

РЕЦЕНЗИЯ

върху дисертационния труд за придобиване на научната степен
„доктор на науките”

в област на висше образование

4. Природни науки, математика и информатика

научно направление 4.5 Математика

научна специалност „Алгебра и теория на числата“

Автор на дисертационния труд: гл. асист. д-р Петър Василев Данчев от секция „Алгебра и логика“ на ИМИ към БАН.

Тема на дисертационния труд: „Някои класове от некомутативни пръстени и абелеви групи” (“Some Classes of Noncommutative Rings and Abelian Groups”).

Член на научното жури: акад. проф. дмн Веселин Стоянов Дренски от ИМИ към БАН.

Дисертационният труд е в две класически области на алгебрата – теория на некомутативните асоциативни пръстени с единица и теория на абелевите групи. Въпреки, че обектите, изучавани в тези две области са доста различни, най-важните задачи, които се решават са много близки и много от тях могат да се формулират по един и същи начин. Между двете области има и друга връзка, която е използвана съществено в представената дисертация. Редица свойства на една група зависят от свойствата на пръстени, свързани с групата (например пръстена от ендоморфизмите на групата). Основният проблем, на който е посветена дисертацията, е описанието (често с точност до изоморфизъм) на важни класове от пръстени и абелеви групи и на техни естествени обобщения. Трудът е написан на английски език и е изложен на 230 страници. Състои се от авторска справка с приносите, увод на пет страници, основни понятия и означения, две глави с по два параграфа във всяка, където са изложени основните резултати, списък от нерешени проблеми, списък на използваната литература, списък на публикациите по дисертацията и списък от цитирания на тези статии.

1. Актуалност на разработвания проблем. Теорията на некомутативните пръстени и теорията на абелевите групи са важни области на съвременната математика с многобройни връзки с други математически дисциплини (както в алгебрата, така и извън нея, например теорията на числата, математическата логика, комбинаториката и теория на множествата) и в други области на знанието, като математическата физика, химията, кристалографията и други. Представената дисертация е мотивирана от идеята за конкретно описание на обектите във важни класове от пръстени и групи. В нея се комбинират методи от алгебрата, логиката, комбинаториката и теория на числата, а в частта, посветена на теория на групите – и на методи от хомологичната алгебра и теория на множествата. Считаю, че в дисертацията се изучават и решават важни и актуални задачи. При това се използват известни и се развиват нови разнообразни

техники, като се преодоляват сериозни принципни и технически трудности.

2. Научни приноси. Според автора, главната цел на дисертацията е да представи нови идеи в някои съвременни области на алгебрата и да даде нови методи на изследване, които биха могли да бъдат доразвити в бъдеще. Не съм убеден, че тази задача е решена до края, но във всички случаи дисертантът е постигнал съществени успехи в това направление.

Първата група от приноси е в третата глава на дисертацията и е в областта на теорията на некомутативните пръстени. В главата се разглеждат свойства, свързани с изразяването на елементите на пръстена чрез идемпотенти, нилпотентни елементи и обратими елементи. През тази година се навършват 150 години от излизането на книгата на Бенджамин Пирс „Линейна асоциативна алгебра“ (написана калиграфски и издадена литографски през 1870 г. в малък тираж, предназначен за приятели, а след смъртта на автора издадена и в журнална форма през 1881 г. от неговия син Чарлз Сандерс Пирс, философ, математик и логик). В тази книга Пирс въвежда идемпотентните и нилпотентните елементи и оттогава до днес тяхното изучаване е сред водещите области в теория на пръстените. Например, справката в Mathematical Reviews показва, че има над 2600 статии с думата „идемпотент“ в заглавието. Един от най-изучаваните класове от свързаните с идемпотенти и обратими елементи пръстени е класът на чистите пръстени, въведени от Николсън през 1977 г. Това са пръстени, в които всеки елемент е сума на идемпотент и обратим елемент. Освен чисти пръстени, в дисертацията се разглеждат още няколко класа – разменни пръстени (с идемпотенти от специален вид), нил-чисти (всеки елемент е сума на идемпотент и нилпотентен елемент), инво-чисти (всеки елемент е сума на идемпотент и инволюция), JU-пръстени (пръстени с Джекобсонови единици, когато обратимите елементи са от вида $1 +$ елемент от радикала на Джекобсон), UU-пръстени (обратимите елементи са от вида $1 +$ нилпотентен елемент) и др. както и техни „слаби“ версии, когато освен суми се разглеждат и разлики на съответните елементи. Ще отбележим, че някои от тези понятия са въведени от автора. Показва се кой клас в кой се съдържа и се дават примери, които показват, че съответните класове са различни. В част от резултатите условието пръстенът да е с характеристика 2 се заменя с по-слабото условие двойката да принадлежи на радикала на Джекобсон. Редица резултати показват, че при определени условия важни свойства се повдигат от фактор-пръстена по модул радикала до целия пръстен. В много от случаите се дава пълно писание, с точност до изоморфизъм, на съответните класове. Повечето от примерите, които илюстрират получените резултати се отнасят до матрични пръстени над крайни пръстени. Би ми било интересно да видя и други съдържателни примери, в частност и безкрайни такива. Накрая на главата се дават приложения за групови пръстени. В авторската справка са дадени 10 важни резултата, 5 от които се отнасят до пръстени. Имам известни критични бележки към четвъртия от тях (теорема 1.93), който има отношение към теорията на пръстените с полиномно тъждество. Използвайки известни

резултати от теорията (теоремите на Крузе и Лвов за тъждествата в крайни пръстени от 1973 г.) тази теорема може да се усили значително. От условие (1) на теоремата веднага се получава, че разглежданите силно n -периодични чисти пръстени са локално крайни, нил от ограничен индекс и имат редица други интересни свойства. Но от друга страна, приведените в дисертацията аргументи са достатъчно прозрачни, за да компенсират пропуснатата възможност за усиляване на резултата.

Втората група от приноси е в четвъртата глава на дисертацията и се отнася до теорията на периодичните абелеви групи. Тази глава е значително по-голяма от предишната и се базира на повече статии на дисертанта. Описанието на крайните абелеви групи е добре известно. На език, различен от съвременния то е дадено през 1870 г. от Леополд Кронекер, обобщавайки резултати от описанието на квадратичните форми, дадено през 1801 г. от Гаус, а на съвременен език е формулирано от Фробениус и Щикенбергер през 1878 г. За разлика от това, в случая на безкрайни абелеви групи има множество трудни нерешени проблеми. Стандартни аргументи позволяват изследванията да се ограничат до класа на редуцираните (нямащи делими подгрупи) абелеви p -групи, където p е фиксирано просто число. Една от ръководните нишки в изследванията е класификацията на езика на кардиналните и ординалните числа от теория на множествата. Осъществявайки връзка с теория на пръстените, в по-голямата част от главата (в първия параграф, на около 100 страници) се въвеждат и изучават различни видове транзитивност, когато елементи с близки теоретико-множествени характеристики се изпращат един в друг чрез елементи на пръстена от ендоморфизмите или на групата от автоморфизмите на абелевата група. Оказва се, че тук важно място в изследванията заемат идемпотентите и комутаторите в пръстена от ендоморфизми. Инвариантните и напълно инвариантните (или характеристични и напълно характеристични) подобекти (които са затворени съответно относно автоморфизмите и ендоморфизмите на алгебричната система) са централни обекти в теорията на алгебричните системи и в частност в теория на групите. Описанието на напълно инвариантните подгрупи на редуцираните абелеви p -групи е изключително труден и нерешен досега проблем. В дисертацията се разглежда опростена версия на този проблем и се изучава цокълът на напълно инвариантните подгрупи. Въвежда се класът на цокълно-регулярните групи, който съдържа класа на напълно транзитивните групи и се изучават неговите свойства. По-нататък се изучават връзките между различните видове транзитивност и инвариантност и чрез конкретни примери се показват различията между отделните класове. Основните резултати показват как тези свойства се пренасят върху групи по естествен начин свързани с дадената група. Във втория параграф на главата се изучава задаването на групата на езика на пораждащи и определящи съотношения. Класът на просто-представимите абелеви групи (които се задават от определящи съотношения, всяко от които зависи само от един или два пораждащи) е важен клас в теорията на абелевите групи. В

дисертацията се дават обобщения на този клас и се характеризират групите от тези нови класове. В изследванията се използват методи на хомологичната алгебра и от теорията на множествата. Специално внимание е обърнато на въпроса доколко получените резултати зависят от аксиоматиката на Цермело-Френкел и от аксиомата на избора.

Като допълнителна заслуга на дисертанта ще отбележа, че на много места в текста, както и накрая на дисертацията, се формулират нерешени проблеми, някои от които са сериозно предизвикателство към математиците, работещи в областта.

3. Преценка на публикациите по дисертационния труд. Дисертацията се базира на 16 статии, от които 7 са по теория на пръстените (публикувани през 2014 – 2019 г.) и 9 по теория на групите (публикувани през 2009 – 2015 г.). Всички статии са публикувани в авторитетни издания: в J. Math. Tokushima Univ. – 1, Toyama Math. J. – 2, Commun. Korean Math. Soc. – 1, Internat. Electr. J. Algebra – 1, Eurasian Bull. Math. – 1, Contemp. Math. – 1, Archiv Math. (Basel) – 1, J. Commut. Algebra – 1, Mediterr. J. Math. – 1, Houston J. Math. – 1, Results Math. – 1, J. Group Theory – 2, Commun. Algebra – 1, J. Algebra Appl. – 1. От публикациите по теория на пръстените 2 са с SJR фактор, а всичките 9 статии по теория на групите са с импакт фактор. Дисертантът е дал списък от 30 цитата в публикации на 31 автора на публикациите му по дисертацията. Според мене това е скромно постижение, но ще отбележа, че статиите по дисертацията са публикувани не много отдавна, а за натрупвания на повече цитирания е необходимо технологично време. От публикациите 11 са съвместни: 4 са с Голдсмит от Ирландия, по 2 са с Киф от САЩ и Чехлов от Русия, по една са с Къмпиян от Румъния, Ал-Малах от Саудитска Арабия и Матчук от Полша. Тъй като в документацията няма декларации от съавторите за съвместните статии, приемам, че участието на съавторите е равноправно. Наличието на съвместни статии говори за умение за работа в екип, а това е качество, което лично аз ценя високо. Освен това, съвместната работа повишава коефициента на полезно действие, защото в изследванията се използват методи от различни области на математиката. При това, доколкото ми е известно, изследванията са извършени дистанционно, без непосредствени лични контакти.

4. Аprobация на резултатите. Част от резултатите, включени в дисертацията, са докладвани на семинара на секция „Алгебра и логика“ в ИМИ, на конференции в Австрия и Ирландия и на специализиран семинар в Университет в САЩ. От автореферата не става ясно кой е изнесъл докладите в чужбина – дисертантът или съавторите му. Например, от страницата на конференцията в Грац, Австрия, се вижда, че докладът, който се базира на съвместна публикация, е изнесен от Къмпиян. Бих препоръчал на дисертанта по-активно да представя своите резултати на научни форуми в страната и в чужбина, още повече, че сега, като сътрудник на ИМИ, има повече възможности за това. Би било също така добре текстът на дисертацията да се популяризира, като например се качи

в arXiv.org, а след известна преработка в духа на забележките ми по-долу да се помисли за оформянето му като монография.

5. Мнения, препоръки и бележки. Нямам особени критични бележки по изложението. Текстът, посветен на теория на пръстените, е написан достатъчно подробно и на разбираем език, за да може успешно да служи за навлизане в тематиката на магистри и докторанти, което несъмнено е допълнително достойнство на дисертацията. Но частта по теория на групите е по-трудна за четене от математици със стандартни знания в областта на алгебрата, защото изисква предварително запознаване с редица понятия, много от които са твърде специални. Би било добре дисертантът да добави към текста няколко страници, за да въведе и тези понятия и да облекчи работата на читателя. Освен това, на някои места се забелязва, че дисертантът буквално е използват текстове от съответната статия, но не се е погрижил да махне изрази от типа „авторите на настоящата статия“ или да избегне повторения на една и съща дефиниция в различните параграфи на дисертацията. Смятам, че дисертантът добре познава литературата в областта, включително по-старата литература. Списъкът на литературата в дисертацията се състои от 110 заглавия, като са включени източници от 1945 до 2020 г. От тях 61 са публикувани преди 2000 г.

6. Авторефератът и справката за приносите са написани достатъчно подробно и дават ясна и адекватна представа за съдържанието и основните резултати на дисертацията. Бих препоръчал на автора да подходи с по-голяма грижа към българския вариант на автореферата. Редица термини са преведени лошо на български. Например, вместо общоприетото „пръстен на триъгълни матрици“ се употребява „триангуларен матричен пръстен“, вместо „повдигане“ се използва „лифтиране“ и др. Всички думи от названията на институциите започват с главна буква, както е по английския, но не е по българския стандарт. В автореферата неточно е указан председателят на Научното жури по защитата и всичко това, заедно с други дребни неща, разваля много доброто впечатление, оставено от получените резултати.

Заклучение: Представеният дисертационен труд е в актуална област. Той е на високо научно ниво и удовлетворява всички изисквания, поставени пред един дисертационен труд в областта на математиката. Препоръчвам на почитаемото Научно жури да присъди на гл. асист. д-р Петър Василев Данчев научната степен „доктор на науките“ в научното направление 4.5 Математика.

София, 16 юни 2020 г.

Подпис:

(акад. дмн В. Дренски)