теорема 1.4).

В [D9] се разглежда връзката между различните определения за транзитивност за абелеви p -групи. В Следствие 3.2 се доказва, че цокълно-регулярните групи са точно директните събираеми в силно цокълно-регулярни групи.

В [D10] се прави описание на класа на примарните абелеви групи, чийто сепарабелни подгрупи са директна сума на циклически групи (т.е. на ω -тотално Σ -циклическите групи) чрез няколко еквивалентни условия (Теорема 2.6). Изследват се и собствените $\omega+n$ -тотално $p^{\omega+n}$ проективни групи (Теорема 3.11).

[D11] съдържа редица свойства на (силно) n -просто представените групи като важен клас абелеви p -групи. В статията се обобщава теоремата на Нунке (Math.Z., 1967), представляваща необходимо и достатъчно условие група да е тотално проективна, за n -просто представени групи (Теорема 4.4). Използваният апарат е от хомологичната алгебра и включва понятия като силни n -балансиранни точни редици, балансирана проективна резолюция на групата, стойностни групи и стойностни линейни пространства.

В [D12] на базата на определението за пълна транзитивност, дадено от Каплански (PNAS, 1952), се въвеждат две нови понятия, които макар и по-ограничителни (Твърдение 3.5), дават възможност за по-результатни изследвания на новите обекти. Чрез тях се доказва, че директна сума на делима и редуцирана група е проективно напълно транзитивна точно когато редуцираната група е със същото свойство (Теорема 3.4). Аналог на тази теорема за силно напълно проективни групи е Теорема 4.3.

В [D13] се разглеждат комутаторни цокълно-регулярни групи. Подробно тяхно описание представлява Теорема 2.12. Доказано е, че комутаторно цокълната регулярност се наследява от директно събираемо със същото

свойство, ако допълнителното събираемо е сепарабелна група (Теорема 3.8). Интересен е Пример 3.1, за който подробно е изчислен подпръстенът на пълния пръстен от автоморфизми на разглежданата транзитивна група.

[D14] разглежда два въпроса, свързани с пръстена от ендоморфизми на абелева група: кога той е породен от комутатори и кога е адитивно породен от тях. За целта се въвеждат понятията комутаторно пълна транзитивност и силно комутаторно пълна транзитивност. За съответните абелеви групи са използвани означенията *cft*-група и *scft*-група. Свойства на групите от първия вид се изследват в Лема 3.5 и Твърдение 3.6, а от втория – в Следствие 3.22. Интересен е Пример 3.30 на пръстен S , за който съществува S -комутаторно напълно транзитивна група, която не е S -силно комутаторно напълно транзитивна група.

В [D15] се изучават свойствата на абелевите групи с тривиални напълно инвариантни подгрупи; както и такива, на които всички техни нетривиални напълно инвариантни подгрупи са изоморфни. Ще отбележим, че съгласно Твърдение 2.14, ако A е торзионно свободна група от първия вид, има краен ранг и всички нейни ендоморфизми са мономорфизми, това е еквивалентно на свойството пръстенът $E(A)$ от нейните ендоморфизми да е комутативен.

Статия [D16] е в известен смисъл продължение на [D10] и [D11]. Разгледани са редица свойства на групите, представляващи обобщение на тези от [D10] и [D11] (Теорема 3.1 и 3.13), както и такива в духа на теоремата на Нунке (Math.Z., 1967) (Теорема 4.4).

Отражение на резултатите в трудовете на други автори

Включените в дисертацията статии са със сумарен импакт фактор

IF=4,035 и **SJR=0,672**. Самостоятелните статии [D16] и [D4] имат съответно IF=0,365 и SJR=0,227.

Общият брой цитирания е 31 в трудовете на общо 31 автора, като [D11] е цитирана в монография на издателство Springer. Тези данни показват в голяма степен значимостта на получените от автора научни резултати и какво отражение те имат в световните научни изследвания по разглеждани от него теми.

Принос на автора в колективните трудове

Поради липса на допълнителна информация считам, че участието на двамата съавтори във всеки от колективните трудове (11 от включените в дисертацията) е равностойно.

Критични бележки и препоръки

Възможността да се представи хабилитационен труд на английски език задължава авторът да го редактира подобаващо. Мнението ми е, че това не е направено за представения труд.

Посочвам няколко примера за това:

1. Някои от дефинициите са дадени само в *Italic*, други са придружени и с номерация, а някои повторно са дадени на различни места в текста (например Definition 1.1 и Definition 1.33, Definition 1.2 и Definition 1.23), елемент от пръстена R се означава различно - ту с „ a “, ту с „ x “, ту с „ r “.

На места не е спазена последователността на номерацията, някои примери за това са стр. 78, 80, 82, 92, 111, 122, 127.

2. В доказателствата на някои основни теореми има препратки към статии без конкретика за теорема с номер или твърдение с номер (например в това на Theorem 1.16 се цитират [93] и [96], в това на Theorem 1.30 се цитира [93], в това на Corollary 1.50 се цитира [41], в това на Corollary 1.51 се цитира [68]). Докато с търсене на [41] може да се открие твърдението, на което всъщност се позовава авторът (Твърдение 3.16), то не е така за [68], където е твърде трудно, дори невъзможно, да се стигне точно до конкретното цитирано твърдение, а става дума за позоваване в следствие, изведено от автора като един от основните му приноси в дисертацията. Има и други подобни случаи, но се спирам само на тези два.

3. Във формулировката на Lemma 1.38 равенството $24=0$ е смущаващо без обяснения и може да отпадне, тъй като по-надолу се използва само, че 6 е нилпотент. Считаю, че предположението 3 да принадлежи на пръстена се нуждае от доуточняване.

4. Параграфът пред Definition 1.53 ненужно натоварва текста.

5. Определението на „силно слабо нил-чист пръстен“ след Definition 1.35 е дори трудно за произнасяне. Много по-добре е ако „силно“ се замени със самото условие $qe=eq$.

Считаю, че огромното количество определения в дисертацията не улеснява нейното четене с разбиране. Обяснимо е желанието на автора да включи в дисертацията не малка част от несъмнено голямата си и разнообразна научна продукция, но ползването ѝ за информация и особено за квалификация е твърде затруднително.

Качества на Автореферата (на български език)

Авторефератът на дисертационния труд е в обем 40 страници. Той правилно отразява най-същественото от дисертацията, ясно се формулирани научните приноси на кандидата и откритите въпроси за атакуване в бъдеще, цитирани са и работите по написания труд.

Ще направя две съществени забележки и две препоръки:

1. Процесът „copy-paste“ изисква задължителна проверка на крайния резултат. Посоченото в Автореферата заглавие в раздел Общи положения е на първата дисертация, а не на тази за „доктор на науките“.

2. Разпределението на отговорностите на членовете на Научното Жури в същия раздел не е точно (може би поради наложена в последния момент съгласуваност).

Уточнение: Тези 2 забележки се отнасят за варианта, изпратен ми в комплекта материали. В качения на страницата на семинара по алгебра в ИМИ вариант разделът Общи положения липсва.

3. Първият и последен параграф на раздел Перспективи за развитие и основни нерешени проблеми са с едно и също смислово съдържание. Първият е много по-ясен и е добре само той да остане и то в края на раздела.
4. Смятам за правилно списъкът с литературата в Автореферата да съдържа само цитираните източници (31 на брой), а не пълният списък от 110 от дисертационния труд.

Заклучение: Представеният дисертационен труд отговаря на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в БАН и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в Института по математика и информатика на БАН.

Научните постижения, представени в дисертационния труд, имат високи стойностни качества и **моята оценка за тях е положителна**. Това ми дава основание

**да препоръчам присъждането научната степен „доктор на науките“
на д-р Петър Василев Данчев.**

8 Юни 2020 г.

Подпис:

Цецка Рашкова