

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационен труд
за придобиване на научната степен “Доктор на науките”

Област 4 “Природни науки, математика и информатика”

Научно направление 4.6 “Информатика”

Тема: Класификация на дизайни и сродни на тях комбинаторни структури

Автор: проф. д-р Светлана Тодорова Топалова

Тема на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд е посветен на конструктивна теория на комбинаторните конфигурации. Основната задача, разгледана в него е преброяването и/или класифицирането на специални комбинаторни обекти, притежаващи симетрии. Разгледаните структури включват различни видове комбинаторни дизайни, адамарови матрици, спредове, резолюции на дизайни, както и различни класове кодове. Всички разглеждани задачи са крайни. Трудността при изследването им е в изключително големия им размер. В отделни случаи дори генерирането на примери представлява проблем.

Задачите за конструкция и преброяване на специални комбинаторни структури могат да бъдат изключително трудни и интересни. Достатъчно е да споменем задачата за построяване на проективна равнина от ред 10, за конструиране на двойно-четен самодуален [72, 36, 16]- код, за построяване на тройка взаимно-ортогонални квадрати от ред 10 и много други. Към настоящия момент за атакуването на такива задачи са налице почти само изчислителни средства.

Работата обобщава изследванията на автора през последните 15 години. По-важните задачи, разгледани в дисертационния труд са следните:

- 1) Построяване на нови симетрични дизайни със специални параметри и зададена група от автоморфизми.
- 2) Построяване на адамарови матрици от специални редове и изследване на свързаните с тях комбинаторни конфигурации и кодове.
- 3) Изследване на щайнерови и киркманови системи от тройки със специален параметър.

- 4) Изследване на дизайни, които са кратни на проективни равнини.
- 5) Изследване на спредове в проективните пространства $PG(n, 2)$.
- 6) Изследване на разрешими дизайни и t -паралелизми на $PG(5, 2)$.
- 7) Класифициране и изследване на различни класове кодове.

Литературен обзор

Общото ми впечатление е, че дисертантът познава отлично съвременното състояние на разглежданите проблеми. Голяма част от изследванията ѝ са върху един кръг от задачи и хипотези от комбинаториката считани като значими, както в теоретичен план, така и за приложенията. Дисертантът демонстрира дълбоко познаване на областта на изследванията и възможности творчески да прилага знанията си.

Методика

В изследванията си дисертантът използва основно комбинаторни техники, почиващи на сериозни компютърни изчисления. На места дисертантът използва алгебрични резултати и отделни факти от крайните проективни геометрии. Всички резултати, получени в дисертацията, са получени в резултат на тежки и технически трудни компютърни пресмятания.

Съдържание и резултати на дисертационния труд

Дисертационният труд е в обем от 191 нестандартни машинописни страници и се състои от увод, шест глави, заключение и списък на използваната литература, включващ 262 заглавия. По-долу ще изложим накратко съдържанието на отделните глави от дисертацията.

Уводът съдържа кратко изложение на по-важните резултати от дисертационния труд. Най-общо те се свеждат до генериране на интересни комбинаторни обекти с помощта на компютър. Обединяващ мотив е наличието на достатъчно голяма група от симетрии, което да прави възможно конструирането им. Глава 1 са представени основните понятия и резултати, използвани в дисертацията. В раздел 1.1 са въведени основните комбинаторни обекти и са фиксирани означенията. Представени са и някои класически резултати от теория на дизайните като неравенствата на Фишер и Ман, теоремата на Брук-Райзър-Човла и др. В раздел 2.2 се излагат някои факти от теория на алгоритмите. Подчертано е, че разглежданите задачи са по правило с голяма теоретична сложност. Отбелязано е, че фокусът на изследванията не е върху асимптотичната сложност, а върху намирането на алгоритми за конструкция, които, макар и експоненциални в много от случаите водят до решение. Изложени са няколко фундаментални стратегии за търсене на комбинаторни обект: изчерпващо търсене с

връщане и отхвърляне на частични решения, търсене с връщане с генериране само на нееквивалентни решения, паралелни реализации на алгоритми, алгоритми с разграничаване неизоморфни дизайни, алгоритми за намиране на пълната група от автоморфизми на комбинаторни конфигурации. Особено място е отделено на т.нар. локален подход, същността на който се състои в допускането, че дадена комбинаторна конфигурация притежава достатъчно голяма група от автоморфизми. Това налага ограничения върху структурата ѝ и облекчава значително компютърното търсене. Този подход почива на допускането, че “хубавите” структури имат богата пълна група от автоморфизми (каквато е случаят например с проективните равнини).

Оригиналните приноси на дисертационния труд се съдържат в глави 2–6. Глава 2 е посветена на конструирането на симетрични дизайни и адамарови матрици. В нея се изследват конфигурации при допълнителната хипотеза, че притежават подгрупа на пълната група от автоморфизми, която е от прост ред или пък е изоморфна на D_{10} (и действа по определен начин). В раздел 2.3 са представени резултатите по конструиране на симетрични $(69, 17, 4)$ -дизайни с автоморфизъм от ред 13. Доказано е, че такъв автоморфизъм фиксира точно четири точки и четири блока като останалите точки(блокове) се разполагат в пет орбити с дължина 13. При това допускане съществува единствена орбитна матрица, която удовлетворява необходимите числови условия. Тя може да бъде разширена по няколко начина, което води до четири неизоморфни $2-(69, 17, 4)$ -дизайни. Два от тях са известни преди изследването на Светлана Топалова, докато другите два са нови. Намерените нови $(69, 17, 4)$ дизайни водят и до голям брой нови $2-(52, 13, 4)$ -дизайни, които се получават като остатъчни. Този резултат е рутинен, тъй като се свежда до изследването на конфигурации, получени от изтриването на блок и всички съдържащи го точки (по всевъзможните начини). Пресметнати са и редовете на пълната група от автоморфизми на получените $2-(52, 13, 4)$ -дизайни.

Раздели 2.4–2.6 са посветени на матрици на Адамар от редове 44 и 64 и свързаните с тях дизайни. Матриците на Адамар от тези редове не са класифицирани до момента. За ред 44 до момента на изследването единствената матрица (по мои сведения) бе тази от тип Пейли. В раздел 2.5 са конструирани 387 адамарови матрици от ред 44 с автоморфизъм от ред 7. Те водят до голям брой адамарови 3- и адамарови 2-дизайни – техният брой е съответно 1683 и 57932. Получените матрици са използвани в стандартни конструкции за получаване на самодуални (самоортогонални) кодове. По-нататък се разглеждат и адамарови матрици от ред 64 имащи група от автоморфизми, изоморфна на D_{10} . Изборът на тази група се обуславя от това, че пресмятанията с нея се извършват лесно: блоковете, заместващи отделните елементи на орбитната матрица са симетрични циркуланти от ред 5 със съответния брой единици. Построени са 8330 дизайни с параметри $2-(63, 31, 15)$ и 1691 матрици на Адамар от ред 64. По-нататък е използвана една известна конструкция на Рахили за получаване на $2-(64, 16, 5)$ -дизайни от симетричните $(63, 31, 15)$ с матрица на инцидентност от минимален ранг 16. По този начин са получени всички известни до момента $(64, 16, 5)$ -дизайни с матрица от минимален ранг (равен на ранга на геоме-

тричния дизайн, имащ за точки точките, а за блокове – равнините в $AG(3, 4)$). Целта на тази част от изследванията е да се получат нови контрапримери на хипотезата на Хамада, но са конструирани само известните конфигурации.

В глава 3 са представени конструкции на 2-дизайни с автоморфизми от малък ред. Целта е намиране на точния брой на дизайните с дадени параметри с точност до изоморфизъм. В раздел 3.2 се конструират щайнерови системи $STS(19)$ и $STS(21)$, съдържащи три щайнерови подсистеми $STS(7)$. В първия случай подсистемите имат обща точка, докато във втория – те са дефинирани върху непресичащи се множества. Това условие определя голяма част от структурата на дизайн и задачата за изброяване става достъпна. По нататък са конструирани всички такива системи с нетривиални автоморфизми, което позволява и пресмятането (неконструктивно) на броя на всички системи, имащи тривиална група от автоморфизми.

По подобен начин в раздел 3.3 се конструират т.нар. разделими квазикратни на проективната равнина от ред 4, т.е. дизайн с параметри $2-(21, 5, 2)$, чиито блокове могат да бъдат разбити на две множества, всяко от които е $2-(21, 5, 1)$ -дизайн. Този брой се оказва почти $2 \cdot 10^9$.

Глава 4 е посветена на построяването на всички спредове от прави в $PG(5, 2)$. Добре известно е, че множеството от точките на проективната геометрия $PG(n, q)$ може да бъде разбито на подпространства с размерност r тогава и само тогава, когато $r+1$ дели $n+1$. Тази задача е по същество задача от крайните геометрии и има отношение към построяването на недезаргови проективни равнини. В раздел 4.2 е описан алгоритъмът за генериране на спредове. Той започва с фиксиране на две прави (без ограничение на общността) и с нареждане в лексикографски ред на всички останали прави, нямащи общи точки с фиксираните. По-нататък към конструираното множество от прави (частичен спред) се добавят допустими прави, нямащи общи точки с вече избраните. Ефективността на предлагания алгоритъм се дължи на тест за минималност на частичните решения. Той се състои в проверка за това дали някой от автоморфизмите (колинеациите) на проективното пространство трансформира частично решение в някое друго, което е лексикографски по-малко. За пространства $PG(n, q)$ с $n > 3$ в първата стъпка могат да бъдат фиксирани и повече от две прави. В главата се разглеждат специални спредове наречени книжни. Под (n, q, r, s) -книга разбираме множество от r -мерни подпространства в $PG(n, q)$, имащи общо s мерно подпространство S и разбиващи точките на $PG(n, q) \setminus S$ (т.е. генериращи спред върху допълнителното подпространство на S). Сега един t -спред е книжен (n, q, r, s) -спред, ако той е спред за всяко от подпространствата на книгата, както и за общото подпространство S . В раздел 4.3 са конструирани всички спредове на $PG(5, 2)$, чийто брой се оказва 131044. В раздел 4.4 се конструират всички $(2, 5, 3, 1)$ -книжни спредове (броят им е 9), а в раздел 4.5 – всички книжни $(7, 2, 5, 3)$ -спредове, отговарящи на някои допълнителни условия.

Докато t -спред е разбиването на точките на $PG(n, q)$ на t -мерни подпространства, то t -паралелизъм е разбиване на множеството на всички t -мерни подпространства на t -спредове. С други думи това е резолюция на дизайна, имащ за блокове t -мерните

подпространства на $PG(n, q)$. Това понятие обобщава разбиването на всички прави от $AG(n, q)$ на класове успоредни прави. Глава 5 е посветена на t -паралелизми на $PG(n, q)$ и по-общо на разрешими дизайни.

В раздел 5.2 е представен алгоритъм за класификация на резолюции, имащи автоморфизъм от прост ред p . Алгоритъмът включва, подобно на този от глава 4, лексикографска наредба на блоковете и тест за минималност на частичните решения по отношение на тази наредба. В следващите раздели 5.3 и 5.4 са описани и алгоритми за намиране на пълната група от автоморфизми на резолюция. В раздел 5.5 се разглеждат резолюции на малки $STS(v)$ със $v \leq 39$. В раздел 5.6 се изследват $STS(21)$ с автоморфизъм от ред 3, който фиксира 3 точки и 7 блока. Това е и първият ред, за който няма пълна класификация на щайнеровите системи от тройки. Големият въпрос тук е за съществуване на двойно-разрешима щайнерова система от тройки от ред 21. За съжаление дисертацията не дава отговор на него. Тук са получени 2963 дизайна, от които 28 са разрешими, но никой от които не е двойно разрешим.

Особен интерес представлява раздел 5.7. Тук се конструирани 2-паралелизми на $PG(5, 2)$, т.е. разбиване на множеството от равнините на $PG(5, 2)$ на 2-спредове (един 2-спред се състои от 9 равнини, така че паралелизъмът включва 155 спреда). Това е и първият пример въобще на транзитивен паралелизъм с $t > 1$. За мен това е един от най-интересните резултати в дисертационния труд.

Последната глава 6 е посветена на конструирането на различни кодове като общото във всички конструкции е наличието на циклична структура на кода. В раздел 6.3 се разглеждат двоични циклично-пермутационни константно-тегловни кодове. По-нататък в раздел 6.4 се изследват антиконфликтни кодове, а в раздел 6.5 – силно антиконфликтни кодове. Едно множество C от двоични думи с дължина v и тегло k наричаме (v, k, λ) циклично-пермутационен константно-тегловен код (v, k, λ) -CPCW, ако за всеки две думи $x, y \in C$: $d(x, y^\sigma) \geq 2(k - \lambda)$. Тук σ е произволен цикличен шифт като за $x = y$ имаме $\sigma \neq \text{id}$. Ако $M(v, k, 1)$ е максималната мощност на $(v, k, 1)$ -циклично пермутационен константно тегловен код, то от границата на Джонсън имаме $M(v, k, 1) \leq \lfloor (v - 1)/k(k - 1) \rfloor$ като в случай на равенство съответният код се нарича оптимален. В раздл 6.3 се конструирани $(73, 4, 1)$ -, $(76, 4, 1)$ - и $(127, 7, 1)$ -CPCW. Представени са и таблици на оптимални $(v, k, 1)$ -CPCW кодове за $k = 4, 5, 6, 7$. В последните два раздела са построени нови антиконфликтни и силно антиконфликтни кодове като резултатите са обобщени в няколко таблици.

Приноси на дисертационния труд

По мое мнение по-важните приноси в дисертационния труд се свеждат до следното:

- (1) Построени са всички симетрични 2- $(69, 17, 4)$ дизайни, имащи автоморфизъм от ред 13.
- (2) Конструирани са 384 адамарови матрици от ред 44, имащи автоморфизъм от ред 7, както и всички свързани с тях, адамарови 2- и 3-дизайни.

- (3) Конструирани са всички адамарови матрици от ред 64, инавариантни относно диедралната група от ред 10, както и свързаните с тях дизайни.
- (4) Направена е класификация на уилсънови STS(19) и STS(21).
- (5) Класифицирани са двукратните дизайни на проективната равнина от ред 4.
- (6) Конструирани са всички спредове от прави на PG(5, 2).
- (7) Направена е пълна класификация на книжните (5,2,3,1)-спредове и частична класификация на книжните (7,2,5,3)-спредове.
- (8) Намерени са всички резолюции на циклични щайнерови системи от тройки STS(v) за $v \leq 39$.
- (9) Построен е транзитивен 2-паралелизъм на PG(2, 5), който е първият пример на транзитивен t -паралелизъм с $t > 1$.
- (10) Построени са оптимални $(v, k, 1)$ -CPCW за специални стойности на v и k . Създадени са таблици на оптимални $(v, k, 1)$ -CPCW кодове за $k = 4, 5, 6, 7$.
- (11) Построени са антиконфликтни и силно антиконфликтни кодове със специални параметри.

Забележки и коментари по дисертационния труд

Във връзка с дисертационния труд имам следните забележки:

- (1) Изследвани ли са 2-(52, 13, 4)-дизайни без връзка със симетричните 2-(69, 17, 4). Тук биха могли да се появят (според мен това е почти сигурно) квазиостатъчни дизайни (такива които не се продължават до съответния симетричен).
- (2) Вярно ли е, че 13 е най-малкият възможен прост ред на автоморфизъм на симетричен 2-(69, 17, 4)-дизайн?
- (3) Защо са изследвани точно адамарови матрици от ред 44? Защо не матрици от ред 48? Този ред би могъл да се използва за конструиране на самодуален двойночетен [96, 48, 20]. Въобще правени ли са опити да се атакуват матрици на Адамар от други редове?
- (4) По мое мнение най-стойностни са резултатите за симетрични дизайни, за матрици на Адамар (това са в някакъв смисъл пак симетрични дизайни) и за t -паралелизми с $t > 1$. Дисертантът заслужава адмирации за куража да инвестира време и усилия в търсене на двойно разрешима STS(21).

- (5) В раздел 3.3 разглеждани ли са кратни на проективната равнина с повтарящи се блокове. Ако да, то какъв е минималният брой различни блокове, които може да има такъв дизайн.
- (6) Съществуват ли неразделими $2-(21,5,2)$? (Най-вероятно – да.) Съществува ли оценка за техния брой и могат ли те да бъдат изследвани с методите от раздел 3.3?
- (7) На страница 94 не е добре изяснен въпросът за това защо две кръстосани прави могат да се изберат по единствен начин без ограничение на общността. Понататък възниква същия проблем, когато фиксираме повече от две прави. Възможността за този избор слдва от т.нар. втора основна теорема на проективната геометрия: за всеки две наредени $(n+2)$ -орки от точки в $PG(n, q)$, намиращи се в общо положение (всеки $n+1$ образуват базис) $(P_1, P_2, \dots, P_{n+2})$ и $(Q, Q_2, \dots, Q_{n+2})$, съществува единствена колинеация κ , за която $Q_i = P_i^\kappa$, за всяко $i = 1, \dots, n+2$.
- (8) Неточно е използвано понятието киркманиова система от тройки. Още в дефиниция 1.1.5 на стр. 22 се казва, че резолюциите на $STS(v)$ се наричат киркманови системи от тройки от ред v . Тук резолюция е разбиването на множеството от блоковете на паралелни класове. Всъщност киркманова система от тройки е щайнерова система, за която съществува резолюция, т.е. киркмановите системи са специални щайнерови системи, откъдето следва $v = 6n + 3$ и т.н.
- (9) На много места се налага езикова редакция. Така в дефиниция 6.1.1.е добре да се каже “редица” вместо “последователност”, на стр. 147 “мощност” вместо “размер” и т.н.
- (10) Критична бележка. Макар лайтмотивът на работата да е комбинаторни структури със симетрии, включването на някои от темите ми се струва недостатъчно добре мотивирано. Например темата за кратните на проективната равнина от ред 4 (макар че е иницирана от Д. Юнгникел) очевидно не буди същия интерес като симетричните дизайни (които по думите на Янко са единствените дизайни, които са “интересни”), матриците на Адамар или t -паралелизмите.

Публикации по дисертационния труд

Резултатите от дисертационния труд са публикувани в 18 статии. Дванадесет от статиите са с импакт-фактор:

- IEEE Communication Letters – 2.723
- Designs Codes and Cryptography – 1.114
- Journal of Combinatorial Designs – 0.709

- Discrete Mathematics – 0.557, 0.548, 0.502, 0.347, 0.303
- Problems of Information Transmission – 0.484, 0.353
- Journal of Statistical Planning and Inference – 0.366
- Graphs and Combinatorics – 0.242

Три от статиите са без импакт-фактор, но със SJR: Note di Matematika, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Journal of Algebra Combinatorics, Discrete Structures and Applications, и две са в списания без импакт-фактор или SJR: Mathematika Balkanica, Serdica Journal of Computing.

Авторство на получените резултати

В пет от статиите Светлана Топалова е единствен автор, 10 са с един, една е с двама и 2 са с трима съавтори. Тъй като познавам научните интереси на докторанта и следя работата ѝ в последните почти тридесет години, за мен няма съмнение, че приносът ѝ е (поне) равностоен с този на останалите автори. При това в дисертационния труд са изложени само онези части съвместните работи, които са нейно лично дело.

Цитирания на публикациите от дисертационния труд

Дисертантът е приложил списък на седемдесет и едно цитирания на статиите, в които са публикувани резултатите от дисертационния труд. В материалите към дисертационния труд е направено подробно описание на местата, където се появяват тези цитирания. Лично за мен по-важно е, че работите на Светлана Топалова са цитирани от Матон и Роса в Handbook of Combinatorial Designs, от Туви Етцион, Норман Джонсън, Дженифер Себери, Патрик Йостергард, Владимир Тончев.

Автореферат и авторска справка

Авторефератът и авторската справка са направени съгласно изискванията и отразяват правилно резултатите и приносите в дисертационния труд.

Заклучение

Дисертацията е посветена на един кръг от интересни комбинаторни задачи за конструиране и преброяване. Някои от разглежданите задачи имат и определено практическо значение, особено тези, свързани с построяването и класифицирането на специални кодове. Разработени са нови алгоритми за конструиране и изследване на комбинаторни дизайни. Направени са конструкции на много нови комбинаторни конфигурации, с което е постигнат съществен напредък в актуална област на комбинаториката.

Считам, че представеният дисертационен труд “Класификация на дизайни и сродни на тях комбинаторни структури” с автор Светлана Тодорова Топалова съдържа резултати, които представляват оригинален принос в конструктивната теория на комбинаторните конфигурации. Дисертантът показва задълбочени теоретични знания в областта на теория на дизайните и теория на кодирането. С това тя отговаря на изискванията на “Закона за развитие на академичния състав” за даване на научната степен “Доктор на науките”. Гореизложеното ми дава основание да дам **положителна оценка** на представения дисертационен труд и да препоръчам на Уважаемото Жюри да присъди на Светлана Тодорова Топалова научната степен “Доктор на науките” в област 4 “Природни науки, математика и информатика”, научно направление 4.6 “Информатика”.

София, 31.03.2019 г.

Рецензент:

(проф. д.м.н. Иван Ланджев)