Институт по Математика и Информатика
Българска Академия на Науките

Симетрия и метрична геометрия в Банахови пространства

Светозар Златков Станков

Автореферат на дисертация
за присъждане на образователна и научна степен **доктор**
в професионално направление 4.5 Математика
(Математически анализ)

Научен ръководител:
Проф. Денка Куцарова

София, 2025

През последните 30 години теорията на Банаховите пространства бе разширена в много различни направления. Резултати и техники от тази област бяха използвани в нелинеен анализ, метрична геометрия, компютърни науки, операторна теория, математическа логика, и други. Същевременно, структурата на самите Банахови пространства също бе изучавана задълбочено, особено на сепарабелните пространства, и в частност, на тези с базис на Шаудер. За скорошните развития в теорията на Банаховите пространства може да се видят двата тома на Handbook on the geometry of Banach spaces, редактирани от У. Джонсън и Й. Линденщраус [23, 24].

Едни от главните въпроси в структурната теория на Банаховите пространства са свързани с това дали дадено безкрайномерно пространство съдържа в себе си безкрайномерно подпространство с "добри" свойства. Най-естественият първи въпрос бе дали което и да е X съдържа в себе си изоморфно копие на c_0 или ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Всички добре познати класически примерни на Банахови пространства съдържат в себе си такива изоморфни копия. Съществуват задълбочени резултати за влагане на копия на ℓ_2^n или ℓ_p^n за произволни n, дължащи се на Дворецки и Кривин съответно. Но за разлика от това, случаят за безкрайномерно подпространство се оказа различен. През 1974 Борис Цирелсон [47], използвайки идеи от логиката, конструира рефлексивно пространство с безусловен базис на Шаудер, което няма как да съдържа в себе си изоморфно на c_0 или ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ подпространство.

Цирелсон дефинира единичното кълбо на своето пространство по следния начин:

Нека $K^0 = \{\pm e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. За дадени K^m, $m \geq 0$,

$$K^{m+1} = K^m \cup \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} f_i \ : \ \begin{array}{l} f_i \in K^m, i = 1, 2, \ldots, d, \quad d \in \mathbb{N}, \text{ and} \\ d \leq \min \mathrm{supp} f_1 \leq \max \mathrm{supp} f_1 < \min \mathrm{supp} f_2 \leq \\ \leq \max \mathrm{supp} f_2 < \cdots < \min \mathrm{supp} f_d \end{array} \right\}$$

Тогава $K = \bigcup_{m=0}^{\infty} K^m$, и единичното кълбо B е затворената изпъкнала обвивка на K.

Всъщност, пространството, което в момента бива наричан пространство на Цирелсон T, е конструкцията, създадена от Фигел и Джонсън [13], докато оригиналното пространство, дефинирано от Цирелсон, е неговото дуално T^*. Дефиницията на нормата в T се дава или чрез граница на поредица от норми, или, еквивалентно, чрез имплицитното решение на уравнение.

Нека разгледаме линейното пространство от редици на реални числа с краен носител c_{00}. За което и да е $x = \sum_n a_n t_n \in c_{00}$, и за каквото и да е непразно крайно множество E от естествени числа, дефинираме

$$Ex = \sum_{n \in E} a_n t_n \ .$$

Тук (t_n) е каноничния базис на c_{00} и (a_n) е произволна поредица от реални числа.

Дефинираме индуктивно поредица от норми $(\| \cdot \|_j)_{j=0}^{\infty}$ върху c_{00} по следния начин:

За $x = \sum_n a_n t_n \in c_{00}$, нека $\|x\|_0 = \max_n \ |a_n|$, и нека за $m \geq 0$,
$\|x\|_{m+1} = \max \left\{ \|x\|_m, \ \frac{1}{2} \max \left[\sum_{i=1}^{d} \|E_i x\|_m \right], \ \ d \in \mathbb{N} \right\}$,

където вътрешния максимум се взима върху всички избори на d и всички избори на крайни подмножества $(E_i)_{i=1}^{d}$ на $\mathbb{N}$ за избраното d, такива че

$$d \leq \min E_1 \leq \max E_1 < \min E_2 \leq \max E_2 < \cdots < \min E_d \ .$$

Тогава нормата $\|x\|$ се дефинира като $\lim_{m \to \infty} \|x\|_m$, и това, което в момента наричаме пространство на Цирелсон T е попълнението на $(c_{00}, \| \cdot \|)$.

Фигел и Джонсън доказват че нормата на T изпълнява следното имплицитно уравнение:

$$\forall x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n \in T,$$

$$\|x\| = \max \left\{ \max_n |a_n|, \ \frac{1}{2} \sup \sum_{i=1}^{d} \|E_i x\| \right\},$$

където вътрешния супремум е взет по всички избори на d и всички избори на крайни подмножества $(E_i)_{i=1}^{d}$ на $\mathbb{N}$ за избраното d, такива че

$$d \leq \min E_1 \leq \max E_1 < \min E_2 \leq \max E_2 < \cdots < \min E_d \ .$$

Пространството на Цирелсон имаше огромно влияние на теорията на Банаховите пространства. Много конструкции в същия дух бяха създадени в името на решаването на други важни въпроси. Сред тях специално ще споменем конструкция от Цафрири [48]. Откакто бяха въведени, понятията тип и котип (виж например [33]) играха голяма роля в теорията на нормираните пространства, и в нейните апликации.

Цафрири разрешава въпрос, поставен от Пизие, чрез дефиниране на пространство, което удовлетворява неравенството за тип p при ограничение елементите да имат еднаква норма, но няма тип p, за $1 < p < 2$. Книгата на Касаза и Шура [8] събра повечето от резултатите, свързани с пространството на Цирелсон и неговите вариации.

Следващият естествен голям въпрос бе дали всяко пространство съдържа безусловна базисна редица, тоест, подпространство с безусловен базис. Частичен резултат за редици, които слабо клонят към нула, бе постигнат от Море и Розентал, виж например [32].

През 1990 Е. Одел показва в непубликувана статия, че T е дисторцируемо чрез конструиране във всяко подпространство редици с две различни асимптотични поведения; това бе първия пример на дисторцируемо пространство.

Дефиниция 1. *Нека $\lambda > 1$. Банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ е λ-дисторцируемо ако съществува еквивалентна норма $|\cdot|$ върху X, такава че за всяко безкрайномерно подпространсвто Y на X,*

$$\sup\left\{\frac{|y|}{|x|} : y, x \in Y, \|y\| = \|x\| = 1\right\} \geq \lambda$$

X е произволно дисторцируемо ако е λ-дисторцируемо за всяко $\lambda > 1$.

Джеймс доказа че c_0 и ℓ_1 не са дисторцируеми. Досега няма пример на пространство, което е дисторцируемо, но не е произволно дисторцируемо, въпреки че пространството на Цирелсон T е кандидат.

Използвайки подобна идея като тази на Одел, Т. Шлумпрехт [44] конструира през 1991 първото произволно дисторцируемо пространство S, което има безусловен базис. Пространството на Шлумпрехт предизвика наново интерес в пространствата от типа на Цирелсон, и доведе до впечатляващи развития в теорията на Банаховите пространства.

През 1993, Т. Гауърз и Б. Море [19], използвайки конструкцията на Шлумпрехт, разрешават небезизвестния въпрос за безусловна базисна редица чрез конструиране на пространство без такава. Тяхното пространство има по-силно свойство, а именно че то е наследствено неразложимо.

Дефиниция 2. *Банахово пространство е наследствено неразложимо (H.I.) ако никое подпространство може да бъде представено като топологична директна сума на две безкрайномерни затворени подпространства.*

През 1994 Одел и Шлумпрехт [39] разрешават въпроса за дисторцируемостта. В частност, чрез прехвърляне на множества от S, те показват че Хилбертовото пространство ℓ_2 е произволно дисторцируемо. Това демонстрира импакта на пространствата от типа на Цирелсон върху разбирането на класическите Банахови пространства.

Като друг пример за което ще прескочим закратко напред във времето. Бодие, Лансиен и Шлумпрехт [49] наскоро използваха оригиналното Цирелсоново пространство T^* за да разрешат въпрос от метричната геометрия.

Гауърз използва понятието на наследствена неразложимост за да разреши няколко дългогодишни въпроси. Той показа [15] че H.I. (наследствена неразложимост) е следствие на липсата на безусловност, в смисъла че всяко Банахово пространство, което не съдържа каквито и да е безусловни базови редици, притежава H.I. подпространство. Освен това той разрешава Банаховия въпрос за хиперравнини [17] чрез конструирането на пространство, което не е изоморфно на която и да е от хиперравнините си. Той също така [16] дихотомии за пространства с базис и ги използва за частична класификация на Банахови пространства. През 1998 Гауърз бе награден с Филдсов медал за изключителната си работа (виж [18])

Последваха още повече резултати в тази област, особено от Аргирос и неговите ученици. Аргирос и Делияни [4] отговориха на въпрос от Гауърз чрез конструирането на асимптотично ℓ_1 наследствено неразложимо пространство. За тази цел те дефинират първо нов клас от асимптотично ℓ_1 пространства с безусловен базис, а именно смесените Цирелсонови пространства.

Водейки се по свойствата на T, Милман и Томчак-Йегерман [35] дефинират асимптотично ℓ_p пространства спрямо базис да бъдат тези, за които за всяко n всички n на брой последователни нормализирани блок вектори с носители след примерно n-тата позиция на базиса са равномерно еквивалентни на базиса от единични вектори на ℓ_p^n. В началото надеждата бе че асимптотично ℓ_p пространствата може и да имат по-приятна локална структура, например по-приятни крайномерни подпространства. Това се оказа невярно, след като бе доказано в [54] че някои асимптотично ℓ_1 пространства съдържат равномерни копия на ℓ_∞^n. Универсалността на ℓ_∞ имплицира че тези пространства съдържат произволни крайномерни подпространства.

Един от главните проблеми в изоморфната теория на Банаховите пространства е класификацията на базовите редици от даден тип. Този въпрос е коректно формулиран използвайки понятието на еквивалентност на базови редици. Да отбележим че редица в Банахово пространство е базисна редица ако тя е (Шаудеров) базис на своята затворена линейна обвивка. Най-важната категория редици за която тази класификация е изучавана е тази на симетричните редици.

Дефиниция 3. *Базисна редица е симетрична ако тя е еквивалентна на всичките си пермутации.*

Този клас от редици съдържа в себе си например каноничния базис от единични вектори на ℓ_p и c_0 пространствата.

Близко свързано понятие на симетричните редици са субсиметричните редици.

Дефиниция 4. *Базисна редица е субсиметрична ако тя е безусловна и е еквивалентна на всичките си подредици.*

Въпросът дали симетрична базисна редица съществува във всяко Банахово пространство бе двигател на развитието на теорията в продължение на много десетилетия, Отрицателният отговор на този въпрос бе даден от пространството на Цирелсон.

Класът на субсиметричните базисни редици е по-общ. Практически погледнато, много често единственото свойство на симетричните базисни редици, което е нужно, е тяхната субсиметричност. Това даже в началото е създало впечатлението че тези две понятия може да са еквивалентни, преди Гарлинг [14] да покаже контрапример, така доказвайки обратното.

От своя страна, субсиметричните базиси не играят роля просто на своенравна генерализация на симетричните базиси, намирайки своята релевантност в генералната теория. И наистина, изучаването на Банахови пространства със субсиметрични базиси доведе до разрешаването на основни въпроси в областта. Като пример, пространството на Шлумпрехт S съдържа такъв базис. От минималността на пространството на Шлумпрехт и "ярдстик" конструкцията на Куцарова-Лин [28], която за всяко естествено число n използва равномерни копия на ℓ_∞^n с несвързани носители, следва че S не съдържа симетрични базисни редици.

Ако Банахово пространство има даден специфичен тип структура, то винаги е важно да се знае дали тази структура е уникална. И обратното, ако знаем че дадена структура е уникална в Банаховото пространство, това води до въпроса какво можем да кажем за структурата и за самото пространство.

Албиак, Ансорена и Уолъс [3] използваха пространства от типа на Гарлинг за да създадат първия пример на Банахово пространство с уникален субсиметричен базис, който не е симетричен. Само че, както бе показано в [2], това пространство съдържа континуум от нееквивалентни субсиметрични базисни редици.

Алтшулер [1] (виж също [32]) конструира пространство, в което всички симетрични базисни редици са еквивалентни на неговия симетричен базис. Бе отбелязано в [27] че внимателен прочит на статията на Алтшулер показва че неговото доказателство работи по подобен начин и за по-генералния случай на субсиметрични базисни редици. В случая на пространството на Алтшулер уникалността на субсиметричната структура имплицира това че тя всъщност е симетрична. Това наблюдение доведе до следния въпрос, зададен първо в [27] и повторен в [2] :

Въпрос 5. *Съществува ли Банахово пространство, в което всички субсиметрични базисни редици са еквивалентни на един базис, но този базис не е симетричен?*

Наскоро първият промер на Банахово пространство със субсиметричен базис с уникална, с точност до еквивалентност, субсиметрична базисна редица, която не е симетрична, бе даден в [7]. Това отговори на горезададения въпрос. Въпросното пространство бе $Su(T^*)$ [8], субсиметричната версия на T^*, дуалното на пространството на Цирелсон.

В дисертацията даваме повече примери на пространства с уникална, с точност до еквивалентност, субсиметрична базисна редица. В духа на пространството на Цирелсон T, Цафрири [48] конструира пространство (със симетричен базис), което удовлетворява неравенството за тип p при ограничение елементите да имат еднаква норма, но няма тип p, за $1 < p < 2$.

За удобство, ще дефинираме следното означение:

$$\text{Average}_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\| = 2^{-n}\sum_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\|$$

Важните понятия на тип и котип бяха дефинирани от Хофман-Йоргенсен в [50].

Дефиниция 6. *Банахово пространство X е от тип p за някое $1 < p \leq 2$, респективно, от котип q за някое $q \geq 2$, ако съществува константа $M < \infty$ такава че за всяко крайно множество от вектори $(x_j)_{j=1}^n$ в X имаме, че*

$$\text{Average}_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\| \leq M\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

и респективо

$$\text{Average}_{\theta_j=\pm 1}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\| \geq M^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Константа M, която удовлетворява първото, респективно второто неравенство, се нарича тип p, респективно котип q, константа на X.

Пространството на Тирилман $Ti(p,\gamma)$, за $1 < p < \infty$ и $0 < \gamma < 1$, бе въведено и изучавано от Касаза и Шура [8]. То е версия на оригиналното пространство, дефинирано от Цафрири, и бива наречено на румънското му фамилно име Тирилман.

В дисертацията доказваме че за $1 < p < \infty$ и достатъчно малко $0 < \gamma < 1$, дуалното пространство $Ti^*(p,\gamma)$, чийто каноничен базис е субсиметричен но не симетричен, има уникална, с точност до еквивалентност, субсиметрична базисна редица. Докато нормализираните блок базиси (x_j) на каноничния базис на $Su(T^*)$, чиято ℓ_∞ норма $\|x_j\|_\infty$ клони към 0 за $j \to \infty$, са асимптотично c_0, подобните блок базиси на $Ti^*(p,\gamma)$ са асимптотично ℓ_q базисни редици, където

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Теорема 7. *Нека $1 < p < \infty$, и нека $\gamma > 0$ е достатъчно малко. Всяка субсиметрична базисна редица в дуалното пространство $Ti^*(p,\gamma)$ е еквивалентна на субсиметричния каноничен базис $(e_j^*)_{j=1}^{\infty}$, който не е симетричен.*

Като част от доказателството на този главен резултат достигаме и до следните две самостоятелно интересни твърдения:

Лема 8. *Нека (e_i) е 1-безусловен базис на рефлексивно Банахово пространство X, който е K-доминиран от неговите нормализирани блок базиси, където $K \geq 1$. Тогава (e_i^*) K-доминира всички нормализирани блок базиси на (e_i^*) в дуалното пространство X^*.*

Лема 9. *$Ti^*(p,\gamma)$ не съдържа изоморфно копие на ℓ_q (където $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).*

Като следствия стигаме и до следните два резултата:

Следствие 10. *Нека $1 < p < \infty$ и $\gamma > 0$ е достатъчно малко. Всеки субсиметричен базис на фактор пространство на $Ti(p,\gamma)$ е еквивалентнен на каниничния базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$.*

Следствие 11. *За $1 < p < \infty$ и достатъчно малко $\gamma > 0$, базисът (e_i) на $Ti(p, \gamma)$ има безбройно много нееквивалентни субсиметрични блок базиси.*

Важно наследствено свойство на Банахови пространства, първо дефинирано от Розентал, е понятието за минималност.

Дефиниция 12. *Безкрайномерно Банахово пространство X се нарича минимално ако всяко безкрайномерно подпространство $Y \subset X$ съдържа подпространство Z в себе си, такова че Z е изоморфно на X.*

Нека си спомним че

Дефиниция 13. *Две нормирани пространства X и Z се наричат изоморфни ако съществува ограничен линеен оператор $T : X \to Z$, който е биекция, и неговият обратен оператор $T^{-1} : Z \to X$ също е ограничен и линеен.*

Има доста малко примери на минимални пространства. Очевидно, c_0 и ℓ_p, за $1 \leq p < \infty$, са минимални. В [51] бе доказано че T^* е нетривиален пример за минимално пространство. По-късно, Шлумпрехт [52] доказа че неговото пространство S е минимално. S също е рефлексивно но не суперрефлексивно. От друга страна, базирайки се на пространството на Шлумпрехт S, [53] дава примери на суперрефлексивни минимални пространства. Те също показват че и S^* е минимално. Базиса на T^* е асимптотично ℓ_∞, ерго, много несиметричен. Базисите на S и S^* са субсиметрични, но не симетрични.

Важен фолклорен въпрос е дали съществува нетривиален (не подпространство на c_0 или ℓ_p) пример за минимално пространство със симетричен базис.

Симетризациите на T^* и S не са минимални. Търсенето на подобен пример е една от мотивациите за разглеждането на симетризацията на S^*. Теоремата в дисертацията оставя въпроса за симетрично минимално пространство все още отворен.

Естествената симетризация $S(T)$ на пространството на Цирелсон T съдържа подпространство, изоморфно на ℓ_1, докато симетризацията на $S(T^*)$ на оригиналното пространство, дефинирано от Цирелсон, е рефлексивна, така че не притежава същото свойство [8]. В непубликувана бележка Шлумпрехт показа че симетричната версия на неговото пространство S също съдържа подпространство, изоморфно на ℓ_1 (подобен резултат може да бъде намерен в [34]).

В дисертацията използваме "ярдстик" конструкцията в пространството на Шлумпрехт S за да докажем следната теорема:

Теорема 14. *За разлика от случая на $S(T^*)$, симетризацията $S(S^*)$ на дуалното на пространство на Шлумпрехт съдържа подпространство, изоморфно на пространството ℓ_1.*

Използвайки същият тип "ярдстик" конструкция, в дисертацията разглеждаме и следната теорема:

Теорема 15. *Нека p и γ са такива че $1 < p < \infty$ и $0 < \gamma < 3^{-\frac{1}{q}}$, където $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогава c_0 е крайно представимо в $Ti\,(p, \gamma)$ по непресичащ се начин по отношение на каноничния базис.*

Това е разширение на резултат от [26] за повече параметри.

Един от най-естествените начини да се разгледа геометрията на метрично пространство е да се разбере кои метрични пространства, в частност кои Банахови пространства, се влагат билипшицово в него.

Дефиниция 16. *Нека (X, d_X) и (Y, d_Y) са две метрични пространства. Изображение $f\colon X \to Y$ се нарича билипшицово влагане ако съществуват $s > 0$ и $D \geq 1$ така че за всички $x, y \in X$,*

$$s \cdot d(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq D \cdot s \cdot d(x, y). \tag{1}$$

Както обикновено,

$$c_Y(X) := \inf\{D \geq 1 \mid \text{уравнение (1) е изпълнено за някое влагане } f\}$$

е Y-дисторцията на X. Ако не съществува билипшицово влагане от X в Y, тогава казваме, че $c_Y(X) = \infty$.

Редица $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ от метрични пространства се казва че се екви-билипшицово влага в Y ако $\sup_{k\in\mathbb{N}} c_Y(X_k) < \infty$.

Ако две нормирани пространства са униформно хомеоморфни, тогава всички крайномерни подпространства на едно от пространствата могат униформно да се вложат в другото чрез линейно изображение.

Теоремата на Рибе [41], а именно че ако две нормирани пространства са униформно хомеоморфни, тогава всички крайномерни подпространства на едно от пространствата могат униформно да се вложат в другото чрез линейно изображение, предполага че е разумно да се смята, че локалните геометрични свойства на Банаховите пространства могат да бъдат характеризирани в чисто метрични термини.

Джеймс [21] въведе важното свойство на суперрефлексивност: Банахово пространство X е суперрефлексивно ако всяко Банахово пространство Y, което е крайно представимо в X, е рефлексивно. Енфло [12] показва че суперрефлексивността на X е еквивалентна на това X да има еквивалентна равномерно конвексна норма.

Първата успешна стъпка в програмата на Рибе бе постигната от Ж. Бурген [6], когато той показа че редицата $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ от двоични дървета от дълбочина k е равномерно характеризираща редица за суперрефлексивност, т.е. че пространства, които не са суперрефлексивни са тези, в които двоични дървета B_n то дълбочина n се влагат с равномерно ограничена дисторция.

Насочваме към [5] и [36] за подробно описание на програмата на Рибе и нейните успехи.

В последствие, Джонсън и Шехман [25] намират две нови равномерно характеризиращи редици за суперрефлексивност, а именно редицата $(D_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ от (разклоняващи се на две) диамантени графи, и редицата $(L_k^2)_{k\in\mathbb{N}}$ от (разклоняващи се на две) Лааксо графи.

Най-добрият резултат в литературата за дисторцията на влаганията на D_n в пространства, които не са суперрефексивни, даден ни от Пизие [40], е $2+\varepsilon$ за всяко $\varepsilon > 0$, докато най-добрия резултат за дисторцията на влаганията на D_n в $L_1[0,1]$, даден ни от Лий и Рагавендра [31], е $4/3$.

В дисертацията конструираме влагания на $\mathcal{L}_n$ в произволни Банахови пространства, които не са суперрефлексивним с дисторция $2+\varepsilon$.

Теорема 17. *Нека X не е суперрефлексивно. Тогава, за всяко $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$, съществува изображение $f_n\colon \mathcal{L}_n \to X$, такова че за всеки $a, b \in \mathcal{L}_n$,*

$$\frac{1}{2}d(a,b) - \varepsilon \leq \|f_n(a) - f_n(b)\| \leq d(a,b). \tag{2}$$

Влаганията на $\mathcal{L}_n$, които дефинираме, разчитат на следната характеризация на това пространство да не е суперрефлексивно. То е отрицание на характеризацията на суперрефлексивност, известна като J-изпъкналост.

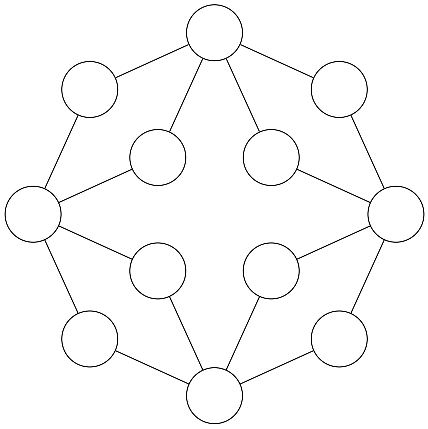
Теорема 18. *[22, 43] X не е суперрефлексивно тогава и само тогава, ако за всеки $m \geq 1$ и $\varepsilon > 0$, съществува $e_1, \ldots, e_m$ в единичната топка на X, такива че за всяко $1 \leq j \leq m$ имаме че*

$$\|e_1 + \cdots + e_j - e_{j+1} - \cdots - e_m\| \geq m - \varepsilon. \tag{3}$$

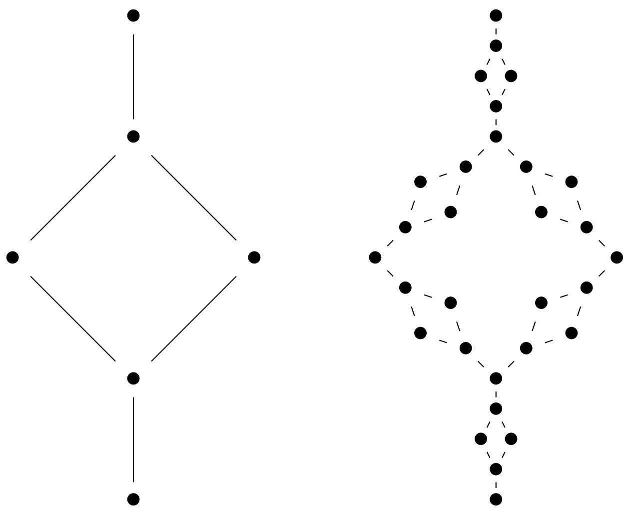
След това доказваме по-силен резултат за $X = L_1[0,1]$.

Теорема 19. *За всяко $n \geq 1$, съществува изображение $f_n\colon \mathcal{L}_n \to L_1[0,1]$, такова че за всеки $a, b \in \mathcal{L}_n$,*

$$\frac{3}{4}d(a,b) \leq \|f_n(a) - f_n(b)\|_1 \leq d(a,b). \tag{4}$$



Фигура 1: Диамантен граф D_2.



Фигура 2: Лааксо графи $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

Аналогът на теорема 19 за D_n е доказан в [31, Теорема 5.1] със същата дисторция от $4/3$. Освен това, отбелязано е без доказателство че $4/3$ е най-добрата възможна константа за дисторцията на влагания на D_n за $n \to \infty$ [31, стр. 359]. Всъщност, ние не знаем влагания на D_2 в $L_1[0,1]$ с дисторция, по-малка от $4/3$.

Следващият ни резултат показва че $\mathcal{L}_2$ не се влага в $L_1[0,1]$ с дисторция, по-малка от $9/8$.

Теорема 20. *Нека* $f\colon \mathcal{L}_2 \to L_1[0,1]$ *изпълнява*

$$d(a,b) \leq \|f(a) - f(b)\|_1 \leq cd(a,b).$$

Тогава $c \geq 9/8$.

Доказателството използва следната характеризация на изометрично влагане в $L_1[0,1]$.

Теорема 21. *[9, Теорема 6.2.2] Нека* (M,ρ) *е крайно метрично пространство. Тогава* (M,ρ) *е изометрично на подмножествно на* $\ell_2^2 := (\ell_2, \|\cdot\|_2^2)$ *тогава и само тогава, ако за всички* $k_i \in \mathbb{Z}$ $(1 \leq i \leq n)$*, такива че* $\sum_{i=1}^n k_i = 0$*, имаме*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} k_i k_j \rho(x_i, x_j) \leq 0,$$

където $x_1, \ldots, x_n$ *са отделни елементи на* M*.*

По подобен начин можем да оценим дисторцията на метрични влагания на диамантения граф D_2 в $L_1[0,1]$.

Теорема 22. *Нека* $f\colon D_2 \to L_1[0,1]$ *изпълнява*

$$d(a,b) \leq \|f(a) - f(b)\|_1 \leq cd(a,b).$$

Тогава $c \geq 5/4$.

Ще отбележим, че влаганията в $L_1[0,1]$ са много важни в компютърните науки.

Авторска справка

1. Доказваме теорема 7: Нека $1 < p < \infty$ и $\gamma > 0$ е достатъчно малко. Всяка субсиметрична базисна редица в дуалното пространство $Ti^*(p,\gamma)$ е еквивалентна на субсиметричния каноничен базис $(e_j^*)_{j=1}^{\infty}$, който не е симетричен. Казано по друг начин, пространствата, чийто каноничен базис е субсиметричен, имат единствена, с точност до еквивалентност, субсиметрична базисна редица, която не е симетрична.

В хода на доказването на този главен резултат, ние също така достигаме и до следните твърдения, които предизвикват интерес сами по себе си:

Лема 8: Нека (e_i) е 1-безусловен базис на рефлексивно Банахово пространство X, който е K-доминиран от неговите нормализирани блок базиси, където $K \geq 1$. Тогава (e_i^*) K-доминира всички нормализирани блок базиси на (e_i^*) в дуалното пространство X^*.

Лема 9: $Ti^*(p,\gamma)$ не съдържа изоморфно копие на ℓ_q (където $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

От основната теорема стигаме и до следните две следствия:

Следствие 10: Нека $1 < p < \infty$ и $\gamma > 0$ е достатъчно малко. Всеки субсиметричен базис на фактор пространство на $Ti(p,\gamma)$ е еквивалентнен на каниничния базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$.

Следствие 11: За $1 < p < \infty$ и достатъчно малко $\gamma > 0$, базисът (e_i) на $Ti(p,\gamma)$ има безбройно много нееквивалентни субсиметрични блок базиси.

2. Използваме "ярдстик" конструкции в пространства на Тирилман. По-точно, доказваме теорема 15: Нека p и γ са такива че $1 < p < \infty$ и $0 < \gamma < 3^{-\frac{1}{q}}$, където $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогава c_0 е крайно представимо в $Ti\,(p,\gamma)$ по непресичащ се начин по отношение на каноничния базис.

Това дава алтернативно доказателство че каноничния базис на Тирилманово пространство не е симетричен.

3. Доказваме теорема 14: Симетризацията на дуалното пространство на пространството на Шлумпрехт, $S(S^*)$, съдържа подпространство, изоморфно на ℓ_1.

4. Изучаваме билипшицови влагания на Лааксо графи в Банахови пространства. Правим оценка на дисторциите на такива влагания. Поточно, доказваме теорема 17: Нека X не е суперрефлексивно. Тогава, за всяко $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1$, съществува изображение $f_n\colon \mathcal{L}_n \to X$, такова че за всеки $a, b \in \mathcal{L}_n$,

$$\frac{1}{2}d(a,b) - \varepsilon \leq \|f_n(a) - f_n(b)\| \leq d(a,b).$$

Доказваме и по-силен резултат в частния случай, където Банаховото пространство е $L[0,1]$, а именно теорема 19: За всяко $n \geq 1$, съществува изображение $f_n\colon \mathcal{L}_n \to L_1[0,1]$, такова че за всеки $a, b \in \mathcal{L}_n$,

$$\frac{3}{4}d(a,b) \leq \|f_n(a) - f_n(b)\|_1 \leq d(a,b)$$

Билипшицови влагания в $L[0,1]$ са важни в компютърните науки.

5. Използваме компютърна програма да намерим оценка отдолу за дисторцията на влаганията на Лааксо и диамантени графи в $L[0,1]$. По този начин ние достигаме:

Теорема 20: Нека $f\colon \mathcal{L}_2 \to L_1[0,1]$ изпълнява

$$d(a,b) \leq \|f(a) - f(b)\|_1 \leq cd(a,b).$$

Тогава $c \geq 9/8$.

Теорема 22: Нека $f\colon D_2 \to L_1[0,1]$ изпълнява

$$d(a,b) \leq \|f(a) - f(b)\|_1 \leq cd(a,b).$$

Тогава $c \geq 5/4$.

Поради факта че доказателствата на теореми 20 и 22 използват само негативен тип неравенства, от [9, Теорема 6.2.2] можем да стигнем до извода че те остават валидни и ако $L_1[0,1]$ е заместено от $(\ell_2, \|\cdot\|_2^2)$. Това е по-силен резултат, понеже $L_1[0,1]$ е изометрично на подмножество на $(\ell_2, \|\cdot\|_2^2)$.

Публикации, свързани с дисертацията

1. Stephen J. Dilworth, Denka Kutzarova, Bünyamin Sarı, Svetozar Stankov, Duals of Tirilman spaces have unique subsymmetric basic sequences, Bulletin of the London Mathematical Society Volume 56, 150-158, https://doi.org/10.1112/blms.12920

2. S. J. Dilworth, Denka Kutzarova, Svetozar Stankov, Metric embeddings of Laakso graphs into Banach spaces, Banach Journal of Mathematical Analysis 16 (2022), no. 4, Paper No. 60, 14 pp., http://doi.org/10.1007/s43037-022-00212-7

3. Svetozar Stankov, On the symmetrized dual of Schlumprecht's space, C. R. Acad. Bulg. Sci., 78, No 1, 2025, https://doi.org/10.7546/CRABS.2025.01.02

Апробация на дисертацията

Резултатите от дисертацията са представени на следните доклади:

1. Stephen J. Dilworth, Denka Kutzarova, Svetozar Stankov, Metric embeddings of Laakso graphs into Banach spaces, Week of Mathematics and Informatics 2024, September 23-27, 2024, Duni Royal Resort, Bulgaria, https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/wmi-2024-program

2. Stephen. J. Dilworth, Denka Kutzarova, Svetozar Stankov, Metric embeddings of Laakso graphs into Banach spaces, Annual Scientific Session of Analysis, Geometry and Topology Department, December 5, 2024, IMI-BAS, https://math.bas.bg/event/%d0%be%d1%82%d1%87%d0%b5%d1%82%d0%bd%d0%b0-%d1%81%d0%b5%d1%81%d0%b8%d1%8f-%d0%bd%d0%b0-%d1%81%d0%b5%d0%ba%d1%86%d0%b8%d1%8f-%d0%b0%d0%bd%d0%b0%d0%bb%d0%b8%d0%b7-%d0%b3%d0%b5%d0%be%d0%bc%d0%b5%d1%82/

Декларация за автентичност

Авторът декларира, че дисертацията съдържа автентични резултати, получени от него или в сътрудничество с неговите съавтори. Използването на резултати от други учени е придружено със съответно цитиране.

Благодарности

На първо място бих искал да изразя искрените ми благодарности на секция "Анализ, геометрия и топология" на Института по Математика и Информатика на Българската Академия на Науките за огромната помощ и вдъхновение, които съм получил през годините - не само по време на докторантурата ми, но още от ученическите ми години. Разбира се, дължа благодарности и на Института по Математика и Информатика като цяло. Но бих искал специфично да спомена и секция "Изследване на операциите, вероятности и статистика" не просто за помощта, която ми бе оказана за да започна докторантурата си, но и за всички напътствия през годините.

Също така бих искал да благодаря професор Михаил Кръстанов не просто за организирането на изпитите, на които се явих, и помощта с формалностите около следването ми, но и за безценните математически напътствия, получени още от първата година в университета насам.

Академик Станимир Троянски има вечната ми признателност за неговата роля в създаването на интереса ми в областта на Банаховите пространства и за помощта му за моята магистърска дипломна работа.

Бих искал да благодаря като цяло на Факултета по Математика и Информатика на Софийски Университет за всичките възможности и знание, които получих там.

Изразявам и най-сърдечните си благодарности на професор Стивън Дилуърт за всички предложения, дискусии, и за работата ни заедно. Със сигурност не бих бил тук ако не бе той.

Най-вече само че бих искал да изкажа безкрайната ми признателност към професор Денка Куцарова за нейната безценна помощ, мотивация, търпение, и подкрепа. Професор Куцарова, страшно много Ви благодаря за това че бяхте мой научен ръководител и за това че ме научихте на толкова много!

Библиография

[1] Z. Altshuler, A Banach space with a symmetric basis which contains no ℓ_p or c_0, and all its symmetric basic sequences are equivalent, Compositio Math. 35 (1977), no 2, 189–195.

[2] F. Albiac, J. L. Ansorena, S. J. Dilworth, and D. Kutzarova, A dichotomy for subsymmetric basic sequences with applications to Garling spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 374 (2021), no. 3, 2079–2106.

[3] F. Albiac, J. L. Ansorena, and B. Wallis, Garling sequence spaces, J. London Math. Soc. (2) 98 (2018), no. 1, 204–222.

[4] Argyros, S. A.; Deliyanni, I. Examples of asymptotic ℓ_1 Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), no. 3, 973–995.

[5] K. Ball, The Ribe programme, Astérisque 352 (2013), Exp. No. 1047, viii, 147 – 159. Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043 – 1058.

[6] J. Bourgain, The metrical characterization of superreflexivity in Banach spaces, Israel J. Math. 56 (1986), 222–230.

[7] P. Casazza, S. J. Dilworth, D. Kutzarova and P. Motakis, On uniqueness and plentitude of subsymmetric sequences, Israel J. Math. 261 (2024), 613–636.

[8] P. G. Casazza and T. Shura, Tsirelson's space, Lecture Notes in Mathematics 1363, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] M. M. Deza and M. Laurent, Geometry of Cuts and Metrics, Algorithms and Combinatorics 15, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[10] Stephen J. Dilworth, Denka Kutzarova, Bünyamin Sarı, Svetozar Stankov, Duals of Tirilman spaces have unique subsymmetric basic sequences, Bulletin of the London Mathematical Society Volume 56, 150–158.

[11] S. J. Dilworth, Denka Kutzarova, Svetozar Stankov. Metric embeddings of Laakso graphs into Banach spaces, to appear in Banach Journal of Mathematical Analysis.

[12] Per Enflo, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, Israel J. Math. 13 (1972), 281–288.

[13] T. Figiel and W. B. Johnson, A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p, Compositio Math. 29 (1974), 179–190.

[14] D. J. H. Garling, Symmetric bases of locally convex spaces, Studia Math. 30 (1968), 163–181.

[15] W. T. Gowers, A new dichotomy for Banach spaces. Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 6, 1083–1093.

[16] W. T. Gowers, An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies. Ann. of Math. (2) 156 (2002), no. 3, 797-833.

[17] W. T. Gowers, A solution to Banach's hyperplane problem, Bull. London Math. Soc. 26 (1994), no 6, 523-530

[18] B. Bollobas, The work of William Timothy Gowers, Proc. Internat. Congress Math. Berlin 1998, 109-118

[19] W. T. Gowers, B. Maurey (1993) The unconditional basic sequence problem, J. Amer. Math. Soc. 6, pages 851-874

[20] A. Gupta, I. Newman, Y. Rabinovich and A. Sinclair, Cuts, trees and ℓ_1-embeddings of graphs, Combinatorica 24 (2004) 233–269; Conference version in: *40th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 1999, pp. 399–408.

[21] R. C. James, Super-reflexive Banach spaces, Can. J. Math. 24 (1972), 896–904.

[22] R. C. James and J.J. Schaffer, Super-reflexivity and the girth of spheres, Israel J. Math. 11 (1972), 398–404.

[23] Johnson, William B.; Lindenstrauss, Joram Basic concepts in the geometry of Banach spaces. Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[24] Johnson, William B.; Lindenstrauss, Joram Basic concepts in the geometry of Banach spaces. Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. II, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[25] W .B. Johnson and G. Schechtman, Diamond graphs and super-reflexivity, J. Topol. Anal. 1 (2009), 177–189.

[26] M. Junge, D. Kutzarova and E. Odell, On asymptotically symmetric Banach spaces, Studia Math. 173 (2006), no. 3, 203–231.

[27] D. Kutzarova, A. Manoussakis, and A. Pelczar-Barwacz, Isomorphisms and strictly singular operators in mixed Tsirelson spaces, J. Math. Anal. Appl. 388 (2012), no. 2, 1040–1060.

[28] D. Kutzarova, P. K. Lin (2000) Remarks about Schlumprecht space, Proceedings of the American Mathematical Society 128, no. 7, pages 2059-2068

[29] T. J. Laakso, Ahlfors Q-regular spaces with arbitrary $Q > 1$ admitting weak Poincare inequality, Geom. Funct. Anal. 10 (2000), 111–123.

[30] Urs Lang and Conrad Plaut, Bilipschitz Embeddings of Metric Spaces into Space Forms, Geom. Dedicata 87 (2001), 285–307.

[31] J. R. Lee and P. Raghavendra, Coarse differentiation and multi-flows in planar graphs, Discrete Comput. Geom. 43 (2010), 346–362.

[32] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces. I, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[33] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces. II. Function spaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], 97. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[34] A. Manoussakis, On the structure of a certain class of mixed Tsirelson spaces, Positivity 5 (2001), no. 3, 193–238.

[35] B. Maurey, V. D. Milman and N. Tomczak-Jaegermann, Asymptotic infinite-dimensional theory of Banach spaces, Oper. Theory: Adv. Appl. 77 (1995), 149–175.

[36] Assaf Naor, An introduction to the Ribe program, Jpn. J. Math. 7 (2012), no. 2, 167–233.

[37] M. I. Ostrovskii, Metric Embeddings: Bilipschitz and Coarse Embeddings into Banach Spaces, de Gruyter Studies in Mathematics, 49. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2013.

[38] Mikhail I. Ostrovskii and Beata Randrianantoanina, A new approach to low-distortion embeddings of finite metric spaces into non-superreflexive Banach spaces, J. Funct. Anal. 273 (2017), 598–651.

[39] Odell, Edward; Schlumprecht, Thomas The distortion problem. Acta Math. 173 (1994), no. 2, 259 – 281.

[40] G. Pisier, Martingales in Banach spaces, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 155, Cambridge University Press, 2016.

[41] M. Ribe, On uniformly homeomorphic normed spaces, Ark. Mat. 14 (1976), 237 – 244.

[42] B. Sari, Envelope functions and asymptotic structures in Banach spaces, Studia Math. 164 (2004), no. 3, 283–306.

[43] J. J. Schaffer and K. S. Sundaresan, Reflexivity and the girth of spheres, Math. Ann. 184 (1970), 163–168.

[44] Th. Schlumprecht, An arbitrarily distortable Banach space, Israel J. Math. 76 (1991), no. 1–2, 81–95.

[45] Svetozar Stankov, On the symmetrized dual of Schlumprecht's space, submitted.

[46] Andrew Swift, A coding of bundle graphs and their embeddings into Banach spaces, Mathematika 64 (2018), 847–874.

[47] B. S. Tsirelson, It is impossible to imbed ℓ_p or c_0 into an arbitrary Banach space, Funkcional. Anal. i Priložen. 8 (1974), no. 2, 57–60 (Russian).

[48] L. Tzafriri, On the type and cotype of Banach spaces, Israel J. Math. 32 (1979), no. 1 32–38.

[49] F. Baudier, G. Lancien, Th. Schlumprecht, The coarse geometry of Tsirelson's space and applications, J. American Mathematical Society 31 (2018), 699-717

[50] J. Hoffmann-Jorgensen, Sums of independent Banach space valued random variables, Studia Math. 52 (1974), 159-186

[51] P. G. Casazza, W. B. Johnson, L. Tzafriri, On Tsirelson's space. Israel J. Math. 47 (1984), no. 2-3, 81-98.

[52] G. Androulakis, T. Schlumprecht, The Banach space S is complementably minimal and subsequentially prime. Studia Math. 156 (2003), no. 3, 227-242.

[53] P.G. Casazza, N.J. Kalton, D. Kutzarova and M. Mastylo, Complex interpolation and complementably minimal spaces, Interaction between functional analysis, harmonic analysis and probability (Columbia, MO, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 175, Dekker, New York, 1996, 135-143.

[54] S. Argyros, I. Deliyanni, D. Kutzarova and A. Manoussakis, Modified mixed Tsirelson spaces, J. Funct. Anal. 159 (1998), 43-109.