Българска Академия на Науките
Институт по Математика и Информатика

Виктория Герасимова Бенчева-Петрова

ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА ВРЕМЕПОДОБНИ ПОВЪРХНИНИ В ЧЕТИРИМЕРНО ПРОСТРАНСТВО НА МИНКОВСКИ

АВТОРЕФЕРАТ

за присъждане на образователната и научна степен "доктор"

Област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление 4.5. Математика

Докторска програма "Геометрия и Топология"

София, 2024 г.

Въведение

В локалната теория на повърхнините и хиперповърхнините в стандартни модел-ни пространства, като Евклидовото пространство $\mathbb{E}^m$, пространството на Минковски $\mathbb{E}_1^m$ или псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}_s^m$ с индекс $s > 1$, един от основните проблеми е да се определи повърхнината (хиперповърхнината) чрез система от няколко функции, удовлетворяващи няколко диференциални уравнения. Това е така наречената фундаментална теорема от типа на Боне (Bonnet), даваща естествените условия, при които повърхнината е определена с точност до движение. Разработването на теорията на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{R}^4$, както и в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{R}_1^4$, е база за разработването на общата теория на 2-мерни повърхнини в $\mathbb{E}^m$ и в $\mathbb{E}_1^m$.

В Евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ общата фундаментална теорема гласи, че всяка повърхнина без минимални точки е определена с точност до движение в $\mathbb{R}^4$ чрез осем функции, удовлетворяващи система от няколко диференциални уравнения [33]. За класа на минималните повърхнини в $\mathbb{R}^4$, броят на инвариантните функции и броят на диференциалните уравнения, определящи повърхнината с точност до движение, са редуцирани до две [65]. Повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина са определени с точност до движение от три инвариантни функции, удовлетворяващи система от три частни диференциални уравнения [41].

В последните години интезивно се изучават повърхнини в псевдо-Евклидови пространства, тъй като те намират интерпретация от физична гледна точка. В псевдо-Евклидово пространство съществуват два типа повърхнини в зависимост от това каква е индуцираната им метрика - Риманова или Лоренцова. Повърхнините се наричат съответно пространственоподобни или времеподобни.

Резултати, аналогични на споменатите по-горе резултати в Евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$, има и за пространственоподобни повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски $\mathbb{R}_1^4$. Локалната теория на пространственоподобните повърхнини в $\mathbb{R}_1^4$, чийто вектор на средната кривина във всяка точка е ненулев пространственоподобен (или времеподобен вектор), е разгледана в [35]. Този клас повърхнини е определен с точност до движение в $\mathbb{R}_1^4$ от осем инвариантни функции, удовлетворяващи система частни диференциални уравнения. Пространственоподобните повърхнини в $\mathbb{R}_1^4$, чийто вектор на средната кривина във всяка точка е светлинноподобен, са наречени "marginally trapped"[1] повърхнини. Тези повърхнини са дефинирани от Роджър Пенроуз (Roger Penrose) с цел да се изследват глобалните свойства на пространството-време [60] и играят важна роля в теорията на космическите черни дупки. В последно време "marginally trapped" повърхнините, удовлетворяващи някакви допълнителни

[1] Поради липса на добър превод на български език на това понятие, ще го използваме на английски език.

условия, се изследват интензивно от математическа гледна точка, виж. например [9], [10], [11], [24], [25], [26], [27]. Инвариантната теория на marginally trapped повърхнините в $\mathbb{R}^4_1$ е разгледана в [37], където е доказано, че тези повърхнини са определени с точност до движение чрез седем инвариантни функции, удовлетворяващи система частни диференицални уравнения. В 4-мерно Евклидово пространство с неутрална метрика аналог на marginally trapped повърхнините са квази-минималните повърхнини. Квази-минималните повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в $\mathbb{R}^4_2$ са разглеждани в [22]. В [42] е дадена класификация на квази-минимални ротационни повърхнини в $\mathbb{R}^4_2$.

Изследването на минималните повърхнини е една от основните задачи в класическата диференциална геометрия, която води началото си 18-ти век, когато Лагранж (Lagrange) разглежда вариационна задача за намиране на повърхнина с минимално лице, зададена от затворен контур, и намира уравнението на минималните повърхнини, известно днес като уравнение на Лагранж [47]. Геометричната интерпретация на минималните повърхнини като повърхнини с нулева средна кривина е дадена от Meusnier [55]. Изучаването на минимални повърхнини в 4-мерно Евклидово пространство води началото си от Eisenhart [30]. Подробни резултати за минимални повърхнини са дадени в книгата на Nitsche [58]. Интензивното изучаването на минимални подмногообразия, вложени в различни пространства, е свързано с приложенията, които те имат в математическата физика. Класификация на минимални Лоренцови повърхнини в псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^m_s$ с индекс $s > 1$ е дадена в [20]. В [62] са изследвани минимални повърхнини в 4-мерно пространство с индекс 2.

При изследването на повърхнините с нулев вектор на средната кривина в псевдо-Евклидови пространства съществен проблем е въвеждането на специални параметри, които позволяват да се минимизира броят на функциите и броят на частните диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение. Максималните пространственоподобни повърхнини и минималните времеподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ са изследвани съответно в [2] и [36]. Доказано е, че тези повърхнини локално допускат специални изотермични параметри (наречени *канонични*), спрямо които двете основни инварианти Гаусовата кривина и нормалната кривина удовлетворяват система от две ЧДУ, наречени *естествени уравнения* на повърхнината. И така, за повърхнините с нулев вектор на средната кривина, броят на функциите и броят на уравненията, които определят повърхнината с точност до движение, е редуциран до две. Освен това, геометрията на този клас повърхнини се определя от решенията на тези системи ЧДУ.

Напоследък се появиха редица изследвания, свързани с класификация на Лоренцови (времеподобни) повърхнини в псевдо-Евклидови пространства, удовлетворяващи допълнителни условия за векторното поле на средната кривина или за втория фундаментален тензор. Ще споменем някои от тях.

Времеподобни повърхнини с постоянна средна кривина в 3-мерно пространство на Минковски са изучавани в [53]. Класификация на пространственоподобни хеликоидални повърхнини с постоянна средна кривина в $\mathbb{R}^3_1$ е дадена в [63]. Пространственоподобни повърхнини с постоянна средна кривина са изучавани също в [4] и [6].

Една повърхнина се нарича паралелна, ако втората ѝ основна форма е паралелна по отношение на свързаността на Van der Waerden-Bortolotti. Паралелните повърхнини представляват интерес не само в диференциалната геометрия, но също така и във физиката, тъй като техните външни инварианти не се променят от точка в точка. Паралелните Лоренцови повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство са описани от B.-Y. Chen и J. Van der Veken в [23]. Експлицитен вид на паралелните повърхнини в псевдо-Евклидовото пространство с неутрална метрика $\mathbb{R}^4_2$, в псевдо-хиперболичното пространство $\mathbb{H}^4_2(-1)$ и в неутралната псевдо-сфера $\mathbb{S}^4_2(1)$ е получен съответно в [21], [14] и [15]. Класификация на паралелните Лоренцови повърхнини в псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^m_s$ с произволна размерност m и произволен индекс s е дадена в [16].

Повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина са друг основен клас повърхнини в Римановата и псевдо-Римановата геометрия. Те играят важна роля както в диференциалната геометрия, така и в теорията на хармоничните изображения и физиката. Първите класификационни резултати за повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина в Риманови пространства с постоянна кривина са дадени от Chen [7] и Yau [67]. В последните години бяха класифицирани пространственоподобни повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в произволни пространствени форми [12], [13]. Пълна класификация на Лоренцовите повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина в произволно-мерно псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^m_s$ е направена в [17] и [31]. Обзор на класически и нови резултати, свързани с подмногообразия с паралелно векторно поле на средната кривина както в Риманови, така и в псевдо-Риманови многообразия, е представен от Chen в [18].

Класът на повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина се явява разширение на класа на повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина. Една повърхнина в Риманово или псевдо-Риманово многообразие има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, ако векторното ѝ поле на средната кривина H е ненулево и единичното векторно поле по направлението на H е паралелно [8]. Известно е, че всяка повърхнина в 3-мерното Евклидово пространство има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, но в 4-мерното Евклидово пространство има редица примери на повърхнини, които са с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, но не и с паралелно векторно поле на средната кривина, което показва, че условието за наличие на паралено нормирано векторно поле на средната кривина е по-слабо от това за наличие на паралелно векторно поле на средната кривина. В [8] е доказано, че всяка аналитична повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^m$ лежи или в 4-мерно Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$, или върху хиперсфера в $\mathbb{E}^m$ като минимална повърхнина. Пространственоподобни подмногообразия с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в пространство на de Sitter са изследвани в [64]. За времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в $\mathbb{R}^4_1$ не са ни известни резултати.

Целта на настоящата дисертация е изучаване на времеподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{R}^4_1$ и разработване на локалната им теория по аналогия с локалната теория на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ и на теорията на пространственоподобните повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{R}^4_1$. Подходът ни към изучаване на времеподобните повърхнини се базира на въвеждане на геометрично определен придружаващ репер във всяка точка на повърхнината, спрямо който получаваме съвкупност от геометрични функции и система от частни диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение в $\mathbb{R}^4_1$.

Естествено е да си поставим въпроса дали могат да се въведат специални параметри върху други класове времеподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ освен минималните, които да позволят минимизиране на броя на функциите и броя на уравненията, задаващи повърхнините с точност до движение. Успяхме да решим този проблем за класа на времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Подходът ни към изучаване на тези повърхнини се базира на въвеждане на специални изотропни параметри, които наричаме канонични. Използването на канонични параметри позволява да характеризираме времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина чрез три функции, удовлетворяващи система от три частни диференциялни уравнения, които определят повърхнината с точност до движение.

Глава 1. Фундаментални теореми за времеподобни повърхнини в четиримерно пространство на Минковски

1.1. Основни сведения и понятия

Нека $\mathbb{R}^4_1$ е четиримерно пространство на Минковски с индуцирана метрика $\langle\, , \rangle$ със сигнатура (3,1). Ориентацията в $\mathbb{R}^4_1$ се задава с фиксирана ортонормирана координатна система $\mathcal{K} = Oe_1e_2e_3e_4$ такава, че $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 1, \langle e_4, e_4\rangle = -1$. Стандартната гладка метрика се задава в локални координати чрез

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

При индефинитна метрика вектор v от псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{R}^4_1$ може да бъде

(1) пространственоподобен, ако $\langle v, v\rangle > 0$ или $v = 0$;

(2) времеподобен, ако $\langle v, v\rangle < 0$;

(3) светлинноподобен (наричан също *изотропен*), ако $v \neq 0$ и $\langle v, v\rangle = 0$.

Дефиниция 1.1.1. Една двумерна повърхнина M^2 в $\mathbb{R}^4_1$ се нарича *пространственоподобна*, ако индуцираната метрика g върху M^2 е Риманова.

Дефиниция 1.1.2. Една двумерна повърхнина M^2 в $\mathbb{R}^4_1$ се нарича *времеподобна*, ако индуцираната метрика g върху M^2 е с индекс 1 (т.е. Лоренцова).

В настоящия дисертационен труд изучаваме двумерни времеподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{R}^4_1$.

За двумерна времеподобна повърхнина M^2 в $\mathbb{R}^4_1$ имаме следното разлагане на допирателно и нормално пространство:

$$\mathbb{R}^4_1 = T_pM^2 \oplus N_pM^2,$$

при което рестрикцията на метриката $\langle\, , \rangle$ върху допирателното пространство T_pM^2 е със сигнатура $(1, 1)$ и рестрикцията на метриката върху нормалното пространство N_pM^2 е със сигнатура $(2, 0)$.

Използваме стандартните означения $\widetilde{\nabla}$ и ∇ за свързаностите на Леви-Чевита съответно върху $\mathbb{R}^4_1$ и M^2. За произволни допирателни векторни полета x и y към M^2 и нормално векторно поле ξ на M^2 са в сила следните формули на Гаус и Вайнгартен [7]:

$$\widetilde{\nabla}_x y = \nabla_x y + \sigma(x, y);$$

$$\widetilde{\nabla}_x \xi = -A_\xi x + D_x \xi.$$

Чрез тези формули се дефинират вторият фундаментален тензор σ, нормалната свързаност D и линейният оператор A_ξ, съответстващ на векторното поле ξ (наричан *shape operator*). Връзката между оператора A_ξ и втория фундаментален тензор σ се задава чрез формулата:

$$\langle \sigma(x,y), \xi \rangle = \langle A_\xi x, y \rangle.$$

Чрез втория фундаментален тензор σ се дефинира и векторно поле на средната кривина H на повърхнината M^2 по следния начин:

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\sigma.$$

В случая на времеподобна повърхнина M^2 векторното поле на средната кривина се изразява по формулата

$$H = \frac{1}{2}\,(-\sigma(x,x) + \sigma(y,y)),$$

където $\{x,y\}$ е локална ортонормирана база на допирателното пространство, за която $\langle x,x\rangle = -1$, $\langle y,y\rangle = 1$.

Дефиниция 1.1.3. Една повърхнина M^2 в $\mathbb{R}^4_1$ се нарича *минимална*, ако векторното поле на средната кривина е нула във всяка точка от повърхнината, т.е. $H = 0$.

Едно нормално векторно поле ξ върху повърхнина M^2 се нарича *паралелно в нормалното пространство* (или само *паралелно*), ако е паралелно по отношение на нормалната свързаност D, т.е. $D\xi = 0$ във всички точки на повърхнината [19]. Повърхнина M^2 се нарича повърхнина с *паралелно векторно поле на средната кривина*, ако векторното ѝ поле на средната кривина H е паралелно, т.е. $DH = 0$. Една повърхнина M^2 се нарича повърхнина с *паралелно нормирано векторно поле на средната кривина*, ако H е ненулево векторно поле и съществува единично векторно поле по направление на H, което е паралелно в нормалното пространство [8]. Лесно се вижда, че ако M^2 е повърхнина с ненулево паралелно векторно поле на средната кривина H (т.е. $DH = 0$), то M^2 е повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Обратното, обаче, в общия случай не е вярно. В сила е само в случая, когато $\|H\| = \text{const}$.

Нека $\{x,y\}$ е ортонормирана база от допирателни векторни полета, а $\{n_1, n_2\}$ е ортонормирана база от нормални векторни полета на повърхнина M^2 и нека n е произволно нормално векторно поле. Тогава са в сила следните формули за *Гаусовата кривина* K, *тензорът на кривината* R^D *на нормалната свързаност* D и *кривината на нормалната свързаност* $\varkappa$ (*нормалната кривина*) на повърхнината M^2:

$$K = \frac{\langle \sigma(x,x), \sigma(y,y)\rangle - \langle \sigma(x,y), \sigma(x,y)\rangle}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2};$$

$$R^D(x,y)n = D_x D_y n - D_y D_x n - D_{[x,y]} n;$$

$$\varkappa = \frac{\langle R^D(x,y)n_1, n_2\rangle}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}.$$

В настоящия труд изучаваме двумерни времеподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{R}^4_1$.

1.2. Изображение на Вайнгартен за времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$

В този параграф въвеждаме линейно изображение γ от тип изображение на Вайнгартен и разработваме локална теория за времеподобни повърхнини в четиримерното пространство на Минковски $\mathbb{R}^4_1$ по аналогия с теорията на повърхнините в $\mathbb{R}^4$ и на пространственоподобните повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$. Въвеждаме инвариантите k и $\varkappa$, които са породени от изображението γ по следния начин: $k = \det\gamma$, $\varkappa = -\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}\gamma$. Доказваме, че функцията $\varkappa$, дефинирана чрез изображението на Вайнгартен по горната формула, съвпада с кривината на нормалната свързаност на повърхнината M^2.

Въвеждаме понятията спрегнати допирателни, асимптотични линии и главни линии на повърхнината и показваме, че наличието на главни линии върху времеподобна повърхнина зависи от знака на функцията $\varkappa^2 - k$. В случая, когато $\varkappa^2 - k > 0$, във всяка точка от повърхнината съществуват две главни допирателни и повърхнината M^2 може да се параметризира спрямо главните ѝ линии. В този случай изображението γ може да се диагонализира.

За разлика от пространственоподобните повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$, при които изображението на Вайнгартен винаги е диагонализируемо и съществуват главни линии във всяка точка на повърхнината, в случая на времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ изображението γ не винаги може да се диагонализира. Затова в случая когато $\varkappa^2 - k > 0$, разработваме локалната теория аналогично на теорията на пространственоподобните повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ на база на съществуващата параметризация спрямо главни линии. В случая когато $\varkappa^2 - k < 0$, не съществуват главни линии на повърхнината и затова прилагаме нов подход за изследване, базиран на локалната параметризация спрямо изотропните направления на повърхнината.

1.3. Времеподобни повърхнини, състоящи се от омбилични точки

В този параграф разглеждаме времеподобни повърхнини без инфлексни точки, за които $\varkappa^2 - k = 0$ във всяка точка. Тези повърхнини се състоят само от омбилични точки[2]. Доказваме следното твърдение.

Твърдение 1.3.1. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без инфлексни точки. Тогава, M^2 е минимална повърхнина тогава и само тогава, когато M^2 се състои от омбилични точки.*

Минималните времеподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ са изучавани в [36], където е доказано, че те се определят еднозначно (с точност до движение) чрез две инвариантни функции, удовлетворяващи система от две частни диференциални уравнения. Поради това, в настоящия дисертационен труд не се занимаваме с този клас времеподобни повърхнини.

1.4. Времеподобни повърхнини без омбилични точки

В този параграф изучаваме времеподобни повърхнини, за които $\varkappa^2 - k \neq 0$, т.е. повърхнини без омбилични точки. В случая когато $\varkappa^2 - k > 0$ в някаква подобласт, използваме локална параметризация спрямо главните линии. Този клас времеподобни повърхнини е разгледан в §1.4.1. В случая когато $\varkappa^2 - k < 0$ в някакава подобласт, използваме локална параметризация спрямо изотропните линии. Тези изследвания са дадени в §1.4.2.

1.4.1 Времеподобни повърхнини, параметризирани спрямо главни линии

В този параграф изучаваме времеподобните повърхнини, които могат да се параметризират спрямо главни линии. Въвеждаме геометричен репер на повърхнината $\{X, Y, N_1, N_2\}$, определен от главните направления и векторното поле на средната кривина H и разработваме локалната теория на времеподобните повърхнини, за които $\varkappa^2 - k > 0$, по аналогия с теорията на пространственоподобните повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$.

Спрямо въведения геометричен репер са в сила следните деривационни формули от тип формули на Френе:

$$\begin{array}{ll}
\widetilde{\nabla}_X X = \gamma_1 Y + \nu_1 N_1; & \widetilde{\nabla}_X N_1 = \nu_1 X - \lambda Y + \beta_1 N_2; \\
\widetilde{\nabla}_X Y = \gamma_1 X + \lambda N_1 + \mu N_2; & \widetilde{\nabla}_Y N_1 = \lambda X - \nu_2 Y + \beta_2 N_2; \\
\widetilde{\nabla}_Y X = -\gamma_2 Y + \lambda N_1 + \mu N_2; & \widetilde{\nabla}_X N_2 = -\mu Y - \beta_1 N_1; \\
\widetilde{\nabla}_Y Y = -\gamma_2 X + \nu_2 N_1; & \widetilde{\nabla}_Y N_2 = \mu X - \beta_2 N_1,
\end{array}$$

от които получаваме 8 функции γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2, определени от геометричния

[2]Използваме терминологията от класическата диференциална геометрия на повърхнини в $\mathbb{R}^3$.

репер. Векторното поле на средната кривина H, Гаусовата кривина K, нормалната кривина $\varkappa$ и функцията k се изразяват чрез следните формули:

$$H = \frac{-\nu_1 + \nu_2}{2} N_1; \qquad K = \lambda^2 + \mu^2 - \nu_1\nu_2; \qquad \varkappa = (\nu_1 + \nu_2)\mu; \qquad k = -4\nu_1\nu_2\mu^2.$$

Следните твърдения следват непосредствено от горните формули.

Твърдение 1.4.1. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава, M^2 е с постоянна ненулева средна кривина тогава и само тогава, когато $\nu_1 - \nu_2 = const = c$, $c \neq 0$.*

Твърдение 1.4.2. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава, M^2 е плоска ($K = 0$), тогава и само тогава, когато $\nu_1\nu_2 = \lambda^2 + \mu^2$.*

Твърдение 1.4.3. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава, M^2 е с постоянна ненулева Гаусова кривина ($K = const \neq 0$), тогава и само тогава, когато $\lambda^2 + \mu^2 - \nu_1\nu_2 = const = c$, $c \neq 0$.*

Твърдение 1.4.4. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава, M^2 е с плоска нормална свързаност ($\varkappa = 0$), тогава и само тогава, когато $\nu_1 + \nu_2 = 0$.*

Твърдение 1.4.5. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо главните линии. Тогава, M^2 е с постоянна ненулева нормална кривина ($\varkappa = const \neq 0$), тогава и само тогава, когато $(\nu_1 + \nu_2)\mu = const = c$, $c \neq 0$.*

За класа на времеподобните повърхнини, които допускат параметризация спрямо главни линии, доказваме следната фундаментална теорема (теорема за съществуване и единственост):

Теорема 1.4.6. *Нека γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2 са гладки функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, и удовлетворяващи условията*

$$\begin{aligned}
&\frac{(\mu)_u}{\nu_1\beta_2 + 2\mu\gamma_2 - \beta_1\lambda} > 0\\
&\frac{(\mu)_v}{\nu_2\beta_1 - 2\mu\gamma_1 - \beta_2\lambda} > 0\\
&(\sqrt{-E})_v = \gamma_1\sqrt{-E}\sqrt{G}\\
&(\sqrt{G})_u = -\gamma_2\sqrt{-E}\sqrt{G}\\
&\frac{1}{\sqrt{-E}}(\gamma_2)_u + \frac{1}{\sqrt{G}}(\gamma_1)_v = -\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu_1\nu_2\\
&\frac{1}{\sqrt{-E}}(\lambda)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\nu_1)_v = \gamma_1(\nu_1 + \nu_2) + 2\lambda\gamma_2 + \mu\beta_1\\
&\frac{1}{\sqrt{-E}}(\nu_2)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\lambda)_v = 2\lambda\gamma_1 + (\nu_1 + \nu_2)\gamma_2 - \mu\beta_2\\
&\frac{1}{\sqrt{-E}}(\beta_2)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(\beta_1)_v = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \mu(\nu_1 + \nu_2),
\end{aligned}$$

където $\sqrt{-E} = \dfrac{(\mu)_u}{\nu_1\beta_2 + 2\mu\gamma_2 - \beta_1\lambda}$, $\sqrt{G} = \dfrac{(\mu)_v}{\nu_2\beta_1 - 2\mu\gamma_1 - \beta_2\lambda}$. Нека $\{X_0, Y_0, (N_1)_0, (N_2)_0\}$ е ортонормиран репер в точка $p_0 \in \mathbb{R}^4_1$. Тогава, съществува подобласт $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и единствена времеподобна повърхнина $M^2 : z = z(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{D}_0$, минаваща през p_0, такава, че $\{X_0, Y_0, (N_1)_0, (N_2)_0\}$ е геометричният репер на M^2 в точка p_0, а γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2 са геометричните функции на повърхнината.

1.4.2 Времеподобни повърхнини, параметризирани спрямо изотропни линии

В случая, когато $\varkappa^2 - k < 0$, не съществуват главни линии и подходът от предишния параграф не може да се приложи. Затова използваме, че във всяка точка на времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ съществуват две изотропни линии и изучаваме тези повърхнини спрямо изотропни параметри. Този подход може да се приложи, както за класа $\varkappa^2 - k > 0$, така и за класа $\varkappa^2 - k < 0$.

Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки и $\varkappa^2 - k \neq 0$ във всяка точка от повърхнината. Известно е, че за времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ локално съществува параметризация (u, v) такава, че метричният тензор g на M^2 има следния вид [49]:

$$g = -f^2(u, v)(du \otimes dv + dv \otimes du),$$

където $f(u, v)$ е положителна функция. Нека $z = z(u, v), (u, v) \in \mathcal{D}$ е такава локална параметризация на M^2. Спрямо нея коефициентите на първата основна форма са

$$E = \langle z_u, z_u \rangle = 0; \quad F = \langle z_u, z_v \rangle = -f^2(u,v); \quad G = \langle z_v, z_v \rangle = 0,$$

което означава, че допирателните векторни полета z_u и z_v са светлинноподобни (изотропни). Параметрите (u, v) се наричат *изотропни параметри* на повърхнината, а направленията, определени от z_u и z_v – *изотропни направления*.

Въвеждаме геометричен репер $\{x, y, n_1, n_2\}$ на повърхнината, определен от изотропните направления и векторното поле на средната кривина H, който наричаме псевдо-ортонормиран геометричен репер. Разработваме локална теория за времеподобните повърхнини, параметризирани спрямо изотропни линии, като извеждаме деривационните формули спрямо псевдо-ортонормирания геометричен репер и получаваме система от функции γ_1, γ_2, ν, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, β_1, β_2, определени от него. Деривационните формули имат вида:

$$\begin{array}{ll}
\widetilde{\nabla}_x x = \gamma_1 x \qquad + \lambda_1 n_1 + \mu_1 n_2; & \widetilde{\nabla}_x n_1 = -\nu x + \lambda_1 y \qquad + \beta_1 n_2; \\
\widetilde{\nabla}_x y = \qquad -\gamma_1 y - \nu n_1; & \widetilde{\nabla}_y n_1 = \lambda_2 x - \nu y \qquad + \beta_2 n_2; \\
\widetilde{\nabla}_y x = -\gamma_2 x \qquad - \nu n_1; & \widetilde{\nabla}_x n_2 = \qquad + \mu_1 y - \beta_1 n_1; \\
\widetilde{\nabla}_y y = \qquad \gamma_2 y + \lambda_2 n_1 + \mu_2 n_2; & \widetilde{\nabla}_y n_2 = \mu_2 x \qquad - \beta_2 n_1.
\end{array}$$

Векторното поле на средната кривина H и Гаусовата кривина K се изразяват по следния начин:

$$H = \nu\, n_1; \qquad K = \nu^2 - (\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2).$$

В сила са следните твърдения.

Твърдение 1.4.8. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава, M^2 е с постоянна ненулева средна кривина тогава и само тогава, когато $\nu = \mathrm{const} = c$, $c \neq 0$.*

Твърдение 1.4.9. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава, M^2 е плоска ($K = 0$), тогава и само тогава, когато $\nu^2 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2$.*

Твърдение 1.4.10. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава, M^2 е с постоянна ненулева Гаусова кривина ($K = \mathrm{const} \neq 0$), тогава и само тогава, когато $\nu^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) = \mathrm{const} = c$, $c \neq 0$.*

Геометричният смисъл на функциите β_1 и β_2 се дава в следващите две твърдения.

Твърдение 1.4.11. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава, M^2 има паралелно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $\nu = \text{const}$.*

Твърдение 1.4.12. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава, M^2 има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $\nu \neq \text{const}$.*

В следващия параграф доказваме фундаментални теореми за съществуване и единственост на времеподобни повърхнини, параметризирани спрямо изотропни линии.

1.4.3 Фундаментални теореми за времеподобни повърхнини от общ тип

В този параграф изучаваме повърхнини, за които $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Наричаме ги времеподобни повърхнини от *общ тип*. Като използваме, че свързаността $\widetilde{\nabla}$ на Леви-Чевита е плоска и деривационните формули, получени в §1.4.2, получаваме следните *условия за интегруемост* за този клас повърхнини:

$$\begin{aligned}
&x(\lambda_2) + y(\nu) + 2\gamma_1\lambda_2 - \mu_2\beta_1 = 0;\\
&x(\nu) + y(\lambda_1) + 2\gamma_2\lambda_1 - \mu_1\beta_2 = 0;\\
&x(\mu_2) + 2\gamma_1\mu_2 + \nu\beta_2 + \lambda_2\beta_1 = 0;\\
&y(\mu_1) + 2\gamma_2\mu_1 + \nu\beta_1 + \lambda_1\beta_2 = 0;\\
&x(\gamma_2) + y(\gamma_1) + 2\gamma_1\gamma_2 - \nu^2 + \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0;\\
&x(\beta_2) - y(\beta_1) + \mu_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_2 + \gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1 = 0.
\end{aligned}$$

Нормалната кривина $\varkappa$ и функцията k, определена от изображението на Вайнгартен, се изразяват чрез следните формули:

$$\varkappa = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1; \qquad k = 4\nu^2\mu_1\mu_2 + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2.$$

В сила са твърденията:

Твърдение 1.4.13. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава, M^2 е с плоска нормална свързаност ($\varkappa = 0$), тогава и само тогава, когато $\lambda_1\mu_2 = \lambda_2\mu_1$.*

Твърдение 1.4.14. *Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ без омбилични точки, параметризирана спрямо изотропните линии. Тогава, M^2 е с постоянна ненулева нормална кривина ($\varkappa = \mathrm{const} \neq 0$), тогава и само тогава, когато $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \mathrm{const} \neq 0$.*

От получените формули за $\varkappa$ и k следва, че знакът на израза $\varkappa^2 - k$ зависи от произведението на функциите μ_1 и μ_2. По-точно, в сила е следната връзка:

$$\varkappa^2 - k = -4\nu^2\mu_1\mu_2.$$

Ако допуснем, че $\mu_1(u,v) = 0$ и $\mu_2(u,v) = 0$ за всяко $(u,v) \in \mathcal{D}$, тогава повърхнината се състои само от инфлексни точки, т.е. във всяка точка $p \in M^2$ първото нормално пространство $\operatorname{Im}\sigma_p = \operatorname{span}\{\sigma(x,y) : x,y \in T_pM^2\}$ е едномерно. В този случай повърхнината е развиваема или лежи в 3-мерно пространство [48]. Затова, считаме, че $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$ поне в подобласт $\mathcal{D}_0$ на $\mathcal{D}$.

Разглеждаме три типа времеподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ и за всеки от тях доказваме фундаментална теорема (теорема за съществуване и единственост) на езика на изотропни параметри.

Първият случай, който разглеждаме, е $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_2 \neq 0$ в дефиниционната област и такава времеподобна повърхнина наричаме от *първи тип*. Доказваме фундаментална теорема, която гласи, че всяка времеподобна повърхнина от първи тип е определена с точност до движение от шест функции $f(u,v) > 0$, $\nu(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$, $\mu_1(u,v)$, $\mu_2(u,v)$, удовлетворяващи система от четири частни диференциални уравнения. По-точно, теоремата гласи:

Теорема 1.4.15. *Нека $f(u,v) > 0$, $\nu(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\mu_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$, $\mu_2(u,v)$, $\mu_1\mu_2 \neq 0$ са шест гладки функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, и удовлетворяващи следните условия*

(i) $$(\lambda_2^2 + \mu_2^2)_u + (\ln f^4)_u(\lambda_2^2 + \mu_2^2) + 2\lambda_2\nu_v + \frac{2\nu\mu_2}{\mu_1}\Big(\nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v\Big) = 0;$$

(ii) $$(\lambda_1^2 + \mu_1^2)_v + (\ln f^4)_v(\lambda_1^2 + \mu_1^2) + 2\lambda_1\nu_u + \frac{2\nu\mu_1}{\mu_2}\Big((\lambda_2)_u + \nu_v + \lambda_2(\ln f^2)_u\Big) = 0;$$

(iii) $$\frac{2ff_{uv} - 2f_uf_v}{f^4} + \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - \nu^2 = 0;$$

(iv) $$\begin{aligned}&(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1)\left(f^2\mu_1\mu_2 - (\ln f^2)_{uv}\right) + \nu_{uu}\mu_2 - \nu_{vv}\mu_1 + (\lambda_1)_{uv}\mu_2 - (\lambda_2)_{uv}\mu_1 + \\ &+ \mu_2(\lambda_1)_u(\ln f^2)_v - \mu_1(\lambda_2)_v(\ln f^2)_u - \frac{\mu_2(\mu_1)_u}{\mu_1}\left(\nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v\right) + \\ &+ \frac{\mu_1(\mu_2)_v}{\mu_2}\left((\lambda_2)_u + \nu_v + \lambda_2(\ln f^2)_u\right) = 0.\end{aligned}$$

Нека $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$ *е псевдо-ортонормиран репер в точка* $p_0 \in \mathbb{R}^4_1$. *Тогава, съществува подобласт* $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ *и единствена времеподобна повърхнина от първи тип* $M^2 : z = z(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}_0$, *параметризирана спрямо изотропни параметри, такава, че* M^2 *минава през* p_0 *и* $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$ *е геометричният репер на* M^2 *в точката* p_0.

Времеподобните повърхнини от *втори тип* се характеризират с $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Те се определя от 5 функции $f(u,v) > 0$, $\nu(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v)$, $\mu_1(u,v)$, удовлетворяващи система от 4 частни диференциални уравнения. Фундаменталната теорема за времеподобни повърхнини от втори тип гласи следното:

Теорема 1.4.16. *Нека* $f(u,v) > 0$, $\nu(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\mu_1(u,v)$, $\lambda_2(u,v) \neq 0$ *са пет гладки функции, дефинирани в област* $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ *и удовлетворяващи следните условия:*

(i) $(\lambda_2)_u + \nu_v + (\ln f^2)_u \lambda_2 = 0;$

(ii) $(\mu_1)_v + (\ln f^2)_v \mu_1 - \dfrac{\nu^2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 \mu_1}(\nu_u + (\lambda_1)_v + (\ln f^2)_v \lambda_1) = 0;$

(iii) $\dfrac{2ff_{uv} - 2f_u f_v}{f^4} - (\nu^2 - \lambda_1\lambda_2) = 0;$

(iv)
$$\begin{aligned} &f^2\mu_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2\Big(\nu_{uu} + (\lambda_1)_{uv} + (\lambda_1)_u(\ln f^2)_v + \lambda_1(\ln f^2)_{uv}\Big) + \\ &+\nu\Big(\nu_{uv} + (\lambda_1)_{vv} + (\lambda_1)_v(\ln f^2)_v + \lambda_1(\ln f^2)_{vv}\Big) - \\ &-\Big(\nu_u + (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v\Big)\Big(\lambda_2(\ln|\mu_1|)_u + \nu_v - \nu(\ln|\mu_1|)_v - \nu(\ln|\lambda_2|)_v\Big) = 0. \end{aligned}$$

Нека $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$ *е псевдо-ортонормиран репер в точка* $p_0 \in \mathbb{R}^4_1$. *Тогава, съществува подобласт* $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ *и единствена времеподобна повърхнина от втори тип* $M^2 : z = z(u,v),\ (u,v) \in \mathcal{D}_0$, *параметризирана спрямо изотропни параметри, такава, че* M^2 *минава през* p_0 *и* $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$ *е геометричният репер на* M^2 *в точката* p_0.

Времеподобните повърхнини от *трети тип* се характеризират с $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$, $\lambda_2 = 0$ и се определят от 3 функции $f(u,v) > 0$, $\lambda_1(u,v)$, $\mu_1(u,v)$, удовлетворяващи система от 3 частни диференциални уравнения. Фундаменталната теорема за времеподобни повърхнини от трети тип е:

Теорема 1.4.17. *Нека $f(u,v) > 0$, $\lambda_1(u,v)$ и $\mu_1(u,v)$ са три гладки функции, дефинирани в област $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяващи условията*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \left(f^{-2}\left(\ln f^2\right)_{uv}\right)_v = 0;\\
&(ii) \quad (\lambda_1)_v + \lambda_1(\ln f^2)_v + \left(f^{-1}\sqrt{(\ln f^2)_{uv}}\right)_u = 0;\\
&(iii) \quad (\mu_1)_{vv} + (\mu_1)_v(\ln f^2)_v + \mu_1(\ln f^2)_{vv} = 0.
\end{aligned}$$

Нека $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$ е псевдо-ортонормиран репер в точка $p_0 \in \mathbb{R}^4_1$. Тогава, съществува подобласт $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и единствена времеподобна повърхнина от трети тип $M^2 : z = z(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}_0$, параметризирана спрямо изотропни параметри, такава, че M^2 минава през p_0 и $\{x_0, y_0, (n_1)_0, (n_2)_0\}$ е геометричният репер на M^2 в точка p_0.

1.5 Времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

В този параграф разглеждаме времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, т.е. повърхнини, за които е изпълнено $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $\nu \neq \text{const}$. За този клас повърхнини извеждаме деривационни формули от тип формули на Френе и получаваме условията за интегруемост.

Времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина се делят на два основни подкласа:

- повърхнини, за които $K - H^2 \neq 0$ в подобласт,
- повърхнини, за които $K - H^2 = 0$ в подобласт,

където K е Гаусовата кривина, а H е векторното поле на средната кривина. И за двата класа повърхнини можем да въведем специални изотропни параметри (наречени канонични), които ни позволяват да редуцираме броя на функциите и броя на диференциалните уравнения, определящи повърхнините с точност до движение в $\mathbb{R}^4_1$. Доказваме фундаментални теореми за съществуване и единственост на езика на каноничните параметри за двата класа времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

1.5.1 Повърхнини, удовлетворяващи $K - H^2 \neq 0$

В този случай е в сила $\mu_1\mu_2 \neq 0$. За този клас повърхнини въвеждаме специални изотропни параметри, които наричаме *канонични*, чрез следната дефиниция:

Дефиниция 1.5.2. Нека M^2 е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина и $K - H^2 \neq 0$. Изотропните параметри (u, v) се наричат *канонични*, ако метричната функция f се представя чрез формулата:

$$f(u,v) = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}}, \quad \mu \neq 0.$$

В сила е следното твърдение.

Твърдение 1.5.3. *Всяка времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за която $K - H^2 \neq 0$, локално може да се параметризира спрямо канонични параметри.*

След извеждане на деривационните формули спрямо канонични параметри и използване на получените от тях условия за интегруемост, доказваме, че всяка времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за която $K - H^2 \neq 0$, се определя от 3 функции $\lambda(u, v)$, $\mu(u, v)$ и $\nu(u, v)$, удовлетворяващи система от 3 частни диференциални уравнения.

1.5.2 Повърхнини, удовлетворяващи $K - H^2 = 0$

В този случай имаме $\mu_1\mu_2 = 0$. По аналогичен начин въвеждаме канонични параметри за този клас повърхнини и доказваме, че:

Твърдение 1.5.5. *Всяка времеподобна повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за която $K - H^2 = 0$, локално може да се параметризира спрямо канонични параметри.*

След извеждане на деривационните формули и условията за интегруемост, получаваме, че повърхнината е определена от 3 функции $\lambda(u, v)$, $\mu(u, v)$ и $\nu(u)$, удовлетворяващи система от 2 частни диференциални уравнения.

1.5.3 Фундаментални теореми за времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

В този параграф обобщаваме получените резултати от §1.5.1 и §1.5.2 като доказваме фундаменталните теореми за съществуване и единственост на времеподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, параметризирани спрямо канонични параметри.

В случая, когато $K - H^2 \neq 0$, фундаменталната теорема гласи:

Теорема 1.5.6. *Нека $\lambda(u,v)$, $\mu(u,v)$ и $\nu(u,v)$ са гладки функции, $\mu \neq 0$, $\nu \neq \mathrm{const}$, дефинирани в област $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, и удовлетворяващи условията*

$$\begin{aligned}
&\nu_u + \lambda_v = \lambda(\ln|\mu|)_v;\\
&\lambda_u - \varepsilon\nu_v = \lambda(\ln|\mu|)_u;\\
&|\mu|\,(\ln|\mu|)_{uv} = -\nu^2 - \varepsilon(\lambda^2 + \mu^2),
\end{aligned}$$

където $\varepsilon = \pm 1$. Нека $\{x_0,\, y_0,\, (n_1)_0,\, (n_2)_0\}$ е псевдо-ортонормиран репер в точка $p_0 \in \mathbb{R}^4_1$. Тогава, съществува подобласт $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и единствена времеподобна повърхнина $M^2 : z = z(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}_0$ с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, такава, че M^2 минава през p_0, $\{x_0,\, y_0,\, (n_1)_0,\, (n_2)_0\}$ е геометричният репер на M^2 в точката p_0, функциите $\lambda(u,v)$, $\mu(u,v)$, $\nu(u,v)$ са геометричните функции на повърхнината и $K - H^2 > 0$ при $\varepsilon = 1$, съответно $K - H^2 < 0$ при $\varepsilon = -1$. При това, (u,v) са канонични изотропни параметри на M^2.

В случая, когато $K - H^2 \neq 0$, фундаменталната теорема е:

Теорема 1.5.7. *Нека $\lambda(u,v)$, $\mu(u,v)$ и $\nu(u)$ са гладки функции, $\mu \neq 0$, $\nu \neq \mathrm{const}$, дефинирани в област $\mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, и удовлетворяващи условията*

$$\begin{aligned}
&\nu_u + \lambda_v = \lambda(\ln|\mu|)_v;\\
&|\mu|\,(\ln|\mu|)_{uv} = -\nu^2.
\end{aligned}$$

Нека $\{x_0,\, y_0,\, (n_1)_0,\, (n_2)_0\}$ е псевдо-ортонормиран репер в точка $p_0 \in \mathbb{R}^4_1$. Тогава, съществува подобласт $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и единствена времеподобна повърхнина $M^2 : z = z(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{D}_0$ с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, такава че M^2 минава през p_0, $\{x_0,\, y_0,\, (n_1)_0,\, (n_2)_0\}$ е геометричният репер на M^2 в точката p_0, функциите $\lambda(u,v)$, $\mu(u,v)$, $\nu(u)$ са геометричните функции на повърхнината и $K - H^2 = 0$. При това, (u,v) са канонични изотропни параметри на M^2.

С тези теореми показваме, че за класа на времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в $\mathbb{R}^4_1$ можем да редуцираме броя на функциите и броя на частните диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение в $\mathbb{R}^4_1$.

Забележка. За времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина можем да разгледаме също и канонични неизотропни параметри, които в случая $K - H^2 > 0$ имат същия геометричен смисъл като каноничните параметри на пространственоподобни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина в пространствата $\mathbb{R}^4_1$ и $\mathbb{R}^4$.

Глава 2. Времеподобни повърхнини от ротационен тип

Във втора глава прилагаме разработената локална теория за времеподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ като конструираме два големи класа повърхнини, единият от които допуска параметризация спрямо главни линии, а другият не допуска такава параметризация и при него използваме изотропни параметри.

Първият клас са обобщени ротационни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$. При тях изображението на Вайнгартен е диагонализируемо и прилагаме разработената в §1.4.1 теория.

Вторият клас са специални повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$, които представляват 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина. За този клас повърхнини изображението на Вайнгартен е недиагонализируемо и за тях прилагаме теорията, разработена в §1.4.2 и §1.4.3.

2.1. Времеподобни обобщени ротационни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$

По аналогия с обобщените ротационни повърхнини в Евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ разглеждаме времеподобни обобщени ротационни повърхнини в пространството на Минковски $\mathbb{R}^4_1$ като изучаваме два типа такива повърхнини – с времеподобна и с пространственоподобна меридианна крива. За тези повърхнини изображението на Вайнгартен е диагонализируемо и ги изучаваме параметризирани спрямо главните направления.

2.1.1 Обобщени ротационни повърхнини от първи тип

Нека $\mathcal{M}_1$ е повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$, параметризирана по следния начин:

$$\mathcal{M}_1 : z(u,v) = (f(u)\cos\alpha v, f(u)\sin\alpha v, g(u)\sinh\beta v, g(u)\cosh\beta v)\,,$$

където $u \in J \subset \mathbb{R}$, $v \in [0; 2\pi)$, $f(u)$ и $g(u)$ са гладки функции, удовлетворяващи условията $f(u)g'(u) - g(u)f'(u) \neq 0$, $f'^{\,2}(u) - g'^{\,2}(u) < 0$, $\alpha^2 f^2(u) + \beta^2 g^2(u) > 0$, и α, β са положителни константи. $\mathcal{M}_1$ е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$, която наричаме *времеподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип*. Нейната меридианна крива $c : x(u) = (f(u), 0, 0, g(u))$ е времеподобна.

Основните инварианти на повърхнината се изразяват чрез функциите $f(u)$ и

$g(u)$ по следните формули:

$$\varkappa = \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)\Big[(f'^{\,2} - g'^{\,2})(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g) + (f''g' - f'g'')(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\Big]}{(f'^{\,2} - g'^{\,2})^2(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)^2};$$

$$k = \frac{4\alpha^2\beta^2(f''g' - f'g'')(fg' - f'g)^2(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)}{(f'^{\,2} - g'^{\,2})^3(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)^3};$$

$$K = \frac{(f''g' - f'g'')\,(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)\,(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2) - \alpha^2\beta^2\,(fg' - f'g)^2\,(f'^{\,2} - g'^{\,2})}{(f'^{\,2} - g'^{\,2})^2(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)^2};$$

$$H = \frac{(f'g'' - f''g')\,(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2) + (\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)\,(f'^{\,2} - g'^{\,2})}{2(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)(\sqrt{g'^{\,2} - f'^{\,2}})^3}\, n_2,$$

където n_2 е единично нормално векторно поле.

За този клас повърхнини показваме, че $\varkappa^2 - k > 0$, което означава, че повърхнината може да се параметризира спрямо главни линии. Въвеждаме геометричен репер $\{X, Y, N_1, N_2\}$, определен от главните направления и векторното поле на средната кривина H, и намираме осемте функции $\gamma_1, \gamma_2, \nu_1, \nu_2, \lambda, \mu, \beta_1, \beta_2$ от фундаменталната теорема. Те се изразяват чрез функциите $f(u)$ и $g(u)$ по следните формули:

$$\gamma_1 = 0; \qquad \gamma_2 = \frac{-(\alpha^2 ff' + \beta^2 gg')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}};$$

$$\nu_1 = \frac{f''g' - f'g''}{(\sqrt{g'^2 - f'^2})^3}; \qquad \nu_2 = \frac{-(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)(\sqrt{g'^2 - f'^2})};$$

$$\lambda = 0; \qquad \mu = \frac{\alpha\beta(fg' - gf')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}};$$

$$\beta_1 = 0; \qquad \beta_2 = \frac{\alpha\beta(gg' - ff')}{(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2)\sqrt{g'^2 - f'^2}}.$$

2.1.2 Обобщени ротационни повърхнини от втори тип

В този параграф разглеждаме класа на времеподобните обобщени ротационни повърхнини с пространственоподобна меридианна крива. Нека $\mathcal{M}_2$ е повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$, параметризирана чрез

$$\mathcal{M}_2 : z(u,v) = (f(u)\cos\alpha v, f(u)\sin\alpha v, g(u)\cosh\beta v, g(u)\sinh\beta v)\,,$$

където $u \in J$, $v \in [0; 2\pi)$, $f(u)$ и $g(u)$ са гладки функции, удовлетворяващи неравенствата $f(u)g'(u) - g(u)f'(u) \neq 0$, $\alpha^2 f^2(u) - \beta^2 g^2(u) < 0$, $f'^{\,2}(u) + g'^{\,2}(u) > 0$, и α, β са положителни константи. $\mathcal{M}_2$ е времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$ като в този случай меридианната крива $c : x(u) = (f(u), 0, 0, g(u))$ е пространственоподобна. Повърхнината

$\mathcal{M}_2$ наричаме *времеподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип.*

Основните инварианти на повърхнината се изразяват чрез функциите $f(u)$ и $g(u)$ по следните формули:

$$k = \frac{4\alpha^2\beta^2(f''g' - f'g'')(f'g - fg')^2(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)}{(f'^{\,2} + g'^{\,2})^3(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)^3},$$

$$\varkappa = \frac{\alpha\beta(fg' - f'g)\Big[(f'^{\,2} + g'^{\,2})(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g) + (f''g' - f'g'')(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\Big]}{(f'^{\,2} + g'^{\,2})^2(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)^2},$$

$$K = \frac{\alpha^2\beta^2\,(f'g - fg')^2\,(f'^{\,2} + g'^{\,2}) - (f''g' - f'g'')(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\left(\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g\right)}{(f'^{\,2} + g'^{\,2})^2(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)^2},$$

$$H = \frac{(f'g'' - f''g')\,(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2) + (\alpha^2 fg' + \beta^2 f'g)\,(f'^{\,2} + g'^{\,2})}{2(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)(\sqrt{g'^{\,2} + f'^{\,2}})^3}\,n_1,$$

където n_1 е единично нормално векторно поле.

За функциите γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2, определени от геометричния репер $\{X, Y, N_1, N_2\}$ на повърхнината $\mathcal{M}_2$, получаваме, че се изразяват чрез функциите $f(u)$ и $g(u)$ по следния начин:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = 0; && \gamma_2 = \frac{(\alpha^2 ff' - \beta^2 gg')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}};\\
&\nu_1 = \frac{f''g' - f'g''}{(\sqrt{f'^2 + g'^2})^3}; && \nu_2 = \frac{(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)(\sqrt{f'^2 + g'^2})};\\
&\lambda = 0; && \mu = \frac{-\alpha\beta(f'g - fg')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}};\\
&\beta_1 = 0; && \beta_2 = \frac{-\alpha\beta(gg' + ff')}{(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2)\sqrt{f'^2 + g'^2}}.
\end{aligned}$$

Да отбележим, че инвариантата λ за времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип е нула, с което се характеризират Chen-повърхнините. Следователно, е в сила следната теорема.

Теорема 2.1.1. *Времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип без минимални точки в $\mathbb{R}^4_1$ са нетривиални Chen-повърхнини.*

В следващите параграфи описваме някои основни класове времеподобни обобщени ротационни повърхнини, зададени с условия върху Гаусовата кривина, нормалната кривина или векторното поле на средната кривина.

2.1.3 Плоски времеподобни обобщени ротационни повърхнини

В този параграф разглеждаме класа на плоските времеподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип. Описваме ги аналитично чрез следната теорема.

Теорема 2.1.2. *(i) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип е плоска тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез* $c : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$, *където* $f(u)$ *е решение на следното диференциално уравнение:*

$$\left(\ln\left|\frac{1+f'}{1-f'}\right|\right)' = \frac{-2\alpha^2\beta^2\,(f-uf')^2}{(\alpha^2 f+\beta^2 uf')\,(\alpha^2 f^2+\beta^2 u^2)}.$$

(ii) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип е плоска тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез $c : x(u) = (f(u), 0, u, 0)$, *където* $f(u)$ *е решение на следното диференциално уравнение:*

$$(\arctan f')' = \frac{\alpha^2\beta^2\,(uf'-f)^2}{(\alpha^2 f^2-\beta^2 u^2)\,(\alpha^2 f+\beta^2 uf')}.$$

2.1.4 Времеподобни обобщени ротационни повърхнини с плоска нормална свързаност

В този параграф описваме аналитично времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с плоска нормална свързаност. Резултатът е даден в следната теорема.

Теорема 2.1.3. *(i) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип има плоска нормална свързаност тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез* $c : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$, *където* $f(u)$ *е решение на следното диференциално уравнение:*

$$\left(\ln\left|\frac{1+f'}{1-f'}\right|\right)' = \frac{2(\alpha^2 f+\beta^2 uf')}{\alpha^2 f^2+\beta^2 u^2}.$$

(ii) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип има плоска нормална свързаност тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез $c : x(u) = (f(u), 0, u, 0)$, *където* $f(u)$ *е*

решение на следното диференциално уравнение:

$$(\arctan f')' = \frac{\alpha^2 f + \beta^2 u f'}{\beta^2 u^2 - \alpha^2 f^2}.$$

2.1.5 Времеподобни обобщени ротационни повърхнини, състоящи се от параболични точки

Разглеждаме времеподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип, състоящи се от параболични точки. За този клас повърхнини е в сила $k = 0$, където k е инвариантата от изображението на Вайнгартен. В следващата теорема описваме аналитично този клас повърхнини.

Теорема 2.1.4. *Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от първи или втори тип се състои от параболични точки, тогава и само тогава, когато е изпълнено едно от следните условия:*

(i) повърхнината е развиваема праволинейна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$;

(ii) повърхнината е неразвиваема праволинейна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$;

(iii) повърхнината е неправолинейна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$, чиято меридианна крива е зададена чрез $g = Cu^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$, където $C = \mathrm{const} \neq 0$.

2.1.6 Минимални времеподобни обобщени ротационни повърхнини

В този параграф разглеждаме минималните времеподобни обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип. В следващата теорема даваме експлицитния им вид.

Теорема 2.1.5. *(i) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип е минимална тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез $c : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$, където функцията $f(u)$ се задава с формулата*

$$f = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} \sin\left(\varepsilon \frac{\alpha}{\beta} \ln\left|\beta u + \sqrt{A + \beta^2 u^2}\right| + C\right);\ A = \mathrm{const},\ C = \mathrm{const},\ \varepsilon = \pm 1.$$

(ii) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип е минимална тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез $c : x(u) = (f(u), 0, u, 0)$, където функцията $f(u)$ се задава с

формулата

$$f=\frac{\sqrt{A}}{\alpha}\sin\left(\varepsilon\frac{\alpha}{\beta}\ln\left|\beta u+\sqrt{\beta^2u^2-A}\right|+C\right);\ A=\mathrm{const},\ C=\mathrm{const},\ \varepsilon=\pm 1.$$

2.1.7 Времеподобни обобщени ротационни повърхнини с постоянно векторно поле на средната кривина

Изследваме времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с постоянно векторно поле на средната кривина, т.е. $\langle H,H\rangle=\mathrm{const}\neq 0$ и даваме аналитичното описание на този клас повърхнини в следващата теорема.

Теорема 2.1.6. *(i) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип е с постоянно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез* $c: x(u)=(f(u),0,0,u)$, *където* $f(u)$ *е решение на следното диференциално уравнение:*

$$\left(\ln\left|\frac{1+f'}{1-f'}\right|\right)'=\frac{-2(\alpha^2 f+\beta^2 uf')}{(\alpha^2f^2+\beta^2u^2)}+2\,C\sqrt{1-f'^2},\ C=\mathrm{const}\neq 0.$$

(ii) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип е с постоянно векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез $c: x(u)=(f(u),0,u,0)$, *където* $f(u)$ *е решение на следното диференциално уравнение:*

$$(\arctan f')'=\frac{(\alpha^2 f+\beta^2 uf')}{(\alpha^2f^2-\beta^2u^2)}+C\sqrt{1+f'^2},\ C=\mathrm{const}\neq 0.$$

2.1.8 Времеподобни обобщени ротационни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина

В този параграф описваме аналитично времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина чрез следната теорема.

Теорема 2.1.7. *(i) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от първи тип има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез* $c: x(u)=(f(u),0,0,u)$, *където*

$$f(u)=\pm\sqrt{u^2+C^2};\quad C=\mathrm{const}\neq 0.$$

(ii) Времеподобна обобщена ротационна повърхнина от втори тип има паралелно нормирано векторно поле на средната кривина тогава и само тогава, когато, с точност до параметризация, меридианната ѝ крива е определена чрез $c : x(u) = (f(u), 0, 0, u)$, *където*

$$f(u) = \pm\sqrt{C^2 - u^2}; \quad u \in (-C, C); \quad C = \text{const} \neq 0.$$

2.2 Времеподобни меридианни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$

2.2.1 Меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина с времеподобна ос

Нека $f = f(u)$ и $g = g(u)$ са гладки функции, дефинирани в интервал $I \subset \mathbb{R}$, такива, че $\dot{f}^2(u) - \dot{g}^2(u) < 0, \ u \in I$. Ротационната хиперповърхнина в $\mathbb{R}^4_1$, получена при ротация на кривата $m : u \to (f(u), g(u))$ около времеподобната ос Oe_4, има следната параметризация:

$$\mathcal{M}' : Z(u, w^1, w^2) = f(u)\, \cos w^1 \cos w^2\, e_1 + f(u)\, \cos w^1 \sin w^2\, e_2 + f(u)\, \sin w^1\, e_3 + g(u)\, e_4.$$

Хиперовърхнината $\mathcal{M}'$ е 2-параметрична система от меридиани.

Ако означим $l(w^1, w^2) = \cos w^1 \cos w^2\, e_1 + \cos w^1 \sin w^2\, e_2 + \sin w^1\, e_3$, то параметризацията на $\mathcal{M}'$ може да се запише така:

$$\mathcal{M}' : Z(u, w^1, w^2) = f(u)\, l(w^1, w^2) + g(u)\, e_4, \quad u \in I,\ v \in J.$$

Да отбележим, че $l = l(w^1, w^2)$ е радиус-векторът на 2-мерната сфера $S^2(1)$ с център O, лежаща в 3-мерното Евклидово пространство $\mathbb{R}^3 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$.

Нека $w^1 = w^1(v),\ w^2 = w^2(v),\ v \in J,\ J \subset \mathbb{R}$. Тогава,

$$c : l = l(v) = l(w^1(v), w^2(v))$$

е гладка крива върху двумерната сфера $S^2(1)$. Разглеждаме 2-мерна повърхнина $\mathcal{M}'_m$, лежаща върху ротационната хиперповърхнина $\mathcal{M}'$ и зададена по следния начин:

$$\mathcal{M}'_m : z(u, v) = Z(u, w^1(v), w^2(v)), \quad u \in I,\ v \in J.$$

Параметризацията на $\mathcal{M}'_m$ може да се запише също във вида:

$$\mathcal{M}'_m : z(u, v) = f(u)\, l(v) + g(u)\, e_4, \quad u \in I,\ v \in J.$$

$\mathcal{M}'_m$ е 1-параметрична система от меридиани на $\mathcal{M}'$. Ще наричаме $\mathcal{M}'_m$ времеподобна *меридианна повърхнина от елиптичен тип.*

За този клас повърхнини получаваме, че нормалната кривина $\varkappa$ и функцията k имат вида:

$$k = \frac{\kappa_m^2 \kappa^2}{f^2}; \qquad \varkappa = 0,$$

където κ_m е кривината на меридианната крива m, а κ е сферичната кривина на кривата c. От това, че $\varkappa = 0$, можем да формулираме следното твърдение:

Твърдение 2.2.2. *Времеподобната меридианна повърхнина $\mathcal{M}'_m$ от елиптичен тип, дефинирана чрез $\mathcal{M}'_m : z(u,v) = f(u)\, l(v) + g(u)\, e_4,\ u \in I,\ v \in J$, е повърхнина с плоска нормална свързаност.*

Можем да разграничим следните три основни случая на меридианни повърхнини от елиптичен тип:

I. $\kappa(v) = 0$, т.е. сферичната крива c върху сферата $S^2(1)$ е голяма окръжност. В този случай, векторното поле n_1 е постоянно и повърхнината $\mathcal{M}'_m$ лежи в хиперравнината $\mathbb{R}^3_1 = \{x, y, n_2\}$ на $\mathbb{R}^4_1$.

II. $\kappa_m = 0$, т.е. меридианната крива m е част от права. В този случай $k = \varkappa = 0$. Може да се пресметне, че и Гаусовата кривина е $K = 0$, откъдето следва, че $\mathcal{M}'_m$ е развиваема праволинейна повърхнина.

III. $\kappa\, \kappa_m \neq 0$, т.е. кривата c, лежаща върху сферата $S^2(1)$, не е голяма окръжност и меридианната крива m не е права линия.

В първите два случая повърхнината $\mathcal{M}'_m$ се състои само от инфлексни точки. По нататък ще разглеждаме общия (третия) случай, т.е. считаме, че е изпълнено $\kappa \neq 0$ и $\kappa_m \neq 0$.

За времеподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип е в сила неравенството $\varkappa^2 - k < 0$, откъдето следва, че изображението на Вайнгартен е недиагонализируемо, т.е. не съществуват главни линии на повърхнината $\mathcal{M}'_m$. Затова въвеждаме изотропни параметри за този клас повърхнини и намираме геометричен псевдо-ортонормиран репер на повърхнината, определен от изотропните направления и векторното поле на средната кривина. Пресмятаме деривационните формули спрямо изотропните параметри, от където намираме функциите γ_1, γ_2, ν, μ_1, μ_2, λ_1, λ_2, β_1, β_2, изразени чрез функциите, задаващи меридианната крива m, и сферичната кривина на сферичната крива c, задаваща ротационната хиперповърхнина.

В частния случай, когато $1+\dot f^2+f\ddot f=0$, т.е. меридианната крива m се задава с функциите

$$f(u)=\pm\sqrt{-u^2+2au+b},\quad a=\mathrm{const},\ b=\mathrm{const};$$
$$g(u)=\pm\sqrt{a^2+b}\ \arcsin\frac{u-a}{\sqrt{a^2+b}}+c,\quad c=\mathrm{const},$$

геометричните функции на повърхнината са:

$$\gamma_1=-\gamma_2=-\frac{\dot f}{\sqrt2 f}=\frac{u-a}{\sqrt2(-u^2+2au+b)};$$
$$\nu=\lambda_1=\lambda_2=\frac{\kappa}{2f}=\frac{\pm\kappa}{2\sqrt{-u^2+2au+b}};$$
$$\mu_1=\mu_2=-\frac{\sqrt{\dot f^2+1}}{f}=\frac{-\sqrt{a^2+b}}{-u^2+2au+b};$$
$$\beta_1=\beta_2=0.$$

В общия случай, когато $1+\dot f^2+f\ddot f\neq0$, геометричните функции на повърхнината се изразяват чрез формулите:

$$\gamma_1=-\gamma_2=-\frac{\dot f}{\sqrt2 f};$$
$$\nu=\frac{\sqrt{\kappa^2(\dot f^2+1)+(1+\dot f^2+f\ddot f)^2}}{2f\sqrt{\dot f^2+1}};$$
$$\mu_1=\mu_2=\frac{\kappa\ddot f}{\sqrt{\kappa^2(\dot f^2+1)+(1+\dot f^2+f\ddot f)^2}};$$
$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{\kappa^2(\dot f^2+1)+(1+\dot f^2)^2-f^2\ddot f^2}{2f\sqrt{\dot f^2+1}\sqrt{\kappa^2(\dot f^2+1)+(1+\dot f^2+f\ddot f)^2}};$$
$$\beta_1=\frac{\kappa\Big(\dot f\ddot f(f\ddot f-2\dot f^2-2)-f\dddot f(\dot f^2+1)\Big)+\kappa'(\dot f^2+1)(1+\dot f^2+f\ddot f)}{\sqrt2\sqrt{\dot f^2+1}\Big(\kappa^2(\dot f^2+1)+(1+\dot f^2+f\ddot f)^2\Big)};$$
$$\beta_2=\frac{\kappa\Big(\dot f\ddot f(f\ddot f-2\dot f^2-2)-f\dddot f(\dot f^2+1)\Big)-\kappa'(\dot f^2+1)(1+\dot f^2+f\ddot f)}{\sqrt2\sqrt{\dot f^2+1}\Big(\kappa^2(\dot f^2+1)+(1+\dot f^2+f\ddot f)^2\Big)}.$$

2.2.2 Времеподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна Гаусова кривина

В този параграф класифицираме времеподобните меридианните повърхнини от елиптичен тип, за които Гаусовата кривина е константа. За времеподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип получаваме, че Гаусовата кривина K се изразява по формулата:

$$K = \frac{\ddot{f}(u)}{f(u)}.$$

В следващите теореми даваме експлицитно представяне на плоските меридианни повърхнини от елиптичен тип и на меридианните повърхнини с ненулева постоянна Гаусова кривина.

Теорема 2.2.4. *Нека $\mathcal{M}'_m$ е времеподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип, дефинирана чрез $\mathcal{M}'_m : z(u,v) = f(u)\, l(v) + g(u)\, e_4,\ u \in I,\ v \in J$. Тогава, $\mathcal{M}'_m$ е плоска повърхнина тогава и само тогава, когато меридианната крива m се задава с функциите:*

$$f(u) = a\,u + b; \quad a = \mathrm{const},\ b = \mathrm{const};$$
$$g(u) = \pm\sqrt{a^2+1}\,u + c_1; \quad c_1 = \mathrm{const}.$$

Теорема 2.2.5. *Нека $\mathcal{M}'_m$ е времеподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип, дефинирана чрез $\mathcal{M}'_m : z(u,v) = f(u)\, l(v) + g(u)\, e_4,\ u \in I,\ v \in J$. Тогава, $\mathcal{M}'_m$ има постоянна ненулева Гаусова кривина K тогава и само тогава, когато меридианната крива m се задава чрез:*

$$f(u) = a_1 \cos\sqrt{-K}\,u + a_2 \sin\sqrt{-K}\,u, \ \text{при } K < 0;$$
$$f(u) = a_1 \cosh\sqrt{K}\,u + a_2 \sinh\sqrt{K}\,u, \ \text{при } K > 0,$$

където a_1 и a_2 са константи, а функцията $g(u)$ се определя от $\dot{g}(u) = \sqrt{\dot{f}^2(u) + 1}$.

2.2.3 Времеподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна средна кривина

В този параграф разглеждаме времеподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна средна кривина, т.е. $\langle H, H \rangle = \mathrm{const} \neq 0$. Получените резултати са дадени в следната теорема.

Теорема 2.2.6. *Нека $\mathcal{M}'_m$ е времеподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип, дефинирана с $\mathcal{M}'_m : z(u,v) = f(u)\, l(v) + g(u)\, e_4,\ u \in I,\ v \in J$. Тогава, $\mathcal{M}'_m$ има* *постоянна средна кривина, т.е.* $||H|| = a = \mathrm{const}, a \neq 0$*, тогава и само тогава, когато кривата c върху $S^2(1)$ има постоянна сферична кривина* $\varkappa = \mathrm{const} = b, b \neq 0$ *и меридианната крива m се задава, чрез $\dot{f} = \varphi(f)$, където*

$$\varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{t^2}\left(C \pm \frac{t}{2}\sqrt{4a^2t^2 - b^2} \mp \frac{b^2}{4a}\ln|2at + \sqrt{4a^2t^2 - b^2}|\right)^2 - 1}, \quad C = \mathrm{const},$$

а функцията $g(u)$ е дефинирана чрез $\dot{g} = \sqrt{\dot{f}^2 + 1}$.

2.2.4 Времеподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна инварианта k

Нека $\mathcal{M}'_m$ е времеподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип. За инвариантата k, определена от изображението на Вайнгартен γ, имаме следната формула

$$k = \frac{\varkappa_m^2 \varkappa^2}{f^2},$$

където $\varkappa_m$ се изразява чрез функцията f по формулата: $\varkappa_m = -\dfrac{\ddot{f}}{\sqrt{\dot{f}^2 + 1}}$.

В следващата теорема описваме класа от времеподобните меридианни повърхнини от елиптичен тип с постоянна инварианта k.

Теорема 2.2.7. *Нека $\mathcal{M}'_m$ е времеподобна меридианна повърхнина от елиптичен тип, дефинирана с $\mathcal{M}'_m : z(u,v) = f(u)\,l(v) + g(u)\,e_4$, $u \in I$, $v \in J$. Тогава, $\mathcal{M}'_m$ е с постоянна инварианта $k = \mathrm{const} = a^2$, $a \neq 0$ тогава и само тогава, когато кривата c върху $S^2(1)$ има постоянна сферична кривина $\varkappa = \mathrm{const} = b$, $b \neq 0$ и меридианната крива m е определена чрез $\dot{f} = \varphi(f)$, където*

$$\varphi(t) = \pm\sqrt{\left(\frac{at^2}{2b} + C\right)^2 - 1}, \quad C = \mathrm{const},$$

а функцията g е определена чрез $\dot{g} = \sqrt{\dot{f}^2 + 1}$.

По аналогичен начин могат да се разгледат и други класове времеподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип: например, с паралелно векторно поле на средната кривина, с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина и др. Те се описват чрез решаване на съответни диференциални уравнения за функцията $f(u)$, определяща меридианната крива.

Могат да се разгледат и времеподобни меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина с пространственоподобна ос или със светлинноподобна ос. За конструирането на меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина с пространственоподобна ос трябва да се използва 2-мерна хиперболична сфера в 3-мерно пространство на Минковски. За конструиране на меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина със светлинноподобна ос се използва 2-мерен параболоид, лежащ в светлинноподобна хиперравнина на $\mathbb{R}^4_1$.

Предвиждаме тези и други отворени въпроси да бъдат разгледани в нашата бъдеща работа.

Статии по дисертацията

Резултатите, представени в дисертацията, са публикувани в следните статии:

- Bencheva V., Milousheva, V., *Basic Classes of Timelike General Rotational Surfaces in the Four-dimensional Minkowski Space*, Filomat, Vol. **37**, no. 25 (2023), 8505–8519, ISSN: 0354-5180 (Print), ISSN: 2406-0933 (Online), **IF: 0.8, (Q2)**, https://doi.org/10.2298/FIL2325505B.
- Bencheva V., Milousheva, V., *Timelike Surfaces with Parallel Normalized Mean Curvature Vector Field*, Turkish Journal of Mathematics (2024), Vol. **48**: no. 2, Article 15, ISSN:1300-0098, **IF: 1.0 (Q2)**, https://doi.org/10.55730/1300-0098.3509.
- Bencheva V., Milousheva, V., *Fundamental Theorems for Timelike Surfaces in the Minkowski 4-Space*, C. R. Acad. Bulg. Sci., vol. **77**, no. 2 (2024), 167–178, ISSN: 1310–1331 (Print), 2367–5535 (Online), **IF: 0.3, (Q4)**, **SJR: 0.182 (Q3)**, https://doi.org/10.7546/CRABS.2024.02.01.

Авторска справка за приносите в дисертационния труд

По мнение на автора, основните приноси в дисертационния труд са:

1. За времеподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{R}^4_1$ е дефинирана втора основна форма и изображение от тип на Вайнгартен, което поражда инвариантите $\varkappa$ и k. Разгледани са два различни подхода, чрез които е разработена локална теория за времеподобни повърхнини в двата случая: когато изображението на Вайнгартен е диагонализируемо и когато не е диагонализируемо.

2. За класа на времеподобните повърхнини, за които $\varkappa^2 - k > 0$ (изображението на Вайнгартен е диагонализируемо) е разработена локална теория на базата на параметризация спрямо главните линии. Въведен е геометричен репер, намерени са

условията за интегруемост и е доказана фундаментална теорема за съществуване и единственост, която гласи, че повърхнината се определя еднозначно (с точност до движение в $\mathbb{R}^4_1$) от 8 функции, удовлетворяващи система от 6 частни диференциални уравнения.

3. За класа на времеподобните повърхнини, за които изображението от тип на Вайнгартен не е диагонализируемо, е разработена локална теория на базата на параметризация спрямо изотропните линии. Въведен е геометричен репер, намерени са условията за интегруемост и са доказани теореми за съществуване и единственост на времеподобни повърхнини от общ тип.

4. Въведени са канонични параметри за класа на времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, с помощта на които броят на функциите и броят на частните диференциални уравнения, определящи еднозначно повърхнината, е редуциран до три.

5. Разгледани са два типа времеподобни обобщени ротационни повърхнини като клас повърхнини, за които изображението на Вайнгартен е диагонализируемо. Намерени са основните инварианти на тези повърхнини и са описани аналитично различни класове обобщени ротационни повърхнини: плоски, с плоска нормална свързаност, минимални, с постоянно векторно поле на средната кривина, с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

6. Конструирани са т. нар. меридианни повърхнини от елиптичен тип като клас повърхнини, за които изображението на Вайнгартен е недиагонализируемо, и са въведени изотропни параметри, чрез които са изразени основните инварианти на тези повърхнини. Разгледани са и са описани аналитично различни класове времеподобни меридианни повърхнини от елиптичен тип: с постоянна Гаусова кривина, с постоянна средна кривина, с постоянна инварианта k.

Благодарности

Искам да изкажа най-искрените си благодарности на научния си ръководител **проф. Величка Милушева**, която бе неотлъчно до мен, подкрепяше ме и ми даваше множество ценни съвети и насоки при разработването и оформянето на дисертационния труд.

Искам да благодаря и на втория си научен ръководител **доц. д-р Милен Христов**, който ме насочи към диференциалната геометрия и ми даваше ценни напътствия и консултации.

И също така, искам да изкажа най-сърдечни благодарности към семейството ми, което вярва в мен и успехите ми, и ме подкрепя безусловно.

Библиография

[1] Aleksieva Y., Turgay N.-C., Milousheva V., *General rotational surfaces in pseudo-Euclidean 4-space with neutral metric*. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society **41**, no. 4 (2018), 1773–1793.

[2] Alías L., Palmer B., *Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorenzian space forms*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124** (1998), 315–327.

[3] Bektas B., Dursun U., *Timelike rotational surfaces of elliptic, hyperbolic and parabolic types in Minkowski space $\mathbb{E}^4_1$ with pointwise 1-type Gauss map*. Filomat 29:3 (2015), 381–392.

[4] Brander D., *Singularities of spacelike constant mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski space*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **150** (2011), 527–556.

[5] Burstin C., Mayer W., *Über affine Geometrie XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinen R_4*. Math. Z. **26** (1927), 373–407.

[6] Chaves R., Cândido, C., *The Gauss map of spacelike rotational surfaces with constant mean curvature in the Lorentz-Minkowski space*. Differential geometry, Valencia, 2001, 106–114, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[7] Chen B.-Y., *Geometry of submanifolds*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[8] Chen B.-Y., *Surfaces with parallel normalized mean curvature vector*. Monatshefte fur Mathematik **90**, no. 3 (1980), 185–194.

[9] Chen B.-Y., *Classification of marginally trapped Lorentzian flat surfaces in $\mathbb{E}^4_2$ and its application to biharmonic surfaces*. J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), no. 2, 861–875.

[10] Chen B.-Y., *Classification of marginally trapped surfaces of constant curvature in Lorentzian complex plane*. Hokkaido Math. J., **38** (2009), no. 2, 361–408.

[11] Chen B.-Y., *Black holes, marginally trapped surfaces and quasi-minimal surfaces*. Tamkang J. Math. **40** (2009), no. 4, 313–341.

[12] Chen B.-Y., *Classification of spatial surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean spaces with arbitrary codimension*. J. Math. Phys. **50** (2009), 043503.

[13] Chen B.-Y., *Complete classification of spatial surfaces with parallel mean curvature vector in arbitrary non-flat pseudo-Riemannian space forms*. Cent. Eur. J. Math. **7** (2009), 400–428.

[14] Chen B.-Y., *Complete classification of parallel Lorentz surfaces in neutral pseudo hyperbolic 4-space*. Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), no. 4, 706–734.

[15] Chen B.-Y., *Complete classification of parallel Lorentz surfaces in four-dimensional neutral pseudosphere*. J. Math. Phys. **51** (2010), no. 8, 083518, 22 pp.

[16] Chen B.-Y., *Complete explicit classification of parallel Lorentz surfaces in arbitrary pseudo-Euclidean spaces*. J. Geom. Phys. **60** (2010), no. 10, 1333–1351.

[17] Chen B.-Y., *Complete classification of Lorentz surfaces with parallel mean curvature vector in arbitrary pseudo-Euclidean space*. Kyushu J. Math. **64** (2010), no. 2, 261–279.

[18] Chen B.-Y., *Submanifolds with parallel mean curvature vector in Riemannian and indefinite space forms*. Arab J. Math. Sci. **16** (2010), no. 1, 1–46.

[19] Chen B.-Y., *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.

[20] Chen B.-Y., *Classification of minimal Lorentz surfaces in indefinite space forms with arbitrary codimension and arbitrary index*. Publ. Math. Debrecen **78** (2011), 485–503.

[21] Chen B.-Y., Dillen F., Van der Veken J., *Complete classification of parallel Lorentzian surfaces in Lorentzian complex space norms*. Internat. J. Math. **21** (2010), no. 5, 665–686.

[22] Chen B.-Y., Garay O., *Classification of quasi-minimal surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean 4-space* $\mathbb{E}^4_2$. Result. Math. **55** (2009), no. 1-2, 23–38.

[23] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Complete classification of parallel surfaces in 4-dimensional Lorentzian space forms*. Tohoku Math. J. **61** (2009), no. 1, 1–40.

[24] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Marginally trapped surfaces in Lorenzian space with positive relative nullity*, Class. Quantum Grav. **24**, 551–563 (2007).

[25] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Spacial and Lorenzian surfaces in Robertson-Walker space-times*, J. Math. Phys. **48**, 073509, 12 pp, (2007).

[26] Chen B.-Y., Van der Veken J., *Classification of marginally trapped surfaces with parallel mean curvature vector in Lorenzian space forms*, Houston J. Math. **36**, 421–449 (2010).

[27] Chen B.-Y., Yang, D., *Addendum to "Classification of marginally trapped Lorentzian flat surfaces in $\mathbb{E}^4_2$ and its application to biharmonic surfaces"*. J. Math. Anal. Appl., **361** (2010), no. 1, 280–282.

[28] Cole F. N., *On rotations in space of four dimensions.* American Journal of Mathematics, **12**, no. 2 (1890), 191–210.

[29] Dursun U., *On spacelike rotational surfaces with pointwise 1-type Gauss map*. Bulletin of the Korean Mathematical Society 52, no. 1 (2015), 301–312.

[30] Eisenhart L., *Minimal surfaces in Euclidean four-space*. Amer. J. Math. **34** (1912), 215–236.

[31] Fu Y., Hou Z.-H., *Classification of Lorentzian surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-Euclidean spaces.* J. Math. Anal. Appl. **371** (2010), no. 1, 25–40.

[32] Ganchev G., Milousheva V., *On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space*, Kodai Math. J. **31** (2008), 183–198.

[33] Ganchev G., Milousheva V., *Invariants and Bonnet-type theorem for surfaces in* $\mathbb{R}^4$. Cent. Eur. J. Math. **8** (2010), no. 6, 993–1008.

[34] Ganchev G., Milousheva V., *Chen rotational surfaces of hyperbolic or elliptic type in the four-dimensional Minkowski space.* Comptes Rendus de L'Academie Bulgare des Sciences **64** (2011), 641–652.

[35] Ganchev G., Milousheva V., *An invariant theory of spacelike surfaces in the four-dimensional Minkowski space.* Mediterranean Journal of Mathematics **9** (2012), 267–294.

[36] Ganchev G., Milousheva V., *Timelike surfaces with zero mean curvature in Minkowski 4-space.* Israel J. Math. **196** (2013), 413–433.

[37] Ganchev G., Milousheva V., *An invariant theory of marginally trapped surfaces in the four-dimensional Minkowski space*, J. Math. Phys. **53**, 033705 (2012), DOI: 10.1063/1.3693976.

[38] Ganchev G., Milousheva V., *Special classes of meridian surfaces in the four-dimensional Euclidean space*, Bull. Korean Math. Soc. **52**, no. 6 (2015), 2035–2045.

[39] Ganchev G., Milousheva V., *Meridian surfaces of elliptic or hyperbolic type in the four-dimensional Minkowski space*, Math. Commun., **21**, no. 1 (2016), 1–21.

[40] G. Ganchev, V. Milousheva, *Meridian surfaces of parabolic type in the four-dimensional Minkowski space*, In: Geometry, Integrability and Quantization, I. Mladenov, G. Meng and A. Yoshioka (Eds), Avangard Prima, 2016, 243–255, DOI:10.7546/giq-17-2016-243-255.

[41] Ganchev G., Milousheva V., *Surfaces with parallel normalized mean curvature vector field in Euclidean or Minkowski 4-space*, Filomat **33**, no. 4 (2019), 1135–1145.

[42] Ganchev G., Milousheva V., *Quasi-minimal rotational surfaces in pseudo-Euclidean four-dimensional space.* Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), no. 10, 1586–1601.

[43] Ganchev G., Milousheva V., *General rotational surfaces in the four-dimensional Minkowski space.* Turkish Journal of Mathematics **38**, no. 5 (2014), 883–895.

[44] Haesen S., Ortega M., *Boost invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space.* Classical and Quantum Gravity **24** (2007), 5441–5452,

[45] Haesen S., Ortega M., *Marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space invariant under a rotational subgroup of the Lorentz group.* General Relativity and Gravitation **41** (2009), 1819–1834.

[46] Haesen S., Ortega M., *Screw invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space.* J. Math. Anal. Appl. **355** (2009), 639–648.

[47] Lagrange J. L. *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies.* Miscellanea Taurinensia 2, 325 (1760), no. 1, 173–199.

[48] Lane E., *Projective differential geometry of curves and surfaces.* University of Chicago Press, Chicago, 1932.

[49] Larsen J. C., *Complex analysis, maximal immersions and metric singularities*, Monatshefte für Mathematik **122** (1996), 105–156.

[50] Little J., *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, IV Ser 83 (1969), 261–335.

[51] Liu H., Liu G., *Hyperbolic rotation surfaces of constant mean curvature in 3-de Sitter space.* Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin **7** (2000), 455–466.

[52] Liu H., Liu G., *Weingarten rotation surfaces in 3-dimensional de Sitter space*. Journal of Geometry **79** (2004), 156–168.

[53] López R., *Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space*. Tohoku Math. J. **52** (2000), 515–532.

[54] Milousheva V., *General rotational surfaces in $\mathbb{R}^4$ with meridians lying in two-dimensional planes.* Comptes Rendus de L'Academie Bulgare des Sciences 63 (2010), 339–348.

[55] Meusnier, J. B., *Mémoire sur la courbure des surfaces.* Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris, prés. par div. Savans **10** (1785), 477–510. Presented in 1776.

[56] Moore C., *Surfaces of rotation in a space of four dimensions*. Annals of Mathematics 21 (1919), 81–93.

[57] Moore C., Rotation surfaces of constant curvature in space of four dimensions. Bulletin of the American Mathematical Society 26 (1920), 454–460.

[58] Nitsche J. C. C., *Lectures on Minimal Surfaces.* Volume 1. Cambridge University Press, New York, 1989.

[59] O'Neill M., *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, London, 1983.

[60] Penrose R. *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett., **14**, 57–59 (1965).

[61] Rosca R., *On null hypersurfaces of a Lorentzian manifold.* Tensor (N.S.) **23** (1972), 66–74.

[62] Sakaki M., *Lorentz stationary surfaces in 4-dimensional space forms of index 2*. Tsukuba J. Math. **35** (2011), no. 2, 215–229.

[63] Sasahara N., *Spacelike helicoidal surfaces with constant mean curvature in Minkowski 3-space.* Tokyo J. Math. **23** (2000), no. 2, 477–502.

[64] Shu S., *Space-like submanifolds with parallel normalized mean curvature vector field in de Sitter space.* J. Math. Phys. Anal. Geom. **7** (2011), no. 4, 352–369.

[65] Tribuzy R. , Guadalupe I., *Minimal immersions of surfaces into 4-dimensional space forms.* Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova **73** (1985), 1–13.

[66] Walter R., *Über zweidimensionale parabolische Flächen im vierdimensionalen affinen Raum. I: Allgemeine Flächentheorie*. J. Reine Angew. Math. **227** (1967), 178–208.

[67] Yau S., *Submanifolds with constant mean curvature*. Amer. J. Math. **96** (1974), 346–366.