

СТАНОВИЩЕ

**по процедура за защита на дисертационен труд на
тема:**

„Symmetry and metric geometry in Banach spaces “

**за придобиване на образователна и научна степен
„доктор“**

от докторант: Светозар Златков Станков

**в област на висше образование: 4. Природни науки,
математика и информатика,
професионално направление: 4.5. Математика,
докторска програма: Математически анализ**

**Становището е изготвено от д-р Станислав Троянски,
асоцииран член на Института по Математика и
Информатика на БАН, назначен със Заповед
№17/17.02.2025 на Директора на Института по
Математика и Информатика при БАН, за член на
Научното Жури по защитата.**

Дисертацията, е написана на много добър английски език,
и представлява текст, от 70 страници, формат А4.

Цитирани са 54 заглавия. Дисертацията се състои от шест
части - въведение, четири части, разделени на параграфи, в
които са изложени резултатите на дисертанта, и
заключение.

Проблематиката на дисертацията е в областта на Функционалния Анализ и по специално в най-важния раздел на Геометрията на Банаховите пространства : структурата на безкрайномерните Банаховите пространства.

През 70-те години на миналия век Б. Цирелсон решава отрицателно основния структурен въпрос на теорията на Банаховите пространства: дали всяко безкрайномерно банахово пространство съдържа подпространство, изоморфно на c_0 или l_p , $1 \leq p < \infty$. Идеята на Цирелсон е проста: индуктивно се конструират редица от норми в пространството c_{00} , чийто крайномерни подпространства имат все “по-лоши” геометрически характеристики. Накрая като се вземе затворената обвивка се, относно граничната норма се получава рефлексивно Банахово пространство, което не е суперрефлексивно.

Осъществяването на тази идея технически е изключително мъчно. Конструкцията на Цирелсон е сложна, както вече отбелязахме дефинира се редица от норми рекурсивно.

Използва се сложен комбинаторен анализ. Това е началото на развитието на техниката на “комбинаторните”

Бананови пространства. Т. Figiel и W. Johnson конструират суперрефлексивно пространство, което не съдържа c_0 или l_p , $1 \leq p < \infty$. Нещо повече, оригиналното пространство на Цирелсон не съдържа симетрични базисни редици. Цирелсоновото пространство оказва огромно влияние върху Теорията на Банаховите

пространства. Много конструкции, подобни по дух, са в основата на решаване на други важни проблеми. Ще споменем две от тях. Дихотомията на Т. Gowers (1996): Всяко безкрайномерно Банахово пространство X съдържа безкрайномерно подпространство Y , което или има безусловна базисна редица, или е наследствено неразложимо (последното свойство означава, че нито едно подпространство на Y не е изоморфно на топологична пряка сума от две безкрайномерни пространства). През 2011 г. S. Argyros и R. Haydon конструират Банахово пространство X , такова че всеки ограничен линеен оператор $T : X \rightarrow X$ се представя във вида $T = \lambda Id + K$, където K е компактен оператор. Пространството X е наследствено неразложимо и изоморфно на предудално на l_1 . Тяхната конструкция е базирана на метода на J. Bourgain и F. Delbaen произвеждащ “екзотични” $\mathcal{L}^\infty$ -пространства. За изучаване на структурата на Банаховите пространства, освен споменатите имена трябва да отбележим и заслугите и на Т. Odell, Th. Schlumprecht, B. Maurey, P. Casazza

В тази област са голяма част от резултатите на дисертанта. С.Станков изучава едно конкретно пространство от Цирелсонов тип и показва, че то съдържа подпространство изоморфно на l_1 . Това твърдение показва, колко внимателно трябва да извършва конструкцията на тези пространства.

Впечатляващ е резултатът на Теорема 7 от Дисертацията. Р. G. Casazza and T. J. Shura въвеждат един клас от Бананови пространства $\mathcal{T}$, произхождащ от Л. Цаффрири. В дисертацията е доказвано се, че естественият базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ от единичните вектори на всяко конкретно $X \in \mathcal{T}$ не е симетричен, но всяка субсиметрична базисна редица в X е еквивалентна на $(e_j)_{j=1}^{\infty}$. Доказателството е сложно и е базирано на няколко факти, които имат самостоятелен интерес.

Р. James намира ефективна характеристика на суперрефлексивните пространства в термини на крайни диадични дървета. На базата тази характеристика, Р. Enflo показва, че всяко суперрефлексивно пространство допуска равномерно изпъкнала и равномерно гладка еквивалентна норма. Използвайки вероятностния аналог на диадичните дървета, мартингалите на Walsh - Palay, G. Pisier, показва, че всяко супер-рефлексивно Банахово пространство може да бъде пренормирано по такъв начин, че неговите модули на изпъкналост и гладкост да допускат оценки от степенен тип. W. B. Johnson и G. Schechtman характеризират Банахови пространства, които не са суперрефлексивни, в термините ромбоидни графи и графи на Laakso.

Като използва критерия на James за отсъствие на суперрефлексивност, наричан J - изпъкналост, С. Станков влага графа на Laakso в във всяко пространство X , което не е суперрефлексивно. Най-интересен е случая, когато X е $L_1 [0,1]$ (Теорема 49/52 стр.47/49 от Дисертацията).

За всяко $n \geq 1$, съществува изображение f_n на графа на

Laakso $\mathcal{L}_n$ в $L_1 [0, 1]$, такова за всички $a, b \in \mathcal{L}_n$, имаме

$$\frac{3}{4} d(a,b) \leq \|f_n(a) - f_n(b)\|_1 \leq d(a,b).$$

Ако $f: \mathcal{L}_2 \rightarrow L_1 [0, 1]$ удовлетворява неравенството

$$d(a,b) \leq \|f(a) - f(b)\|_1 \leq c d(a,b),$$

за всички a и b от $\mathcal{L}_2$, то $c \geq 9/8$.

В основата на дисертацията лежат три статии. Едната е публикувана в престижното общо математическо списание Bull. London Math. Soc., втората в специализираното списание Banach J. Math. Anal., а третата в С. R. Acad. Bulg. Sci. Това ми дава основание да смятам, че резултатите на дисертанта са подложени на сериозна международна експертиза. Части от дисертацията са докладвани на различни научни форуми. Авторефератът правилно отразява съдържанието на дисертацията.

За да работи в тази област, дисертантът, освоява голям обем, математически апарат на Класическия и Функционалния Анализ, Комбинаториката, Топологията, и успешно го прилага при решаване на конкретни задачи. В заключение ще отбележа, че по моя преценка резултатите от дисертацията, както по количество, така и по качество удовлетворяват, с излишък, стандартните изисквания за докторска дисертация.

Напълно убеден съм, че Светозар Златков Станков заслужава да му бъде присъдена образователната и научна степен “ДОКТОР” и настойчиво препоръчвам на Научното Жури да му я присъди.

Мурсия, май 2025 г.

Рецензент:

