



**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

ЙОРДАНКА ПАНЕВА-КОНОВСКА

**ФУНКЦИИ НА БЕСЕЛ И МИТАГ-ЛЕФЛЕР
И ОБОБЩЕНИЯ**

**ДИСЕРТАЦИЯ
ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН
“ДОКТОР НА НАУКИТЕ “**

СОФИЯ, 2017

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

ЙОРДАНКА ДОБРЕВА ПАНЕВА-КОНОВСКА

**ФУНКЦИИ НА БЕСЕЛ И МИТАГ-ЛЕФЛЕР
И ОБОБЩЕНИЯ**

**ДИСЕРТАЦИЯ
ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН
“ДОКТОР НА НАУКИТЕ “**

Област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика,
Професионално направление: 4.5. Математика,
Научна специалност: „Математически анализ”

СОФИЯ, 2017

НА СЕМЕЙСТВОТО МИ

СЪДЪРЖАНИЕ

<i>Предговор</i>	7
<i>Увод</i>	11
1. Гама функция и функции на Бесел	15
1.1. Гама функция	15
1.2. Бета функция	19
1.3. Символ на Поххамер	19
1.4. Няколко неравенства за частно на Γ -функции и символа на Поххамер	20
1.5. Функции на Бесел	23
1.6. Интегрални представяния и асимптотични оценки	24
1.6.1. Предварителни резултати	24
1.6.2. Една горна оценка	25
2. Редове по функции на Бесел. Сходимость	27
2.1. Някои множества в комплексната равнина. Означения и едно полезно геометрично неравенство	27
2.2. Класически резултати за степенните редове	29
2.3. Редове по функции на Бесел	33
2.4. Теорема от Коши–Адамаров тип	34
2.5. Теорема от Абелов тип	37
2.6. (J, z_0) - сумируемост	41
2.7. Теорема от Тауберов тип	42
2.8. Теорема от типа на Фату	45

3. Редове по функции на Бесел. Свръхсходимост	51
3.1. Класически резултати за степенните редове	51
3.2. Теореме за свръхсходимост	53
3.3. Обратна теорема за свръхсходимост	57
4. Мултииндексни функции на Бесел	61
4.1. Мултииндексни обобщения на функциите на Бесел от първи род	61
4.2. Резултати, свързани с параметрите на мултииндексните обобщения на функциите на Бесел	65
4.3. Неравенства, свързани с обобщените функции на Бесел	68
4.4. Асимптотични формули относно индекса n	77
4.5. Специални случаи	80
4.6. Асимптотика за функции на Ломел и Струве	80
5. Функции от Митаг-Лефлеров тип	83
5.1. Функции на Митаг-Лефлер	83
5.2. Неравенства за функциите на Митаг-Лефлер	86
5.3. Обобщени функции на Митаг-Лефлер	88
5.4. Резултати, свързани с параметрите на функцията на Прабхакар	89
5.5. Неравенства за функцията на Прабхакар	92
5.6. Асимптотични формули за “големи” стойности на индекса n ..	95
6. По-нататъшни обобщения на функциите от Беселов и Митаг-Лефлеров тип	97
6.1. Мултииндексни функции на Митаг-Лефлер	97
6.2. Резултати, свързани с параметрите на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер	99
6.3. Неравенства и асимптотични формули за “големи” стойности на параметрите μ	101
6.4. Дефиниция и основни свойства на мултииндексните (3m-параметрични) функции на Митаг-Лефлер	106

6.5. Функции на Фокс и Райт	109
6.6. $3m$ -параметричните мултииндексни функции на Митаг- Лефлер като функции на Фокс и Райт	112
6.7. Специални случаи на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер	116
7. Дробно смятане в класа на мултииндексните функции ..	119
7.1. Интеграли и производни на Риман–Лиувил от дробен ред ...	119
7.2. Интеграли и производни на Ердей–Кобер от дробен ред	123
7.3. Обобщени интеграли и производни на Ердей–Кобер от дробен ред	125
7.4. Производни от n -ти ред за $2m$ -параметричните функции	127
7.5. Производни и интеграли на Риман–Лиувил от дробен ред за $2m$ -параметричните функции	129
7.6. Обобщени производни и интеграли на Ердей–Кобер от дробен ред за $2m$ -параметричните функции	133
8. Редове по функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип. Сходимость	137
8.1. Редове по функции от Беселов тип. Теореме от Коши–Адамаров и Абелов тип	137
8.2. Редове по функции от Беселов тип. Теореме от типа на теоремите на Таубер и Фату	140
8.3. Митаг-Лефлерови и обобщени Митаг-Лефлерови редове. Теореме от Коши–Адамаров и Абелов тип	149
8.4. Редове по функции от Митаг-Лефлеров тип. Теореме от типа на теоремите на Таубер и Фату	151
8.5. Мултииндексни Митаг-Лефлерови редове. Теореме от Коши–Адамаров и Абелов тип	156
8.6. Мултииндексни Митаг-Лефлерови редове. Теореме от типа на теоремите на Таубер и Фату	158

9. Редове по функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип.	
Свръхсходимост	161
9.1. Свръхсходимост на редове от Беселов тип	161
9.2. Парциални суми и интеграли за редове от Беселов тип:	
Полезни оценки	162
9.3. Обратна теорема за свръхсходимост за редове от Беселов тип	170
9.4. Свръхсходимост на редове от Митаг-Лефлеров тип	173
9.5. Парциални суми и интеграли за редове от Митаг-Лефлеров	
тип: Полезни оценки	174
9.6. Обратна теорема за свръхсходимост за редове от	
Митаг-Лефлеров тип	182
<i>Заключителни бележки</i>	187
<i>Библиография</i>	193
<i>Азбучен указател</i>	205

Предговор

Теорията на специалните функции, която е много стар клон на анализа, води началото си от техните многобройни приложения. Напоследък неостатъчаваният интерес към тях все повече нараства с оглед на новите им приложения и по-нататъшни обобщения. Съвременното интензивно развитие на тази теория се докосва до различни неочаквани области на приложенията и се основава на инструментите на числените методи и системите за компютърна алгебра, използвани за аналитични пресмятания и представяния на графики на специалните функции.

Поради широката си употреба и най-разнообразни приложения, функциите на Бесел и Митаг-Лефлер са претърпели многобройни обобщения. Между тях са например 2-, 3-, 4-индексните аналози на Беселовите функции, хипер-Беселовите функции, 3-индексния аналог на функциите на Митаг-Лефлер, както и мултииндексните функции на Митаг-Лефлер. Част от резултатите в този труд са посветени на изучаване на изброими фамилии от такива функции, установени са някои от техните свойства и е изучена сходимост на редове по тях. Получените в това направление резултати са аналогични на класическите резултати за степенни редове и изводът е, че всеки един от разглежданите редове има поведение аналогично на степенните редове. Друг кръг от резултати е свързан с въвеждането и изучаването на нов клас от мултииндексни функции на Митаг-Лефлер. Изучени са основни негови свойства, като интегрални представяния, диференциране и интегриране от произволен ред.

Настоящият дисертационен труд се състои от увод, девет глави и заключителни бележки, разпределени общо в 55 секции, използвана литература и азбучен указател (индекс).

Всички формулирани и доказани в дисертацията лемми и теореми са номерирани с три числа. Първото означава номера на главата, второто е номера на секцията, а третото е поредния номер вътре в самата секция, като номерацията е отделна за лемите и теоремите. Номерацията на забележките, дефинициите и формулите следва същия принцип.

Уводът дава кратък исторически преглед на материята включена в този труд. Той проследява възникването на специалните функции, изброени по-горе, както и проблемите, свързани с тях, като дава мотивацията за по-нататъшно развитие, изучаване и приложения.

В Глава 1 са включени някои предварителни добре известни резултати

за Гама- и Бета-функциите, както и за символа на Поххамер, които участват в дефинициите на изучаваните специални функции, а освен това са доказани и някои неравенства, свързани с тях. В тази глава са дадени дефинициите и основни резултати за функциите на Бесел от първи род и тясно свързаните с тях функции на Бесел–Клифорд, като интегрални представяния и асимптотични формули, което служи за да придаде самостоятелност на изложението. Главата завършва с прецизиране на асимптотичната формула за функциите на Бесел от първи род, което се използва съществено в по-нататъшното изложение.

В Глава 2 и 3 се разглеждат редове по функциите на Бесел в комплексната равнина. В първата от тях се изучава сходимостта и равномерната им сходимост, като се дават резултати, аналогични на класическите за широко използваните степенни редове, а именно теоремите на Коши–Адамар, Абел, Таубер, Литълуд и Фату, докато другата (Гл. 3) е посветена на свръхсходимостта на тези редове.

Главите 4 и 5 се занимават с няколкоиндексните обобщения на Беселовите функции от първи род, включително хипер-Беселовата функция, както и с функциите на Митаг-Лефлер и техните 3-параметрични обобщения, въведени от Прабхакар. Някои свойства относно параметрите на тези функции, полезни неравенства и някои асимптотични формули за “големи” стойности на индексите са дадени за тези специални функции.

В Глави 6 и 7 се изучават последващите обобщения на двете функции – на Бесел и Митаг-Лефлер, известни в литературата като мултииндексни функции на Митаг-Лефлер. В първата от тях се разглежда вариантът с $2m$ индекса и са дадени съответните неравенства и асимптотични формули за “големи” стойности на параметрите. Освен това, са дадени дефиницията и основните свойства на $3m$ -параметричните функции на Митаг-Лефлер и са доказани представянията им чрез функциите на Фокс и Райт. За илюстрация, са описани различни специални случаи на мултииндексни функции на Митаг-Лефлер. Глава 7 е свързана с подробно смятане в тези класове от мултииндексни функции. Пресметнати са интеграли и производни на Риман-Лиувил от произволен ред, както и обобщени дробни интеграли на Ердей–Кобер. Намерени са интересни зависимости, свързани с производни и интеграли от дробен ред в тези класове.

Глави 8 и 9 са посветени на изучаването на редове по различни изборими системи от функции от типа, разглеждан дотук. За да се получат резултатите във възможно по-опростен вид, системите от функции са нор-

мирани, чрез умножаване на разглежданите функции с подходящи коефициенти и степенни функции. В тези две глави се изучават редове по такива фамилии в комплексната равнина. В първата от двете глави се намират техните кръгове на сходимост и се изследва поведението им по границата, а получените резултати са аналогични на класическите. Последната Глава 9 е посветена на свръхсходимостта на изучаваните редове, а резултатите отново са аналози на класическите.

Библиографията се състои от 132 заглавия, публикувани до 2017 г. Тя обаче няма претенциите да представя пълния списък от литературни източници. Допълнителна информация може да намери в монографиите и обзорните статии, споменати в Увода.

Дисертационен труд се базира в голяма степен на монографията на докторанта [99] “*From Bessel to Multi-Index Mittag Leffler Functions: Enumerable Families, Series in them and Convergence*”, отпечатана в международното издателство World Scientific Publishing, а също така и на няколко публикации в специализирани международни научни списания, индексирани в световната мрежа (повечето от тях с импакт фактор или импакт ранг).

Резултатите, включени в дисертацията са установени в рамките на 1 национален проект към МОМН - НС - НИ а именно: Д ИД 02 / 25/ 2009 “Интегрално трансформационни методи, специални функции и приложения”, 3 международни проекти по двустранни научни договори: “Mathematical modelling by means of integral transform methods, partial differential equations, special and generalized functions” и “Analytical and numerical methods for differential and integral equations and mathematical models of arbitrary (fractional or high integer) order”—между БАН и Сръбската АНИ и “Анализ, геометрия и топология” — между БАН и Македонската АНИ и два бюджетни проекта на ИМИ: “Трансформационни методи, специални функции, операционни смятания и приложения” (срок: 2001 – 2014), “Трансформационни методи, специални функции и комплексни апроксимации” (срок: 2014 – продължава).

Получените резултати са докладвани на общия семинар “Анализ, геометрия и топология” на секция АГТ, годишните научни сесии на ИМИ – БАН и повече от 20 международни конференции, както у нас така и в чужбина.

Благодарности

Преди всичко искам да изразя благодарността си на научния ми консултант на дисертацията за придобиване на образователната и научна степен “доктор”, проф. д.м.н. П. Русев, който ме въведе в света на Беселовите функции преди повече от четвърт век.

Особено признателна съм на сътрудниците на секция “Анализ, геометрия и топология” на ИМИ – БАН за създадения благоприятен микроклимат, за отзивчивостта и постоянно проявяваното внимание към моята работа, както при участията ми на различни научни форуми, така и по време на съвместни дейности. Изказвам своята благодарност за полезните препоръки и горещата подкрепа по време на предварителната защита.

Благодарна съм и на ръководителя на катедра “Математически анализ и диференциални уравнения” на ФПМИ, ТУ – София, проф. д-р Кр. Проданова, за нейното усърдно, ентусиазирано и вдъхновяващо мотивиране за оформянето на този труд.

Най-сетне, изключително съм благодарна на моя съпруг П. Коновски и дъщеря ми Мег за тяхното всекидневно разбиране, любов и подкрепа.

Йорданка Панева-Коновска, доц. д-р
Факултет по приложна математика и информатика
Технически университет – София
&
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките

Увод

Функциите на Бесел, които дължат своя произход на конкретни задачи от механиката и астрономията, са се утвърдили като едни от най-често използваните специални функции на математическия анализ и приложенията му във физиката, механиката и инженерните дисциплини.

Чрез тях се изразяват решенията на много задачи от посочените области, което дава възможност за детайлно изследване на тези решения на основата на обширната и изчерпателна информация за Беселовите функции, натрупана в продължение на почти две столетия.

Като пример могат да бъдат посочени аксиално-симетрични проблеми, чието аналитично третиране води до линейни частни диференциални уравнения, съдържащи оператора на Лаплас. Техните решения, след прилагане на метода на Фурие за разделяне на променливите в цилиндрични координати, се изразяват чрез Беселови функции. Затова функциите на Бесел, или по-точно решенията на Беселовото диференциално уравнение се наричат още цилиндрични функции.

В рамките на класическия комплексен анализ, или по-точно в аналитичната теория на обикновените диференциални уравнения, Беселовите функции се третират като решения на линейно диференциално уравнение от втори ред с регулярна особена точка в началото и нерегулярна особена точка в безкрайността. Това прави извънредно прозрачен аналитичния характер на Беселовите функции, които са изобщо многозначни аналитични функции със “степенна” и/или “логаритмична” особеност в началото, респективно в точката ∞ .

Разглеждането на Беселовите функции като специален клас аналитични функции разкрива напълно тяхната природа. В частност това се отнася до асимптотичните им развития, както и до многобройните им интегрални представяния. Като резултат от дългогодишни изследвания е създаден богат арсенал, който широко се използва в математическия анализ и приложенията му.

Както е известно, изследването на свойствата на комплексните функции, холоморфни в област от комплексната равнина, често се опира на възможността за представянето им чрез редове по конкретни изброими системи от функции, холоморфни в разглежданата област. За кръгови области най-често се привличат системите на Тейлър, което води до представянето чрез степенни редове. В “дясна”, респективно “лява” полуравнина се използват редове от типа на Дирихле. В области от по-общ характер се ангажират редове по полиномите на Фабер. Използват се и редове по класическите ортогонални полиноми.

Редове по системата от функции на Бесел $\{J_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ от първи род с цял неотрицателен индекс са разглеждани още през деветнадесети век от Карл Нойман. На него се дължи представянето на ядрото на Коши чрез билинеен ред по тези функции и “полиномите” на Нойман. С помощта на последния ред е доказано, че системата $\{J_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е базис в пространството от комплексните функции, холоморфни в отворения кръг $D(0; R)$ ($0 < R \leq \infty$), с център в началото и радиус R ($0 < R \leq \infty$). В днешно време функциите на Бесел имат различни полезни обобщения, получени с добавяне на допълнителни индекси, в това число две-, три- и четири-индексните функции на Бесел-Райт.

Един от най-често третираните проблеми в комплексния анализ е този за особените точки и аналитичното продължение на холоморфни функции, дефинирани чрез редове по съответна (изброима) система от такива функции. Най-изчерпателно тази теория е развита за Тейлъровите системи, т.е. за степенните редове. Наред с последните се третират и продължават да са обект на изследвания и редове по полиноми на Фабер, по системи от експоненциални функции, както и редове по полиномите на Якоби, Лагер и Ермит. Какво може да се каже за особеностите на холоморфна функция, дефинирана от сходящ степенен ред, ако са известни коефициентите му. Тази задача е привлякла вниманието на математиците още в края на миналия век. С нея са се занимавали Адамар, Борел, а след тях и много други. В двадесетте години на миналия век са получени забележителни резултати, позволяващи да се счита развитието на това направление почти завършено. Голяма част от съответните резултати са свързани с името на известния математик от унгарски произход Д. Поја. На последващ етап Л. Бибербах се заема с трудната задача да направи обзор на публикациите, посветени на тази задача, в резултат на което се появява монографията му [10]. Като се ръководи от аналогията с известни теореми от теорията на степенните редове, Е. Хил [30] обръща специално внимание на задачата за

аналитичната продължимост и определянето на особените точки на функции, които се дефинират чрез сходящи редове по функциите на Ермит. Съществуването на известен паралелизъм между свойствата на степенните редове и тези на редовете по класическите ортогонални полиноми, както и възможността да се прави аналогия между тях се потвърждава от П. Русев [112, 113], който доказва, че за редовете по полиномите на Лагер и Ермит са в сила известната теорема на Островски за “свърхсходимост” [85, 86, 87], както и теоремата на Адамар за “празнините” [25, 26]. В редица литературни източници, като например [10] и [65] се подчертава, че въпросът за аналитичната продължимост на функции, холоморфни в околност на нулата се свързва със свойствата на коефициентите на степенните редове, чрез които тези функции се дефинират.

Между 1899 и 1905 г. големият шведски математик Г. М. Митаг-Лефлер публикува поредица от статии, наречени “Бележки”, върху сумирането на разходящи редове. Целта на тези “Бележки” е да се построи аналитично продължение на даден степенен ред извън неговия кръг на сходимост. Както е добре известно, областта в която той успява да направи това, днес се нарича звезда на Митаг-Лефлер [10, 1.4] (всъщност, тя може да се разглежда като съвкупност от вектори с начало $z = 0$, по които функцията може да се продължи аналитично). В процеса на неговите изследвания се появява класическата функция на Митаг-Лефлер, която за съжаление на практика остава напълно непозната и неизползвана дълго време, почти половин век.

Макар и по-рано тези специални функции не са широко известни и използвани, в днешно време теорията им може да се намери в съвременните монографии на Подлубни [105], Килбас и др. [40], Матай и Хауболд [68], Майнард [64], също Кирякова [44]–[46].

Това е така, защото интересът към функциите на Митаг-Лефлер нараства заедно с техните приложения към различни дробни модели, които описват феномените на реалния дробно-природен свят по-адекватно от моделите от цял ред (например Нигматулин и Балеану [79]), и те се явяват като правило, в явните решения на диференциални и интегрални уравнения от дробен ред: да споменем само някои такива произведения, например Горенфло и Майнард [23], Майнард [64], Кирякова [48], Балеану и др. [28], Горенфло, Килбас, Майнард и Рогозин [24] и др.

Функциите на Митаг-Лефлер се използват и в статистиката в качеството на разпределения и математически очаквания, обикновено наричани статистическа плътност на Митаг-Лефлер (като например в Матай и Хауболд [69]). Поради нарастващия интерес към тях, към широката им и

разнообразна употреба, се появяват техни многобройни обобщения. Сред тях са двуиндексните функции на Митаг-Лефлер, както и трииндексните им обобщения, въведени от Прабхакар.

По-обща са мултииндексните функции ($2m$ -индексни) на Митаг-Лефлер, които са аналози с много индекси на двуиндексните функции на Митаг-Лефлер, получени чрез заместване на параметрите с вектори от параметри. Класът на тези функции с няколко индекса, въведени от Якубович и Лучко и основно изследвани подробно от Кирякова, възниква в края на 20-ти век. Този клас съдържа като представители функциите на Бесел и изброените им по-горе обобщения, а също така и функциите на Митаг-Лефлер.

Напоследък е въведен и класът на мултииндексните ($3m$ -индексните) функции на Митаг-Лефлер, обхващащ както обобщените трииндексни функции на Митаг-Лефлер, така и $2m$ -индексните. По този начин се произвежда богат арсенал от обобщени функции, включващи функциите от Беселов и Митаг-Лефлеров тип. Установени са основните характеристики на тези функции, като ред и тип, интегрални представяния, диференцирания и интегрирания от произволен ред.

Заедно с фамилиите от Беселови функции и резултатите, отнасящи се до сходимост на редове по тях, са избрани подходящи изброими системи от функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип и са разгледани редове по такива функции в комплексната равнина $\mathbb{C}$. Такив тип резултати се вдъхновяват от факта, че решенията на някои диференциални и интегрални уравнения от дробен ред могат да бъдат записани чрез редове (или интеграли, или редове от интеграли) по функциите на Митаг-Лефлер, функциите на Прабхакар и техните многоиндексни обобщения, като например в Кирякова [48], Сандев, Томовски и Дъбелдам [121], Томовски и Гара [124], Херзала и Балеану [28], Бажлеков и Бажлекова [6]. В процеса на изучаването на такива редове са получени горни оценки и асимптотични формули за “големи” стойности на индексите, които се използват допълнително за определяне на областите на сходимост, по-точно къде редовете са сходящи и къде разходящи, къде сходимостта е равномерна и къде не е. Изследва се и поведението на редовете по границата, като са доказани теореми, аналогични на тези за степенните редове, а именно класическите теореми на Абел, Таубер и Фату, както и теореми за свръхсходимост.

По отношение на резултатите в тази дисертация, свързани със сходимостта на разглежданите редове по различни фамилии от функции, можем накратко да обобщим, че те са напълно аналогични на тези, които се отнасят за широко използваните степенни редове.

Глава 1

Гама функция и функции на Бесел

1.1 Гама функция

Съществуват няколко еквивалентни дефиниции за *Гама функцията* $\Gamma(x)$, повечето от които дължим на Ойлер. Съгласно дефиницията на Гаус (Ердей [17, том 1, стр 15]),

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \quad (1.1.1)$$

откъдето може да се покаже, че границата съществува при условие, че $x \neq 0, -1, -2, \dots$.

Замествайки $x = 1$ в (1.1.1), намираме, че

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n}{1.2.3 \dots (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

В общия случай, стойностите на $\Gamma(x)$ не винаги могат така лесно да бъдат пресмятани. Но ако в (1.1.1) заменим x с $x+1$ получаваме, че

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} = x\Gamma(x),$$

т.е.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (1.1.2)$$

откъдето последователно следват известните рекурентни зависимости за $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= (x-1)(x-2) \dots (x-n)\Gamma(x-n), \\ \Gamma(1-x+n) &= (n-x) \dots (2-x)(1-x)\Gamma(1-x), \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

както и

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= (-1)^n \Gamma(x-n)\Gamma(1-x+n), \\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= (-1)^n \Gamma(x+n)\Gamma(1-x-n).\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

От тъждеството (1.1.2) непосредствено се вижда, че

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!, \quad \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!,$$

а с помощта на математическа индукция лесно се доказва, че

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ за } n = 0, 1, 2, \dots$$

По такъв начин се оказва, че Гама функцията $\Gamma(x)$ е разширение на функцията факториел в множеството на реалните числа, с изключение на $0, -1, -2, \dots$.

За стойности на $x > 0$, Гама функцията $\Gamma(x)$ се изразява чрез интегралното представяне на Ойлер

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt, \quad \text{за } x > 0.\tag{1.1.5}$$

Интегралът в дясната страна на (1.1.5) е известен като интеграл на Ойлер от втори род. Той е несобствен интеграл не само поради безкрайната горна интеграционна граница, но и защото функцията t^{x-1} расте неограничено в близост до $t = 0$, при условие, че $0 < x < 1$. Известно е обаче, че интегралът (1.1.5) е равномерно сходящ във всеки интервал $[a, b]$, където $0 < a \leq b < \infty$, поради което $\Gamma(x)$ е непрекъснатата функция за $x > 0$. Равномерната сходимост на интеграла (1.1.5) позволява също така да се пресметне и $\Gamma'(x)$ чрез диференциране под знака на интеграла.

Аналогично се установява и съществуването на производните от повисок ред. И така, функцията $\Gamma(x)$ е непрекъснатата при всички положителни стойности на променливата x (т.е. за $x \in (0, \infty)$) и притежава непрекъснати производни от произволен ред. При това, при $x \in (0, \infty)$ производната $\Gamma'(x)$ е растяща, а $\Gamma''(x)$ е положителна. Дефиницията (1.1.1) дава възможност Гама функцията да бъде дефинирана и за $x < 0$. За целта обаче е далеч по-удобно да се използва рекурентната зависимост (1.1.2). Този подход води до формулата

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)}, \quad \text{за } n = 1, 2, \dots,\tag{1.1.6}$$

чрез която се дефинира Гама функцията в интервала

$$x > -n \quad (x \neq 0, -1, \dots, -n+1)$$

посредством Гама функция с положителен аргумент.

Поведението на $\Gamma(x)$ при “големи” стойности на положителната независима променлива може да се опише просто: тя расте бързо, по-бързо от експоненциална функция. Асимптотично, при $x \rightarrow \infty$, Гама функцията се дава с формулата на Стирлинг:

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad \text{т.е.} \quad \Gamma(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.1.7)$$

където символът “ $\sim$ ” означава, че отношението на изразите, намиращи се от двете му страни, клони към 1.

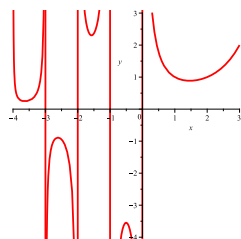
Полезна се оказва също и формулата, даваща отношението на две Гама функции, именно [17, том 1, 1.18 (4)]:

$$\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)} \sim x^{\alpha-\beta}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.1.8)$$

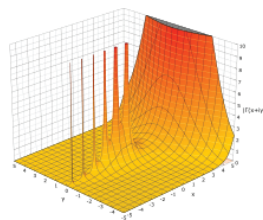
Забележка 1.1.1. *Да отбележим само за пълнота, че Гама функцията се продължава и в комплексната равнина $\mathbb{C}$, и освен това, формулите (1.1.5), (1.1.7) и (1.1.8) остават в сила и в този случай (при известни ограничения за независимата променлива). По-специално, формулата (1.1.5) се записва във вида (Ердей [17, 1.1(5)]):*

$$\Gamma(z) = p^z \int_0^\infty \exp(-pt) t^{z-1} dt, \quad \text{за } p > 0 \text{ и } \Re(z) > 0. \quad (1.1.9)$$

По-долу е дадена графиката на функцията $\Gamma(x)$ за реални стойности на x (Фиг. 1.1.1), получена с помощта на системата за компютърна алгебра (СКА) Maple 13, както и изображение на абсолютната стойност на Гама функцията в комплексната равнина (Фиг. 1.1.2):



Фигура 1.1.1



Фигура 1.1.2.

Лесно може да се придобие обща представа за поведението на Гама функцията $\Gamma(x)$ при изменение на x в интервала $(0, \infty)$. За изучаване поведението на функцията $\Gamma(x)$, когато $x \rightarrow 0$, се използва рекурентната зависимост (1.1.2). По такъв начин се вижда, че

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = +\infty.$$

От друга страна, $\Gamma(x) > n!$, стига само $x > n+1$, откъдето следва, че и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

Тъй като $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, по теоремата на Рол следва, че $\Gamma'(x)$ се анулира в някаква точка α_0 от интервала $(1, 2)$. Тъй като $\Gamma'(x)$ е растяща в интервала $(0, \infty)$, то $\Gamma'(x) < 0$ при $0 < x < \alpha_0$ и функцията $\Gamma(x)$ намалява, а при стойности на $x > \alpha_0$ производната $\Gamma'(x) > 0$, и следователно там $\Gamma(x)$ расте. Следователно, $\Gamma(x)$ има минимум в точката α_0 . Пресмятанията, които тук са извършени с помощта на СКА Maple 13, дават следния резултат:

```
> minimize(GAMMA(x), x = 1 .. 2);
    GAMMA(RootOf(Psi(_Z), 1.461632145))

> GAMMA(alpha_0) := GAMMA(1.461632145);
    GAMMA(alpha_0) := 0.8856031944,
```

т.е.

$$\alpha_0 = 1.461632145\dots, \quad \min \Gamma(x) = \Gamma(\alpha_0) = 0.8856031944\dots \quad (1.1.10)$$

Във връзка с по-нататъшните разглеждания получените резултати могат да се резюмират както следва.

Забележка 1.1.2. Γ -функцията притежава следните свойства:

- (i) Ойлеровата Γ -функция приема само положителни стойности в интервала $(0, \infty)$. Освен това, съществува число $1 < \alpha_0 < 2$, такова че $\Gamma(\alpha)$ е растяща функция в интервала (α_0, ∞) , намаляваща в $(0, \alpha_0)$ и в точката α_0 функцията $\Gamma(\alpha)$ достига абсолютния си минимум в множеството $\mathbb{R}^+$ на положителните реални числа, т.е.

$$\min_{\alpha \in (0, \infty)} \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_0) > 0, \quad \alpha_0 \in (1, 2).$$

(ii) Формулата на Стирлинг гласи, че

$$\Gamma(z + \alpha) \sim \sqrt{2\pi} z^{z+\alpha-1/2} \exp(-z), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

при $|\arg(z + \alpha)| < \pi$.

(iii) Частното на две Γ -функции има следното свойство:

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z + \alpha)} = O\left(\frac{1}{z^\alpha}\right),$$

за $|\arg(z)| < \pi$ и $|\arg(z + \alpha)| < \pi$.

1.2 Бета функция

Бета функцията се дефинира чрез интеграла

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{за } \Re(x) > 0, \Re(y) > 0, \quad (1.2.1)$$

и е известна още като *интеграл на Ойлер от първи род*. Връзката между Бета и Гама функциите се дава с равенството

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \text{за } \Re(x) > 0, \Re(y) > 0. \quad (1.2.2)$$

В заключение на този параграф да отбележим, че изчерпателна информация за свойствата на Гама функцията и свързаните с нея специални функции се съдържа например в Ердей [17, т. 1], Маркушевич [67, том 2], Подлубни [105], Фихтенголец [19, том 2].

1.3 Символ на Поххамер

Тясно свързан с Гама функцията е изразът $(\gamma)_k$ [17, Section 2.1.1], даден с равенството

$$(\gamma)_0 = 1; \quad (\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1), \quad \gamma \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}, \quad (1.3.1)$$

който се нарича *символ на Поххамер*. Последното равенство може да се представи и във вида

$$(\gamma)_k = \frac{\Gamma(\gamma + k)}{\Gamma(\gamma)}, \quad (1.3.2)$$

разбира се, при предположение, че частното на Гама функциите влясно съществува. За удобство се приема също, че при $\gamma = 0$, първият от символите (1.3.1) има стойност 1, т.е.

$$(0)_0 = 1. \quad (1.3.3)$$

Важно е да се отбележи, че ако γ е отрицателно цяло число или нула, то $(\gamma)_k = 0$, когато $k > -\gamma$, т.е.

$$(\gamma)_k = 0 \quad \text{за} \quad -\gamma = n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{и} \quad k = n + 1, n + 2, \dots \quad (1.3.4)$$

1.4 Няколко неравенства за частно на Γ -функции и символа на Поххамер

В тази секция са дадени резултати, свързани с отношенията на две конкретни Γ -функции, както и със символа на Поххамер, които играят ключова роля в изложението в Секция 9.5. Започваме с неравенства [102], свързани с частните $\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)}$ и $\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m\alpha + n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) на Γ -функциите.

Лема 1.4.1. [102] *Нека $\alpha \geq 2$, тогава са в сила следните неравенства*

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} \leq \frac{1}{(m+1)!}, \quad \text{за} \quad m = 2, 3, \dots, \quad (1.4.1)$$

и

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m\alpha + n)} \leq \frac{1}{(m+n-1)_{m+1}}, \quad \text{за} \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (1.4.2)$$

Доказателство. Първо да се занимаем с (1.4.1). В този случай, вземайки $m = 2$, получаваме

$$\Gamma(2\alpha) = (2\alpha - 2)(2\alpha - 1)\Gamma(2\alpha - 2)$$

и тъй като $(2\alpha - 2) \geq \alpha \geq 2$, то

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha - 2)} \frac{1}{(2\alpha - 2)(2\alpha - 1)} \leq \frac{1}{(2\alpha - 2)(2\alpha - 1)} \leq \frac{1}{3!}. \quad (1.4.3)$$

Тогава по индукция, като предположим, че

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} \leq \frac{1}{(m+1)!},$$

и имайки предвид, че $m\alpha + \alpha - 1 \geq m + m + \alpha - 1 \geq m + 2$, можем да направим следното заключение

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma((m+1)\alpha)} &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(m\alpha + \alpha - 1)\Gamma(m\alpha + \alpha - 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} \frac{\Gamma(m\alpha)}{\Gamma(m\alpha + \alpha - 1)} \frac{1}{(m\alpha + \alpha - 1)} \\ &\leq \frac{1}{(m+1)!} \frac{1}{(m\alpha + \alpha - 1)} \leq \frac{1}{(m+2)!}, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

което означава, че неравенството (1.4.1) е удовлетворено за всяка естествена стойност на $m \geq 2$.

Нека сега да се спрем на неравенството (1.4.2). Да отбележим първо, че ако $n = 1$, то $m + n - 1 = m$, и освен това проверката на (1.4.2) в този случай се разделя на случаите $m = 1$ и $m \geq 2$.

- Именно, за $m = 1$ е изпълнено

$$\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \leq \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{1.2} = \frac{1}{(1)_2}, \quad (1.4.5)$$

- респективно, за $m \geq 2$, поради неравенството $m\alpha - m \geq 2$, следва

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(m\alpha + 1)} &= \frac{1}{(m\alpha) \dots (m\alpha - m)\Gamma(m\alpha - m)} \\ &\leq \frac{1}{(2m) \dots (2m - m)} = \frac{1}{(m)_{m+1}}. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

С това верността на неравенството (1.4.2) е потвърдена за $n = 1$.

По-нататък, използвайки индукция предполагаем, че

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m\alpha + n)} \leq \frac{1}{(m + n - 1)_{m+1}}, \quad (1.4.7)$$

и тогава

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m\alpha+n+1)} &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m\alpha+n)} \frac{n}{(m\alpha+n)} \leq \frac{1}{(m+n-1)_{m+1}} \frac{n}{(2m+n)} \\ &= \frac{n}{(m+n-1)} \frac{1}{(m+n)} \cdots \frac{1}{(2m+n-1)} \frac{1}{(2m+n)} \leq \frac{1}{(m+n)_{m+1}}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Сега като вземем под внимание (1.4.5)–(1.4.8), неравенството (1.4.2) следва за всички стойности на $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Да отбележим, че в случая когато γ удовлетворява допълнителното условие $-1 \leq \gamma \leq 1$ и $m \in \mathbb{N}$, тогава са изпълнени неравенствата

$$\left| \frac{(\gamma+1)_m}{(m+1)!} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{(\gamma)_m}{m!} \right| \leq 1 \quad (1.4.9)$$

и означавайки за удобство

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha,m,0}^{\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} \frac{(\gamma+1)_{m-1}}{m!}, \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha,m,n}^{\gamma} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m\alpha+n)} \frac{(\gamma)_m}{m!}, \quad (1.4.10)$$

може да се формулира следното елементарно твърдение, като следствие от току-що доказаната Лема 1.4.1.

Следствие 1.4.1. [102] *Ако $\alpha \geq 2$, $-1 \leq \gamma \leq 1$ и $n \in \mathbb{N}$, то са валидни следните неравенства:*

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\Gamma}_{\alpha,m,0}^{\gamma} \right| &\leq \frac{1}{(m+1)!}, \quad \text{за } m = 2, 3, \dots, \\ \left| \tilde{\Gamma}_{\alpha,m,n}^{\gamma} \right| &\leq \frac{1}{(m+n-1)_{m+1}}, \quad \text{за } m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Доказателство. Валидността на неравенствата (1.4.11) автоматично следва, вземайки едновременно (1.4.1), (1.4.2), (1.4.9) и (1.4.10). $\square$

1.5 Функции на Бесел

Решаването на редица задачи от механиката и математическата физика е тясно свързано с Беселовото диференциално уравнение

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0. \quad (1.5.1)$$

Функцията $J_\nu(z)$, дефинирана с равенството

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad (1.5.2)$$

е решение на това уравнение в областта $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ [128, 3.1 (8)], [114, (1.4.2)]. Тя се нарича *функция на Бесел от първи род с индекс (или параметър) ν* . Функцията $J_{-\nu}(z)$ е също решение на горното уравнение.

Беселовите функции от първи род с цял индекс се наричат още *коэффициенти на Бесел*. Те са холоморфни в цялата комплексна равнина.

Систематичното изучаване на Беселовите функции води началото си от 1824 г. с изследванията на Бесел. Следва да се отбележи обаче, че частни случаи на редове, с които се представят функции на Бесел, се появяват още в работите на Я. Бернули (1703), където се среща ред представящ Беселова функция с индекс $\nu = 1/3$ (последното е споменато в едно писмо от Я. Бернули до Лайбниц от 3 октомври, 1703). Коефициентите на Бесел от нулев ред се срещат в мемоара на Д. Бернули за колебание на тежки вериги (1732). Други случаи се разглеждат от Ойлер (1764), Лагранж (1769) [4, Глава 5], [126, Глава 1], [130, Глава 17]. По-подробно историческото развитие на теорията на Беселовите функции е проследено в Глава I от забележителния труд на Уотсън [128].

Нека най-напред да разгледаме случая, в който параметърът ν не е цяло число. Тогава линейните комбинации [17, 7.2 (4)–(6)], [114, (1.4.5), (1.4.9)]:

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad (1.5.3)$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + i Y_\nu(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad (1.5.4)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - i Y_\nu(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad (1.5.5)$$

също са решения на диференциалното уравнение (1.5.1). Функцията $Y_\nu(z)$ се нарича *функция на Бесел от втори род*, а $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$ – *функции на Бесел от трети род*, или още *първа и втора функция на Ханкел*.

Ако ν е цяло число, десните страни на равенствата (1.5.3)–(1.5.5) не са дефинирани. Границите, обаче, на тези десни страни при $\nu \rightarrow n$ (n е цяло число) съществуват и могат да се използват за дефиниране на функциите на Бесел от втори и трети род с целочислен индекс. В частност имаме $Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z)$ [17, 7.2 (28)], [114, (1.4.6)], т.е.

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (1.5.6)$$

Функциите $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ образуват фундаментална система от решения на диференциалното уравнение (1.5.1) тогава и само тогава, когато ν не е цяло [128, 3.12], докато $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ винаги образуват фундаментална система решения на това уравнение [128, 3.63]. Един от главните мотиви за въвеждането на функциите $Y_\nu(z)$ е необходимостта от съществуването на второ решение на уравнението (1.5.1), което да е линейно независимо от $J_\nu(z)$, когато параметърът $\nu = n$ е цяло неотрицателно число.

Тук е мястото да отбележим и една интересна вариация на функцията на Бесел от първи род, а именно

$$C_\nu(z) = z^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad (1.5.7)$$

която се нарича *функция на Бесел–Клифорд*. Както се вижда $C_\nu(z)$ е цяла функция, тясно свързана с функцията на Бесел от първи род $J_\nu(z)$.

1.6 Интегрални представяния и асимптотични оценки

1.6.1 Предварителни резултати

Едно от най-често използваните интегрални представяния на Беселовите функции от първи род е интегралното представяне на Поасон [17, 7.12 (7)]:

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi} 2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\nu-1/2} \exp(izt) dt, \quad (1.6.1)$$

което е в сила когато $\operatorname{Re} \nu > -1/2$. То е дало началото на много важни изследвания в областта на Беселовите функции.

Според това, дали индексът ν , или аргументът z расте неограничено, са познати различни асимптотични формули за Беселовите функции. Така например, коефициентите на Бесел $J_n(z)$ имат следното представяне [130, §17.81]:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n (1 + \theta_n(z)) \frac{1}{n!}, \quad \theta_n(z) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1.6.2)$$

в цялата комплексна равнина. При това, функциите $\theta_n(z)$ са холоморфни за $z \in \mathbb{C}$ и освен това, $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(z) = 0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на равнината $\mathbb{C}$.

Когато $z \rightarrow \infty$, функциите на Бесел се представят по следния начин [17, 7.13 (3)]:

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos(z - \lambda_\nu) - \sin(z - \lambda_\nu) O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right), \quad (1.6.3)$$

с $\lambda_\nu = \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, за $\arg |z| \leq \pi - \delta$ и произволно $0 < \delta < \pi$.

1.6.2 Една горна оценка

Разглеждайки експлицитно $\theta_n(z)$, резултатът от (1.6.2), може да бъде направен по-точен.

Теорема 1.6.1. [99] *Нека $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество. Тогава съществува константа $C = C(K)$, $0 < C < \infty$, такава че за всяко $n \in \mathbb{N}_0$ и всяко $z \in K$, е в сила следното неравенство.*

$$|\theta_n(z)| \leq C/(n+1). \quad (1.6.4)$$

Доказателство. Първо, нека $z \in \mathbb{C}$. Поради (1.5.2) и (1.6.2), може да се запише

$$\theta_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+1)!}{k! (n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Означавайки $u_k(z) = \frac{(-1)^k(n+1)!}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$, за абсолютната стойност на $u_k(z)$ се получава оценката

$$|u_k(z)| \leq \frac{1}{k!} \left|\frac{z}{2}\right|^{2k}. \quad (1.6.5)$$

Тъй като редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left|\frac{z}{2}\right|^{2k} \quad (1.6.6)$$

е сходящ за всяко $z \in \mathbb{C}$ и неговата сума е $\exp(|z|^2/4) - 1$, то за модула $|\theta_n(z)|$ се получава оценката

$$|\theta_n(z)| \leq \frac{1}{n+1} (\exp(|z|^2/4) - 1) \quad (1.6.7)$$

в цялата комплексна равнина. Тогава оценката (1.6.4) незабавно следва от (1.6.7), за всички стойности на $z \in K$. $\square$

Само да споменем, че изложеното по-горе доказателство може да се намери също в [99].

По-нататък може да се направи следната забележка.

Забележка 1.6.1. *Равномерната сходимост на $\{\theta_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$ следва и от (1.6.4).*

Забележка 1.6.2. *Съгласно асимптотичната формула (1.6.2), следва, че съществува естествено число N_0 , такова че функциите $J_n(z)$ нямат нули за $n > N_0$, освен нулата.*

Забележка 1.6.3. *Да отбележим, че всяка от функциите $J_n(z)$ ($n \in \mathbb{N}_0$), бидейки цяла функция, не тъждествено нула, има не повече от краен брой нули в затвореното и ограничено множество $|z| \leq R$ ([67], том 1, гл. 3, §6, 6.1, стр.305). Нещо повече, поради Забележка 1.6.2, най-много краен брой от тези функции имат някакви нули, различни от нулата.*

Забележка 1.6.4. *Формулата (1.6.4) се използва съществено в доказателството на съответната усилена версия на теоремата от Тауберов тип за редове по функции на Бесел от първи род.*

Глава 2

Редове по функции на Бесел. Сходимост

2.1 Някои множества в комплексната равнина. Означения и едно полезно геометрично неравенство

В тази секция са описани някои множества в комплексната равнина, които се използват по-нататък.

Започвайки с най-простите кръгови области, означаваме с $D(0; R)$ отворения кръг с център в координатното начало и радиус R , с $[D(0; R)]$ - неговата затворена обвивка, с $\tilde{D}(0; R)$ външността на $D(0; R)$ и с $C(0; R)$ - неговия контур, т.е.

$$\begin{aligned} D(0; R) &= \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < R\}, \\ \tilde{D}(0; R) &= \{z : z \in \mathbb{C}, |z| > R\}, \\ [D(0; R)] &= D(0; R) \cup C(0; R), \\ C(0; R) &= \partial D(0; R) = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| = R\}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Всъщност, множеството $[D(0; R)]$ е затворения кръг $\{z : z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$.

По-нататък, вземайки $0 \leq \psi < 2\pi$ и $0 < \varphi < \pi/2$, означаваме с $A_{\psi, \varphi}$ ъгловата област, зададена както следва

$$A_{\psi, \varphi} = \{z : z \in \mathbb{C}, |\arg(z \exp(-i\psi))| < \varphi\}. \tag{2.1.2}$$

Тази област има големина на ъгъла $2\varphi < \pi$ и е симетрична спрямо лъча, минаващ през началото и съдържащ ъгъл ψ с положителната посока на

реалната ос. Ако $0 \leq \psi < \pi$, множествата $A_{\psi, \varphi}$ и $A_{\psi+\pi, \varphi}$ образуват двойка върхни ъгли, т.е., двата ъгъла имат общ връх (координатното начало), а раменете им са симетрични относно правата линия, минаваща през началото и сключваща ъгъл ψ с положителната реална ос. Например, ъглите $A_{0, \varphi}$ и $A_{\pi, \varphi}$ са върхни ъгли с връх началото и всеки един от тях е симетричен относно реалната ос, т. е. реалната ос е ъглополовяща на всеки от тях.

За следващите две множества, вземайки комплексното число $z_0 \neq 0$ с $\arg z_0 = \psi$, означаваме

$$\begin{aligned} A_{z_0; \psi, \varphi} &= \{z : z \in \mathbb{C}, z - z_0 \in A_{\psi+\pi, \varphi}\} \quad \text{ако } 0 \leq \psi < \pi, \\ A_{z_0; \psi, \varphi} &= \{z : z \in \mathbb{C}, z - z_0 \in A_{\psi-\pi, \varphi}\} \quad \text{ако } \pi \leq \psi < 2\pi. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Всъщност, множеството $A_{z_0; \psi, \varphi}$ се получава като образ на областта $A_{\psi \pm \pi, \varphi}$ чрез трансляция, изобразяваща началото в точката z_0 . То представлява ъглова област, съдържаща началото, с големина на ъгъла 2φ и връх в точката $z = z_0$, симетрична относно правата линия, минаваща през точките 0 и z_0 .

Най-сетне, означенията g_φ , $D(0; R_t)$ и d_φ са въведени съответно за частта от ъгловата област $A_{z_0; \psi, \varphi}$, която се съдържа в отворения кръг $D(0; R)$ (виж Фигура 2.1.1), отворения кръг с център координатното начало, който се допира до раменете на ъгъла и частта от областта g_φ , заключена между раменете на ъгъла и дъгата от окръжността $C(0; R_t)$, т.е.

$$\begin{aligned} g_\varphi &= g_{z_0; \varphi} = D(0; R) \cap A_{z_0; \psi, \varphi}, \\ d_\varphi &= d_{z_0; \varphi} = \text{Ext}D(0; R_t) \cap g_\varphi, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

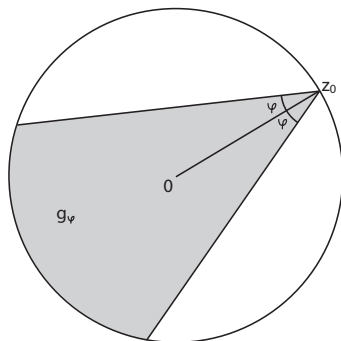
а радиусът R_t на кръга $D(0; R_t)$ е равен на разстоянието от т. 0 до раменете на ъгъла g_φ .

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R < \infty$, $|z_0| = R$, g_φ е произволна ъглова област, от вида (2.1.4), с големина на ъгъла $2\varphi < \pi$ и връх в точката $z = z_0$ и d_φ е съответното множество, дефинирано с (2.1.4). По-долу е дадено едно полезно геометрично неравенство, свързано с множеството d_φ .

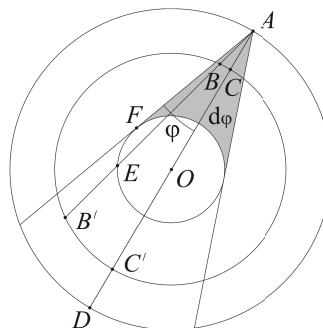
Лема 2.1.1. [99] *Нека d_φ е частта от ъгловата област g_φ , дефинирана с (2.1.4) и $z \in [d_\varphi]$. Тогава*

$$|z - z_0| \cos \varphi < 2(|z_0| - |z|). \quad (2.1.5)$$

Доказателство. Първо, нека z принадлежи на отвореното множество d_φ . Означавайки z_0 и z съответно с буквите A и B (виж Фигура 2.1.2), може да се запише равенството



Фигура 2.1.1



Фигура 2.1.2

$AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$, откъдето

$$\frac{AB}{AC} = \frac{|z - z_0|}{|z_0| - |z|} = \frac{AC'}{AB'} < \frac{AD}{AE} < \frac{AD}{AF} = \frac{2AO}{AF} = \frac{2}{\cos \varphi}.$$

Това доказва лемата в случая на $z \in d_\varphi$. Когато $z \in \partial d_\varphi$, доказателството се извършва по същия начин, с използване на аналогични неравенства. $\square$

2.2 Класически резултати за степенните редове

Важно свойство на холоморфните функции е възможността им да се представят със степенни редове

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

Полезна информация за сходимостта на такива редове в комплексна област се съдържа в класическите теореми на Коши–Адамар, Абел, Таубер и Фату.

Така например, по теоремата на Коши–Адамар, всеки ред от вида (2.2.1) е абсолютно сходящ в кръга $D(0; R)$ с радиус

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

и разходящ във външността му $|z| > R$. Най-общо казано, по теоремата на Абел, от сходимостта на реда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

в точката z_0 следва съществуването на границата $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, когато z принадлежи на подходяща ъглова област с връх в точката z_0 . Геометричният ред [122, стр. 92], :

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

разглеждан в точката $z_0 = 1$ е пример за това, че съществуването на границата $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ не винаги влече сходимостта на реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ без да е наложено допълнително условие за големината на коефициентите.

Началото на теорията на сумиране на разходящи редове е поставено от Ойлер. Той е първият, който е дискутирал, че въпросът, който трябва да се поставя е “как да се дефинира сумата на разходящ ред”, а не “на какво е равна тази сума”. Той пише ([18, стр. 78, (110.)]):

“Аз твърдя, че цялата трудност се състои в определяне на смисъла на понятието “сума”. Наистина, ако изразът “сума на реда” означава, както обикновено, резултата от събирането на всичките му членове, тогава сума може да се дефинира само за сходящи редове. Ако понятието “сума” се подразбира само в този тесен смисъл, тогава разходящите редове изобщо нямат каквато и да е сума. Ако в това понятие се вложи друг смисъл, различен от обичайния, тогава може да се излезе от това затруднение. Нещо повече, ако редът е сходящ, се изисква тази “нова” сума да бъде същата като обичайната. Тъй като разходящите редове изобщо нямат сума (в обичайния смисъл), то новата сума в този случай няма да създава изобщо никакви проблеми.”

Ойлеровата гледна точка за разходящите редове е напълно актуална: един разходящ ред няма сума в обичайния смисъл на думата, но е възможно да се въведе нова дефиниция за “сума” (т.е. дефиниция за метод за сумиране на редове), която да се приложи за всички сходящи редове и за

някои разходящи. Нещо повече, за целта се изисква новата сума за сходящи редове да остава същата, както в обичайния смисъл (т.е. *методът да бъде регулярен*).

Трябва да отбележим, че има оставена ясна българска дия в областта на сумиране на разходящи редове в лицето на Обрешков, който има редица публикации по тази тематика. Наскорешното публикуване на обширното му изследване [80] на английски език [81], с предговор и добавка от Русев [115], е само още едно потвърждение за това.

Нека да разгледаме числовия ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.2)$$

За да дефинираме неговата Абелова сумируемост [27, стр. 20, 1.3 (2)], наред с него разглеждаме и степенния ред (2.2.1).

Дефиниция 2.2.1. *Редът (2.2.2) се нарича A -сумируем, ако степенният ред (2.2.1) е сходящ в единичния кръг $D(0; 1)$ и освен това съществува границата*

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S.$$

Комплексното число S се нарича A -сума на разглеждания числов ред (2.2.2) и обичайното означение за това е

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \quad (A).$$

Ясно е, че тази дефиниция се отнася както до всички сходящи числови редове, така и до някои разходящи. Но съгласно теоремата на Абел, Абеловата сумируемост е регулярна, т.е. A -сумата на всеки сходящ числов ред е равна на стандартната му сума. И така, може да се направи следната Забележка.

Забележка 2.2.1. *A -сумируемостта е регулярна. Това означава, че ако редът (2.2.2) е сходящ, то той е също и A -сумируем, и неговата A -сума е равна на обичайната му сума.*

Забележка 2.2.2. В общия случай A -сумируемостта на реда (2.2.2) не влече неговата сходимост. Обаче при налагане на допълнителни условия върху големината на общия член на реда (2.2.2), сходимостта може да се осигури.

По-надолу е формулиран резултат, обратен на теоремата на Абел, във вида, даден в книгата на Харди [27, Теорема 85].

Теорема 2.2.1 (на Таубер). *Нека редът (2.2.2) е A -сумируем,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \quad (A) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

Тогава редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ е сходящ и сумата му е S .

Всъщност, тази теорема е обратна на теоремата на Абел и свързва Абеловата сумируемост на даден числов ред с обичайната му сумируемост. Тя има вече повече от едновековна история. Неотдавна Кореваар публикува статията си [55], посветена на едновековния юбилей на комплексната теорема на Таубер.

На пръв поглед изглежда, че условието $a_n = o(1/n)$ е съществено. Въпреки това, Литълуд успява да го отслаби и получава следната усилена версия на теоремата на Таубер [27, Теорема 90].

Теорема 2.2.2 (на Литълуд). *Нека редът (2.2.2) е A -сумируем,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \quad (A) \quad \text{и} \quad a_n = O(1/n).$$

Тогава редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ е сходящ и неговата сума е S .

По-нататък, за да се дискутира поведението на степенния ред (2.2.1) по периферията на кръга на сходимост, се налага да се цитира още една дефиниция. За целта, нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа със свойството

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = R^{-1}, \quad 0 < R < \infty,$$

и $f(z)$ е сумата на степенния ред (2.2.1) в отворения кръг $D(0; R)$, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in D(0; R). \quad (2.2.3)$$

Дефиниция 2.2.2. Точката $z_0 \in \partial D(0; R)$ се нарича *регулярна точка* за функцията f , ако съществува околност $U(z_0; \rho)$ и функция $f_{z_0}^* \in \mathcal{H}(U(z_0; \rho))$ (пространството от комплекснозначни функции, холоморфни в множеството $U(z_0; \rho)$), такава че $f_{z_0}^*(z) = f(z)$ за $z \in U(z_0; \rho) \cap D(0; R)$.

Съгласно тази дефиниция следва, че множеството от регулярни точки на даден степенен ред е отворено подмножество на окръжността $C(0; R) = \partial D(0; R)$ относно релативната топология върху $\partial D(0; R)$, т. е. топологията, индуцирана от тази в $\mathbb{C}$.

В общия случай, не съществува релация между сходимостта (разходимостта) на един степенен ред в точките от границата на кръга му на сходимост и регулярността (сингулярността) на неговата сума в такива точки. Например степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ е разходящ във всяка точка от единичната окръжност $C(0; 1)$, независимо от факта, че всички точки от тази окръжност, с изключение на $z = 1$, са регулярни за неговата сума. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z^n$ е (абсолютно) сходящ във всяка точка от окръжността $C(0; 1)$, но независимо от това една от тях, именно $z = 1$, е сингулярна (т.е. не е регулярна) за нейната сума. Обаче при допълнителни условия върху редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, такава релация съществува (за подробности [67, Том 1, Гл. 3, §7, 7.3, стр. 357]).

Теорема 2.2.3 (на Фату). *Ако коефициентите на степенния ред с единичния кръг на сходимост клонят към нула, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, тогава степенният ред е сходящ, даже равномерно, върху всяка дъга от единичната окръжност, всички точки на която (включително и краищата на дъгата) са регулярни за сумата на реда.*

2.3 Редове по функции на Бесел

В редица литературни източници, като например [10] и [65] се подчертава, че въпросът за изследване на функции, холоморфни в околност на нулата се свързва със свойствата на коефициентите на степенните редове,

чрез които тези функции се дефинират. Естествено е да възникне въпросът, как биха стояли нещата, ако холоморфната функция е представена не със степенен ред, а с ред по ортогонални полиноми или други специални функции, т.е. как и дали коефициентите на такъв ред влияят на геометрията на сходимост на реда. Нашият интерес към подобен подход на изследване на редове по специални функции, чрез които се представят изследваните холоморфни функции се дължи на една статия на З. Нехари [78] и на дълбоката ни убеденост, че детайлното изучаване и цялостното овладяване на сходството с теорията на степенните редове ще има стимулиращо въздействие върху по-нататъшното развитие на теорията за редовете.

И така, нека $J_\nu(z)$ са Беселовите функции, дефинирани с (1.5.2). Нека да разгледаме реда по Беселови функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.3.1)$$

и за краткост да го наречем *Беселов ред*.

В тази глава се изучават Беселови редове и тяхната геометрия на сходимост. По-точно, определя се къде тези редове са сходящи и къде не са, и освен това се определя къде сходимостта е равномерна и къде не е. Намират се кръговете им на сходимост и се изследва поведението на редовете по границите им, като се доказват твърдения, аналози на класическите теореми на Коши–Адамар, Абел, Таубер и Фату. Част от дефинициите и по-горе споменатите резултати се появяват първо в Панева-Коновска [89, 98]. Асимптотичните формули, получени за функциите на Бесел при “големи” стойности на индексите се използват за доказване на теоремите за сходимост на разглежданите редове.

2.4 Теорема от Коши–Адамаров тип

В тази секция е намерена областта на сходимост на Беселовия ред (2.3.1) и е доказана съответната теорема от Коши–Адамаров тип.

Теорема 2.4.1 (от Коши–Адамаров тип [99]). *Областта на сходимост на реда (2.3.1) е кръгът $D(0; R)$ с радиус на сходимост*

$$R = 2 \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n| / \Gamma(n+1))^{1/n} \right)^{-1}. \quad (2.4.1)$$

По-точно, редът, (2.3.1) е абсолютно сходящ в кръга $D(0; R)$ и разходящ в областта $|z| > R$. Случаите $R = 0$ и $R = \infty$ са включени в общия случай.

Доказателство. За удобство, да означим

$$u_n(z) = a_n J_n(z), \quad b_n = 2^{-1} (|a_n| / \Gamma(n+1))^{1/n}, \quad \Lambda = 1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Използвайки асимптотичната формула (1.6.2), получаваме

$$u_n(z) = a_n (z/2)^n (1 + \theta_n(z)) / \Gamma(n+1).$$

В доказателството се разглеждат три различни случая.

(1) $\Lambda = 0$, тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Да фиксираме $z \neq 0$. очевидно, съществува число N_1 , такова че за всяко $n > N_1$ са изпълнени неравенствата $|1 + \theta_n(z)| < 2$ и $2b_n < 1/|z|$, откъдето $|u_n(z)| = b_n^n |z|^n |1 + \theta_n(z)| < 2^{1-n}$. Абсолютната сходимост на (2.3.1) незабавно следва от това неравенство.

(2) $0 < \Lambda < \infty$. Първо, нека z принадлежи на отворения кръг $D(0; R)$, т.е. $|z|/R < 1$. Тогава $\limsup_{n \rightarrow \infty} |z|b_n < 1$. Следователно, съществува число $q < 1$, такова че $\limsup_{n \rightarrow \infty} |z|b_n \leq q$, откъдето $|z|^n b_n^n \leq q^n$. Използвайки асимптотичната формула за общия член $u_n(z)$ на реда (2.3.1), получаваме $|u_n(z)| = b_n^n |z|^n |1 + \theta_n(z)| \leq q^n |1 + \theta_n(z)|$. Тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(z) = 0$, то съществува число N_2 такова че $|1 + \theta_n(z)| < 2$ за всяко $n > N_2$, и тогава следва, че $|u_n(z)| \leq 2q^n$. Тъй като редът $\sum_{n=0}^{\infty} 2q^n$ е сходящ, то и редът (2.3.1) е сходящ, при това равномерно.

Сега, нека z лежи във външността на тази област, т.е. $|z|/R > 1$. Тогава $\limsup_{n \rightarrow \infty} |z|b_n > 1$ и следователно съществуват безбройно много стойности n_k на n със свойството $|z|^{n_k} b_{n_k}^{n_k} > 1$. Тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(z) = 0$, то съществува N_3 , такова че за $n_k > N_3$ е изпълнено $|1 + \theta_{n_k}(z)| \geq 1/2$, т.е. $|u_{n_k}(z)| \geq 1/2$ за безкрайно много стойности на n . Това означава, че не е изпълнено необходимото условие за сходимост за дадения ред и следователно редът (2.3.1) е разходящ.

- (3) $\Lambda = \infty$. Нека $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогава $b_{n_k} > 1/|z|$ за безкрайно много стойности n_k на n , откъдето $|u_{n_k}(z)| = |z|^{n_k} b_{n_k}^{n_k} |1 + \theta_{n_k}(z)| \geq 1/2$. С други думи, необходимото условие за сходимост на реда (2.3.1) не е изпълнено, откъдето заключаваме, че редът (2.3.1) е разходящ за всяко $z \neq 0$. $\square$

Следствие 2.4.1. [99] *Нека редът (2.3.1) е сходящ в точката $z_0 \neq 0$. Тогава той е абсолютно сходящ в кръга $D(0; |z_0|)$. Вътре в кръга $D(0; R)$, т.е. върху всеки затворен кръг $|z| \leq r$ ($r < R$), сходимостта е равномерна.*

Доказателство. Наистина, тъй като разглежданият ред е сходящ в точката $z_0 \neq 0$, то неговият радиус на сходимост R е положително число, и освен това точката z_0 лежи или в кръга на $D(0; R)$, или върху неговата граница — окръжността $C(0; R)$. Затова кръгът $D(0; |z_0|)$ е или част от областта на сходимост, или съвпада с него, откъдето следва абсолютната сходимост.

За да се докаже равномерността на сходимостта вътре в кръга на сходимост $D(0; R)$, е достатъчно да се докаже, че редът е равномерно сходящ върху всеки затворен кръг $|z| \leq r$ ($r < R$). За целта, избирайки точката ζ , $|\zeta| = \rho$, $r < \rho < R$ и разглеждайки реда (2.3.1), намираме горна оценка на $|a_n J_n(z)|$. Първо, да отбележим, че е възможно някои от стойностите на $J_n(\zeta)$, но само краен брой от тях, да са нула. Тогава, предвид (1.6.2), съществува число p , такова че изразът $|a_n J_n(z)|$ може да бъде записан както следва

$$\begin{aligned} |a_n J_n(z)| &= |a_n J_n(\zeta)| \frac{|J_n(z)|}{|J_n(\zeta)|} \\ &= |a_n J_n(\zeta)| \frac{|z^n| |1 + \theta_n(z)|}{|\zeta^n| |1 + \theta_n(\zeta)|} \leq |a_n J_n(\zeta)| \frac{|1 + \theta_n(z)|}{|1 + \theta_n(\zeta)|}, \end{aligned}$$

за всички стойности на $n > p$ и $|z| \leq r$.

Предвид (1.6.4) и равенството $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, се получават равенствата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \theta_n(z)) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \theta_n(\zeta))^{-1} = 1.$$

Следователно, съществува число A , такова че $|1 + \theta_n(z)| |1 + \theta_n(\zeta)|^{-1} \leq A$ и тогава $|a_n J_n(z)| \leq A |a_n J_n(\zeta)|$, за всички стойности на $n > p$ и $|z| \leq r$. Тъй

като редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(\zeta)$ е абсолютно сходящ, доказателството завършва с прилагане на критерия на Вайерщрас за равномерната сходимост. $\square$

Да отбележим, че самият кръг на сходимост не е непременно област на равномерна сходимост на реда и освен това, върху границата му редът може и да е разходящ.

2.5 Теорема от Абелов тип

Както е добре известно, теоремата на Абел не е вярна даже за редове от вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$, където $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ е подходяща пермутация от неотрицателни цели числа [122, стр. 92]. Поради това представлява интерес въпросът дали за редове по дадена редица от холоморфни функции е възможна теорема от типа на класическата теорема на Абел.

Положителен отговор на този въпрос е даден от Русев за редове по полиноми на Лагер и Ермит в монографиите му [112, Гл. 11, §11.3], [113, Гл. 4, §4].

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R < \infty$, $|z_0| = R$ и g_φ е произволна ъглова област от вида (2.1.4) с големина на ъгъла $2\varphi < \pi$ и връх в точката $z = z_0$, която е симетрична относно правата линия, минаваща през точките 0 и z_0 . Нека освен това d_φ е частта от ъгловата област g_φ , затворена между раменете на ъгъла и дъгата от окръжността вписана в ъгъла с център в координатното начало. Следващата теорема е свързана с равномерната сходимост на реда (2.3.1) в множеството d_φ и границата на сумата му в точката z_0 , стига само $z \in g_\varphi$.

Теорема 2.5.1 (от Абелов тип [99]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа и R е положително число, дефинирано от (2.4.1), $F(z)$ е сумата на реда (2.3.1) в областта $D(0; R)$, т.е.*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z), \quad z \in D(0; R), \quad (2.5.1)$$

и този ред е сходящ в точката z_0 от границата на $D(0; R)$. Тогава:

(I) *Редът (2.3.1) е равномерно сходящ в областта d_φ .*

(II) В сила е следното равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z_0), \quad (2.5.2)$$

стига само $z \in g_\varphi$.

Доказателство. (I) За доказване на равномерната сходимост е използвано неравенството (2.1.5), което играе ключова роля.

И така, нека $z \in d_\varphi$. Означавайки

$$\begin{aligned} S_k(z) &= \sum_{n=0}^k a_n J_n(z), \\ S_k(z_0) &= \sum_{n=0}^k a_n J_n(z_0), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(z_0) = s, \\ \beta_n &= S_n(z_0) - s, \quad \beta_n - \beta_{n-1} = a_n J_n(z_0), \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

получаваме

$$S_{k+p}(z) - S_k(z) = \sum_{n=0}^{k+p} a_n J_n(z) - \sum_{n=0}^k a_n J_n(z) = \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n J_n(z).$$

Съгласно Забележка 1.6.2, съществува естествено число N_0 , такова че $J_n(z_0) \neq 0$ когато $n > N_0$. Нека $k > N_0$ и $p > 0$. Тогава, използвайки означението

$$\gamma_n(z; z_0) = J_n(z)/J_n(z_0),$$

можем да запишем разликата $S_{k+p}(z) - S_k(z)$ по следния начин:

$$S_{k+p}(z) - S_k(z) = \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n J_n(z_0) \frac{J_n(z)}{J_n(z_0)} = \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n J_n(z_0) \gamma_n(z; z_0).$$

Сега, като се използва трансформацията на Абел [67, Том 1, Гл. 1, стр. 32, 3.4:7], се получава последователно:

$$S_{k+p}(z) - S_k(z) = \sum_{n=k+1}^{k+p} (\beta_n - \beta_{n-1}) \gamma_n(z; z_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_{k+p} \gamma_{k+p}(z; z_0) - \beta_k \gamma_{k+1}(z; z_0) - \sum_{n=k+1}^{k+p-1} \beta_n (\gamma_{n+1}(z; z_0) - \gamma_n(z; z_0)), \\
S_{k+p}(z) - S_k(z) &= (S_{k+p}(z_0) - s) \gamma_{k+p}(z; z_0) - (S_k(z_0) - s) \gamma_{k+1}(z; z_0) \\
&\quad + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} (S_n(z_0) - s) \times \left(\frac{J_n(z)}{J_n(z_0)} - \frac{J_{n+1}(z)}{J_{n+1}(z_0)} \right).
\end{aligned}$$

Като се използва последното равенство, може да се оцени модулът на разликата $S_{k+p}(z) - S_k(z)$ както следва:

$$\begin{aligned}
|S_{k+p}(z) - S_k(z)| &\leq |S_{k+p}(z_0) - s| |\gamma_{k+p}(z; z_0)| + |S_k(z_0) - s| |\gamma_{k+1}(z; z_0)| \\
&\quad + \sum_{n=k+1}^{k+p-1} |S_n(z_0) - s| \times \left| \frac{J_n(z)}{J_n(z_0)} - \frac{J_{n+1}(z)}{J_{n+1}(z_0)} \right|. \quad (2.5.4)
\end{aligned}$$

Поради (1.6.4) и равенствата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \theta_n(z_0))^{-1} = 1$, съществуват числа A и $N_1 > N_0$, такива че $|1 + \theta_n(z)| \leq A/2$ за всички естествени стойности на n и $|1 + \theta_n(\zeta)|^{-1} < 2$ за $n > N_1$, откъдето

$$|\gamma_n(z, z_0)| \leq A \quad \text{за } n > N_1. \quad (2.5.5)$$

По-нататък, означавайки за удобство

$$j_n(z, z_0) = \frac{J_n(z)}{J_n(z_0)} - \frac{J_{n+1}(z)}{J_{n+1}(z_0)} = \frac{z^n}{z_0^n} \times \left(\frac{1 + \theta_n(z)}{1 + \theta_n(z_0)} - \frac{z}{z_0} \times \frac{1 + \theta_{n+1}(z)}{1 + \theta_{n+1}(z_0)} \right)$$

и отчитайки, че $j_n(z_0, z_0) = 0$, може да се приложи лемата на Шварц (наречена на големия немски математик Карл Херман Амандус Шварц), за $j_n(z, z_0)$. Така се получава, че съществува константа C :

$$|j_n(z, z_0)| = |J_n(z)/J_n(z_0) - J_{n+1}(z)/J_{n+1}(z_0)| \leq C|z - z_0||z/z_0|^n,$$

откъдето, и съгласно (2.1.5):

$$\sum_{n=k+1}^{k+p+1} |j_n(z, z_0)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} C|z - z_0||z/z_0|^n = C|z_0| \times \frac{|z - z_0|}{|z_0| - |z|} < \frac{2C|z_0|}{\cos \varphi}. \quad (2.5.6)$$

Нека ε е произволно положително число. Вземайки предвид третото от равенствата (2.5.3), следва, че съществува положително число $N_2 > N_0$ толкова голямо, че

$$|S_n(z_0) - s| < \min \left(\frac{\varepsilon}{3A}, \frac{\varepsilon \cos \varphi}{6C|z_0|} \right) \quad \text{за } n > N_2. \quad (2.5.7)$$

Сега, нека $N = N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2)$ и $k > N$. Следователно (2.5.4)–(2.5.7) водят до

$$\begin{aligned} |S_{k+p}(z) - S_k(z)| &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon \cos \varphi}{6C|z_0|} \times \sum_{n=k+1}^{k+p+1} |j_n(z, z_0)| \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon \cos \varphi}{6C|z_0|} \times \frac{2C|z_0|}{\cos \varphi} = \varepsilon, \end{aligned}$$

с което завършва доказателството на (I).

(II) Втората част на теоремата може да се докаже по аналогичен начин, като се оцени модулът на второто събираемо на разликата

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z_0) - F(z) \\ &= \sum_{n=0}^k a_n (J_n(z_0) - J_n(z)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (J_n(z_0) - J_n(z)), \end{aligned}$$

“в близост” до върха на ъгловата област g_φ в частта d_φ . Обаче тук е дадено друго доказателство, като следствие от първата част. Именно, равномерната сходимост на реда съвместно с равенствата $\lim_{z \rightarrow z_0} J_n(z) = J_n(z_0)$ ($n \in \mathbb{N}_0$) потвърждават верността на (2.5.2), с което завършва доказателството за разглеждания случай. $\square$

Забележка 2.5.1. Ако редът (2.3.1) има краен и ненулев радиус на сходимост R , сходящ е в точката $z_0 \in C(0; R)$ и F е холоморфната функция, дефинирана с този ред в неговата област на сходимост $D(0; R)$, тогава по Теорема 2.5.1 следва, че

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in d_\varphi} F(z) = F(z_0),$$

т.е. рестрикцията на функцията F до всяко множество от вида $[d_\varphi]$ е непрекъсната в точката z_0 .

2.6 (J, z_0) - сумируемост

Нека $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $|z_0| = R$. Тъй като всички нули на $J_n(z)$ са реални, то $J_n(z_0) \neq 0$. За краткост, да означим

$$J_n^*(z; z_0) = \frac{J_n(z)}{J_n(z_0)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.6.1)$$

Забележка 2.6.1. Да отбележим, че всички функции от фамилията

$$J = \{J_n^*(z; z_0), \quad n = 0, 1, \dots\}$$

са цели функции и изпълняват условието $J_n^*(z_0; z_0) = 1$.

Дефиниция 2.6.1. Числовият ред (2.2.2) се нарича (J, z_0) -сумируем Ако редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^*(z; z_0). \quad (2.6.2)$$

е сходящ в кръга $D(0; R)$ и освен това съществува границата

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^*(z; z_0), \quad (2.6.3)$$

когато z остава върху отсечката $[0, z_0]$ (т.е. $z \rightarrow z_0$ радиално).

Забележка 2.6.2. Всяка (J, z_0) - сумируемост е регулярна, и това свойство е просто частен случай от Теорема 2.5.1.

За удобство, с цел да направим тази дефиниция по-универсална и приложима за разнообразни разглеждания, ние я перефразираме. За тази цел, вземайки предвид Забележка 2.6.1, първо въвеждаме още едно означение. Нека $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, $|z_0| = R$, $0 < R < \infty$ и

$$(J; z_0) := \{j_n : j_n \text{ — цяла функция, } j_n(z_0) = 1\}_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (2.6.4)$$

Сега, разглеждайки реда даден по-долу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z), \quad j_n \in (J; z_0), \quad (2.6.5)$$

Дефиниция 2.6.1 може да се запише както следва.

Дефиниция 2.6.2. Числовият ред (2.2.2) се нарича (J, z_0) -сумируем, ако редът (2.6.5) е сходящ в кръга $D(0; R)$, и освен това съществува границата

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z), \quad (2.6.6)$$

когато z остава върху отсечката $[0, z_0)$ (т.е. $z \rightarrow z_0$ радиално).

Обаче, използването на тази дефиниция изисква да се държи сметка за регулярността на сумирането.

2.7 Теорема от Тауберов тип

С цел получаване на резултати от възможно най-прост вид, се нуждаем от прецизиране на системата от функции. За да получим такава фамилия от Беселови функции по чиито елементи да разгледаме съответния ред в комплексната равнина, както и да го изследваме за сходимост, модифицираме леко функциите J_n , умножавайки всяка от тях със съответен коефициент. И така, по-нататък използваме означението

$$\tilde{J}_n(z) = n! 2^n J_n(z), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.7.1)$$

и разглеждаме реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_n(z), \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.7.2)$$

който е абсолютно сходящ в отворения кръг $D(0; R)$ с радиус

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} \right)^{-1},$$

и е разходящ в областта $|z| > R$ (съгласно Теорема 2.4.1, равенство (2.4.1)).

Както се споменава в Секция 2.2, теоремата на Таубер е твърдение, което свързва Абеловата сумируемост и обичайната сходимост на числови редове при налагане на някакви условия върху общия член на разглеждания ред. Там е цитиран класически резултат в тази насока. Аналогични резултати са получени за сумиране по полиноми на Лагер в [111]. Тук ние

даваме теорема от Тауберов тип за (J, z_0) - сумируемост, дефинирана с Дефиниция 2.6.1.

За тази цел, нека да разгледаме числовия ред (2.2.2), $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|z_0| = R$, $0 < R < \infty$, и $J_n^*(z; z_0)$ да бъде дадена с равенството (2.6.1). Нека редът (2.7.2) е сходящ за $z \in D(0; 1)$ и

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^*(z; z_0), \quad z \in D(0; R). \quad (2.7.3)$$

За пълнота, само да отбележим, че

$$J_n^*(z; z_0) = \frac{J_n(z)}{J_n(z_0)} = \frac{\tilde{J}_n(z)}{\tilde{J}_n(z_0)},$$

и че използването на реда (2.7.2) е за предпочитане пред (2.3.1), защото радиусите на сходимост на редовете (2.7.2) и (2.7.3) са едновременно крайни или безкрайни. По-конкретно, ако (2.7.2) има радиус на сходимост 1, то (2.7.3) има радиус на сходимост $|z_0|$.

Следната теорема свързва (J, z_0) - сумируемост на числовия ред (2.2.2) и неговата обичайна сходимост при наложени допълнителни условия за ръста на общия член a_n .

Теорема 2.7.1 (от Тауберов тип [99]). *Ако редът (2.2.2) е (J, z_0) - сумируем и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0, \quad (2.7.4)$$

тогава той е сходящ.

Доказателство. Нека z лежи върху отсечката $[0, z_0]$. Използвайки асимптотичната формула (1.6.2) за функциите на Бесел от първи род, получаваме:

$$a_n J_n^*(z; z_0) = a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \frac{1 + \theta_n(z)}{1 + \theta_n(z_0)} = a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \left(1 + \tilde{\theta}_n(z; z_0) \right),$$

където $\tilde{\theta}_n(z; z_0) = \frac{\theta_n(z) - \theta_n(z_0)}{1 + \theta_n(z_0)}$. Тогава $\tilde{\theta}_n(z; z_0) = O(1/n)$, поради (1.4.7).

Нека да запишем (2.6.2) във вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^*(z; z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \left(1 + \tilde{\theta}_n(z; z_0) \right). \quad (2.7.5)$$

Означавайки

$$w_n(z) = a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \tilde{\theta}_n(z; z_0), \quad (2.7.6)$$

разглеждаме реда $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$. Съгласно условието (2.7.4), числовата редица $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$, бидейки сходяща, е ограничена. Тогава, тъй като $|w_n(z)| \leq |a_n| |\tilde{\theta}_n(z; z_0)|$ и предвид (1.6.4), съществува константа C , такава че $|w_n(z)| \leq C/n^2$ за всички естествени числа n . Тъй като $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ е сходящ, редът $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ е също сходящ, даже абсолютно и равномерно върху отсечката $[0, z_0]$. Следователно, сменяйки реда на границата и сумирането, предвид равенството $\lim_{z \rightarrow z_0} w_n(z) = 0$, заключаваме, че

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} w_n(z) = 0. \quad (2.7.7)$$

Предположението, че редът (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем влече съществуването на границата (2.6.3). Тогава, имайки предвид , че (2.7.5) може да се запише във вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^*(z; z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \tilde{\theta}_n(z; z_0),$$

заключаваме, че границата

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \quad (2.7.8)$$

също съществува и, освен това предвид (2.7.7) е изпълнено

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^*(z; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n. \quad (2.7.9)$$

От съществуването на границата (2.7.8) следва, че числовият ред (2.2.2) е A -сумируем. Тогава съгласно Теорема 2.2.1, редът (2.2.2) е сходящ. $\square$

По-надолу е направено обобщение от Литълудов тип на $o(1/n)$ версията на теоремата от Тауберов тип (Теорема 2.7.1).

Теорема 2.7.2 (от Литълудов тип [99]). *Ако редът (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем и коефициентите a_n удовлетворяват условието*

$$a_n = O(1/n), \quad (2.7.10)$$

то редът (2.2.2) е сходящ.

Доказателство. Нека z принадлежи на отсечката $[0, z_0]$. Най-напред да разгледаме израза $w_n(z)$, даден с (2.7.6). Използвайки условията (2.7.10) и (1.6.4), можем да заключим отново, че съществува константа C , такава че $|w_n(z)| \leq C/n^2$ за всички стойности на $n \in \mathbb{N}$. Оттук нататък, доказателството следва това на Теорема 2.7.1, използвайки Теорема 2.2.2 вместо Теорема 2.2.1. $\square$

2.8 Теорема от типа на Фату

Изучавайки поведението на реда (2.7.2) по периферията на кръга $D(0; R)$ и разглеждайки за удобство случая $R = 1$, ние даваме зависимост между разпределението на регулярните точки на функцията (2.8.1) върху окръжността $C(0; 1)$ и равномерната сходимост на реда (2.7.2) върху множеството от тези точки. Твърдения, които се отнасят до дискутираното свойство са установени за редове по полиноми на Лагер и Ермит (виж например Русев [113]). Тук е дадена теорема от такъв тип за разглежданите Беселови редове (2.7.2).

Теорема 2.8.1 (от типа на Фату [99]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условията $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1$, и $F(z)$ е сумата на реда (2.7.2) в единичния кръг $D(0; 1)$, т.е.*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_n(z), \quad z \in D(0; 1). \quad (2.8.1)$$

Нека σ е произволна дъга от единичната окръжност $C(0; 1)$ всички точки на която (включително краищата) са регулярни за функцията F . Тогава редът (2.7.2) е сходящ, даже равномерно, върху дъгата σ .

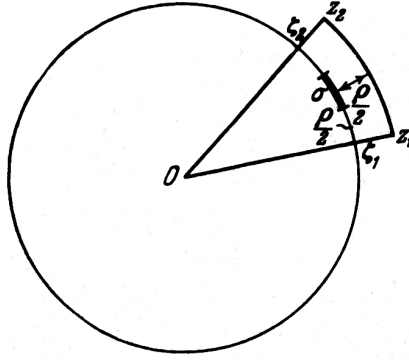
Доказателство. Тъй като всички точки на дъгата σ са регулярни за функцията $F(z)$, то съществува област $G \supset \sigma$ където функцията F може да

бъде продължена. Означавайки $\tilde{G} = G \cup D(0; 1)$, ние дефинираме функция ψ в областта $\tilde{G}$, удовлетворяваща условието

$$\psi(z) = F(z), \quad z \in D(0; 1). \quad (2.8.2)$$

По-точно, това означава, че ψ е еднозначно аналитично продължение на F в областта $\tilde{G}$.

Нека $\rho > 0$ е разстоянието между границата $\partial\tilde{G}$ на областта $\tilde{G}$ и дъгата σ ($\partial\tilde{G}$ съдържа част от единичнатаа окръжност $|z| = 1$).



Фигура 2.8.1.

Да вземем точките ζ_1, ζ_2 , за които да са изпълнени свойствата:

$$\zeta_1, \zeta_2 \notin \sigma, \quad |\zeta_1| = |\zeta_2| = 1,$$

такива че разстоянията на всяка една от точките ζ_1, ζ_2 и съответния поблизък край на дъгата σ са равни на $\rho/2$ (виж Фигура 2.8.1). Нека точките $z_{1,2}$ и сектора Δ са зададени както следва

$$z_1 = \zeta_1(1 + \rho/2), \quad z_2 = \zeta_2(1 + \rho/2), \quad \Delta = Oz_1z_2.$$

Да дефинираме също и помощната функция

$$\varphi_n(z) = \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k(z) \quad (2.8.3)$$

и да отбележим, че съгласно Забележка 1.6.2 съществува естествено число N_0 , такова че $\tilde{J}_n(z) \neq 0$ когато $z \neq 0$ и $n > N_0$. Сега, оставяйки $n \geq N_0$, въвеждаме означението

$$\omega_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\tilde{J}_{n+1}(z)}(z - \zeta_1)(z - \zeta_2), \quad z \neq 0; \quad \omega_n(0) = a_{n+1}\zeta_1\zeta_2. \quad (2.8.4)$$

Поради (2.8.1) – (2.8.4) и сходимостта на реда (2.7.2) в единичния кръг, функцията (2.8.4), конструирана по-горе, е холоморфна в околност на началото. Затова тя е холоморфна в цялата област $\tilde{G}$, където φ_n е също холоморфна. За оценката от която се нуждаем, функцията ω_n се предпочита пред φ_n . Именно, в точките от границата $\partial\Delta$ на сектора Δ , нейният знаменател, съдържащ $|z|^n$, става “голям” за “големи” стойности на n , но в точките на радиуса “в близост” до $\zeta_{1,2}$, съответните разлики $z - \zeta_{1,2}$ са “малки” по модул.

За да покажем, че редицата $\left\{ \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k(z) \right\}$ е равномерно сходяща вър-

ху дъгата σ , е достатъчно да покажем, че редицата $\{\omega_n(z)\}_{n=N_0}^\infty$ клони равномерно към нула върху границата $\partial\Delta$ на сектора $\Delta = O z_1 z_2$, който е компактно множество и след това да оценим $\varphi_n(z)$ върху дъгата σ .

След тези разяснения ние сме готови да оценим модула $|\omega_n(z)|$ върху различните части на границата $\partial\Delta$. За целта да се върнем към (1.6.4). Само да споменем, че тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, то съществуват числа C и $\tilde{N} > N_0$, такива че $|1 + \theta_n(z)| \leq C/2$ за всички стойности на $n \in \mathbb{N}$ и $1/2 \leq |1 + \theta_n(z)| \leq 2$ за $n > \tilde{N}$ върху произволно компактно подмножество на $\mathbb{C}$.

Сега, вземайки $\varepsilon > 0$ и означавайки

$$R = 1 + \rho/2, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon \rho^3}{8(8CR^2 + \rho)}, \quad M = \max_{z \in [\Delta]} |\psi(z)| \quad ([\Delta] = \Delta \cup \partial\Delta),$$

разглеждаме четири различни случая, както следва.

(1) Първо, нека $z \in (O, \zeta_1) \cup (O, \zeta_2) \subset D(0; 1)$.

Съгласно (2.8.3), в единичния кръг имаме последователно:

$$\omega_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} \frac{\tilde{J}_{n+k+1}(z)}{\tilde{J}_{n+1}(z)} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2),$$

$$\omega_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} z^k \frac{(1 + \theta_{n+k+1}(z))}{(1 + \theta_{n+1}(z))} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2). \quad (2.8.5)$$

Тъй като са в сила едновременно $a_n \rightarrow 0$ и $|z - \zeta_1||z - \zeta_2| < 2(1 - |z|)$, то съществува число $N_1 = N_1(\varepsilon_1) > \tilde{N}$, такава че

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &< \varepsilon_1 \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \left| \frac{(1 + \theta_{n+k+1}(z))}{(1 + \theta_{n+1}(z))} \right| |(z - \zeta_1)||z - \zeta_2| \\ &< 2C\varepsilon_1 \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k (1 - |z|) = 2C\varepsilon_1 \end{aligned}$$

за $n > N_1$, т.е.

$$|\omega_n(z)| < 2C\varepsilon_1. \quad (2.8.6)$$

(2) $z \in (\zeta_1, z_1) \cup (\zeta_2, z_2)$.

В този случай $|z - \zeta_1| = |z| - 1$, $|z - \zeta_2| \leq |z| + |\zeta_2| < 2R$, и вземайки под внимание (1.6.2) и (2.8.3), можем да запишем следните неравенства за абсолютната стойност на $\omega_n(z)$

$$\omega_n(z) = \frac{\psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k (1 + \theta_k(z))}{z^{n+1}(1 + \theta_{n+1}(z))} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2),$$

именно

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &\leq \frac{M + \sum_{k=0}^n |a_k| |z|^k (1 + \theta_k(z))}{|z|^{n+1} (1 + \theta_{n+1}(z))} 2R(|z| - 1) \\ &< 2R \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k| R^k \right) \frac{(|z| - 1)}{|z|^{n+1}} + 2\varepsilon_1 R C \frac{(|z| - 1)}{|z|^{n+1}} \sum_{k=N_1+1}^n |z|^k. \end{aligned}$$

По-нататък, имайки предвид, че от една страна

$$\frac{(|z| - 1)}{|z|^{n+1}} < \frac{(|z| - 1)}{|z|^{n+1} - 1} = \frac{1}{|z|^n + \dots + 1} < \frac{1}{n + 1},$$

а от друга страна:

$$\sum_{k=N_1+1}^n |z|^k = \frac{|z|^{n+1} - |z|^{N_1+1}}{(|z| - 1)} < \frac{|z|^{n+1}}{(|z| - 1)},$$

ние заключаваме, че

$$|\omega_n(z)| < \frac{2R}{n+1} \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k|R^k \right) + 2\varepsilon_1 RC.$$

Тогава, тъй като $n^{-1} \rightarrow 0$, то съществува число $N_2 = N_2(\varepsilon_1) > N_1$, такова че

$$\frac{2R}{n+1} \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k|R^k \right) < \varepsilon_1$$

за $n > N_2$, т. е.

$$|\omega_n(z)| < (1 + 2RC)\varepsilon_1. \quad (2.8.7)$$

(3) z принадлежи на дъгата $\widehat{z_1 z_2}$ (включително краищата).

Тогава $|z - \zeta_1| < 2R$, $|z - \zeta_2| < 2R$ и следователно, аналогично на случая (2), могат да се направят следващите оценки:

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &< \frac{4R^2 \left(2M + \sum_{k=0}^n C|a_k|R^k \right)}{R^{n+1}} < \frac{4 \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k|R^k \right)}{R^{n-1}} \\ &+ \frac{4\varepsilon_1 C \left(\sum_{k=N_1+1}^n R^k \right)}{R^{n-1}} < \frac{4 \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k|R^k \right)}{R^{n-1}} + \frac{8\varepsilon_1 CR^2}{\rho}. \end{aligned}$$

Тъй като $R^{-n} \rightarrow 0$, съществува число $N_3 = N_3(\varepsilon_1) > N_1$, такова че да е изпълнено неравенството

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8CR^2}{\rho} + 1 \right) \varepsilon_1, \quad (2.8.8)$$

за $n > N_3$.

(4) $z \in \{O, \zeta_1, \zeta_2\}$.

В този случай имаме $\omega_n(0) = a_{n+1}\zeta_1\zeta_2$, откъдето $|\omega_n(0)| = |a_{n+1}| < \varepsilon_1$ за $n > N_1$, и $\omega_n(\zeta_{1,2}) = 0$, т.е.

$$|\omega_n(z)| < \varepsilon_1 \quad (2.8.9)$$

за $n > N_1$.

Нека $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ и $n > N$, тогава предвид неравенствата (2.8.6) – (2.8.9), може да се запише, че:

$$|\omega_n(z)| < \max \left(2C\varepsilon_1, (2RC + 1)\varepsilon_1, \left(\frac{8CR^2}{\rho} + 1 \right) \varepsilon_1 \right) = \left(\frac{8CR^2}{\rho} + 1 \right) \varepsilon_1$$

върху границата на областта Δ .

Следователно, съгласно принципа за максимума на модула

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8CR^2 + \rho}{\rho} \right) \varepsilon_1, \quad z \in \sigma. \quad (2.8.10)$$

Най-сетне, съгласно (1.6.2), (2.8.3) и (2.8.5), тъй като $|z| = 1$ върху дъгата σ и освен това са в сила неравенствата

$$|z - \zeta_1| \geq \frac{\rho}{2} \text{ и } |z - \zeta_2| \geq \frac{\rho}{2} \text{ за } z \in \sigma,$$

се получава следната оценка

$$|\omega_n(z)| = \frac{\left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k(z) \right|}{|z^{n+1}| |1 + \theta_{n+1}(z)|} |z - \zeta_1| |z - \zeta_2| > \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{4} \left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k(z) \right|, \quad (2.8.11)$$

след което едновременното прилагане на двете неравенства (2.8.10) и (2.8.11) води до неравенството

$$\left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k(z) \right| < \frac{8}{\rho^2} |\omega_n(z)| < \frac{8\varepsilon_1}{\rho^3} (8CR^2 + \rho) = \varepsilon, \quad z \in \sigma,$$

което доказва теоремата. □

Глава 3

Редове по функции на Бесел. Свръхсходимост

3.1 Класически резултати за степенните редове

Да припомним, че е възможно даден степенен ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ с краен радиус на сходимост $0 < R < \infty$ да бъде сходящ или разходящ, в някои точки от контура $C(0; R)$. Тези точки могат да са регулярни или сингулярни за неговата сума f , но редът е разходящ извън кръга на сходимост. Обаче, понякога е възможно да съществува подредица от неговите парциални суми, която е сходяща в околност на регулярна точка на сумата. Преди да въведем следващата дефиниция [67, Том 2, стр. 500], да означим

$$s_p(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^k, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.1)$$

Дефиниция 3.1.1. *Даден степенен ред с краен радиус на сходимост R се нарича свръхсходящ, ако съществува подредица $\{s_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на редицата от парциални суми $\{s_p\}_{p=0}^{\infty}$ и област G , съдържаща отворения кръг $D(0; R)$ и $G \cap \partial D(0; R) \neq \emptyset$, такава че редицата $\{s_{p_k}\}$ е равномерно сходяща в G .*

Дефиниция 3.1.2. *Казва се, че функцията f (или редът), даден с (2.2.3), има Адамарови празнини, ако съществуват две редици $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ със свойствата*

$$q_{n-1} \leq p_n < q_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} = 1 + \theta \quad (\theta > 0),$$

и $a_k = 0$ за $p_n < k < q_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Така, започвайки с областта на сходимост и поведението на реда “в близост” до нейната граница, минавайки през възможна равномерна сходимост върху произволна затворена дъга от границата, всички точки на която са регулярни за нейната сума f , стигаме до естествения въпрос: “Какво условие да се наложи на степенния ред, че да гарантира съществуването на подредица $\{s_{p_k}\}$, която е сходяща извън кръга на сходимост?”. Отговорът на този въпрос е даден в началото на 20-ти век от Островски [85], [86], виж също [56]. Именно, неговият класически резултат гласи, че даден степенен ред с регулярни точки по границата на кръга на сходимост, който притежава Адамарови празнини, е свръхсходящ. Да обърнем внимание на факта, че само от съществуването на Адамарови празнини не следва свръхсходимост. Например, степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} z^{k_n}$, за който $k_{n+1} \geq (1+\theta)k_n$ ($\theta > 0$) и $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_{k_n}|)^{1/k_n} = 1$, има Адамарови празнини, но независимо от това той не е свръхсходящ. Неговата естествена граница на аналитичност е единичната окръжност $|z| = 1$, и това не е нещо друго, а теоремата на Адамар за празнините [25, 26].

В интерес на истината, трябва да отбележим, че появата на празнини в никакъв случай не е задължително свързана с непродължимостта на степенния ред. Нещата стоят съвсем различно при резултата на Островски, цитиран по-горе. Оказва се, че условието за съществуване на празнини е съществено свързано с разглеждания проблем. Ясно е, че ако към даден свръхсходящ ред с радиус на сходимост 1 се добави произволен степенен ред с радиус на сходимост по-голям от 1, то новият степенен ред също е свръхсходящ. Нещо повече, всички свръхсходящи степенни редове се получават по този начин, т.е. в сила е забележителното твърдение, дадено от Островски в публикацията му [87]. Този класически резултат гласи, че ако редицата $s_{n_k}(z)$ от парциалните суми на реда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, с радиус на сходимост 1 е равномерно сходяща в околност на точка от единичната окръжност, то съществува представяне от вида

$$f(z) = h(z) + g(z),$$

където степенният ред $h(z)$ има Адамарови празнини, а радиусът на сходимост на степенния ред $g(z)$ е по-голям от 1.

3.2 Теорема за свръхсходимост

За да въведем съответното понятие “свръхсходимост” и “празнини” за редовете (2.7.2), по аналогия с Дефиниция 3.1.1 и 3.1.2, редът (2.2.3) трябва да бъде заместен от Беселовия ред (2.7.2) а редицата $\{s_p\}$, дефинирана с (3.1.1) – съответно с редицата $\{S_p\}$, с общ член

$$S_p(z) = \sum_{k=0}^p a_k \tilde{J}_k(z), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.1)$$

С други думи, могат да се дадат следните дефиниции.

Дефиниция 3.2.1. Беселовият ред (2.7.2), с краен радиус на сходимост R , се нарича свръхсходящ, ако съществува подредица $\{S_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на редицата от парциалните суми $\{S_p\}_{p=0}^{\infty}$ и област G , съдържаща отворения кръг $D(0; R)$, $G \cap \partial D(0; R) \neq \emptyset$, такива че редицата $\{S_{p_k}\}$ е равномерно сходяща вътре в G .

Дефиниция 3.2.2. Казва се, че функцията F (или редът), даден с (2.7.2), притежава Адамарови празнини, ако съществуват две редици $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, със свойствата $q_{n-1} \leq p_n \leq q_n$, $(1 + \theta)p_n < q_n$ ($\theta > 0$) и $a_k = 0$ за $p_n < k < q_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Забележка 3.2.1. За да се въведе съответното понятие за “свръхсходимост” и “празнини” за даден ред по произволна фамилия от функции, по аналогия с Дефиниция 3.2.1 и 3.2.2, е нужно редицата $\{S_p\}$, дефинирана с (3.2.1), и нейната подредица $\{S_{p_k}\}$ да се заместят със съответната редица от парциалните им суми $\{S_p\}$ и техните подредици.

И така, вече сме готови да формулираме следващите резултати, които се отнасят за редове с Адамарови празнини по функциите на Бесел от първи род, дефинирани с (2.7.1).

Теорема 3.2.1 (за свръхсходимост [99]). Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условието $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1$, нека $F(z)$ е сумата на реда (2.7.2) в отворения единичен кръг $D(0; 1)$, $F(z)$ има поне една регулярна точка, принадлежаща на окръжността $C(0; 1)$, и нека $F(z)$ притежава Адамарови празнини. Тогава редът (2.7.2) е свръхсходящ.

Доказателство. Без ограничение на общността може да се предполага, че точката $z_0 = 1$ е регулярна за функцията F . Това би означавало, че F е аналитично продължима в околност U на точката 1. Означавайки $\tilde{U} = U \cup D(0; 1)$, дефинираме функцията ψ в областта $\tilde{U}$ с равенството

$$\psi(z) = F(z), \quad z \in D(0; 1).$$

Това означава, че ψ е еднозначно аналитично продължение на функцията F в областта $\tilde{U}$.

Оставяйки $\theta > 0$ и вземайки редиците $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ със свойствата $q_n \geq (1 + \theta)p_n$, $p_n \geq q_{n-1}$ и $a_k = 0$ за $p_n < k < q_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), дефинираме помощната функция

$$\varphi_n(z) = \psi(z) - S_{p_n} = \psi(z) - \sum_{k=0}^{p_n} a_k \tilde{J}_k(z). \quad (3.2.2)$$

За да докажем, че редицата $\{S_{p_n}\}$ е равномерно сходяща вътре в областта $\tilde{U}$, ние възнамеряваме да приложим теоремата на Адамар за трите кръга [67, Том 2]. За целта, вземайки δ и ω по такъв начин, че $0 < \omega < \delta < 1/2$, разглеждаме трите окръжности C_1, C_2, C_3 , с център в точката $1/2$, имащи радиуси съответно $1/2 - \delta$, $1/2 + \omega$, $1/2 + \delta$, такива че $C_3 \subset \tilde{U}$, и след това означаваме

$$M_{n,j} = \max_{z \in C_j} |\varphi_n(z)| \quad j = 1, 2, 3; \quad M = \max_{z \in C_3} |\psi(z)|.$$

Преди да оценим $|\varphi_n(z)|$ да се върнем към неравенството (1.6.4). Само да споменем, че тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, то съществува число B , такова че върху произволно компактно подмножество на $\mathbb{C}$ е изпълнено неравенството $|1 + \theta_n(z)| \leq B$ за всички стойности на $n \in \mathbb{N}$.

Нека сега $0 < \eta < \delta/2$. Това води до съществуването на константа $A = A(\eta)$, такова че $|a_k| \leq AB^{-1}(1 - \eta)^{-k}$. По-нататък, за да се намери горна оценка на модула $|\varphi_n(z)|$, са разгледани три различни случая.

I. Първо, нека $z \in C_1 \subset D(0; 1)$. Съгласно (3.2.2) в единичния кръг е изпълнено

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=q_n}^{\infty} a_k \tilde{J}_k(z).$$

Следователно

$$\begin{aligned} |\varphi_n(z)| &\leq \sum_{k=q_n}^{\infty} |a_k \tilde{J}_k(z)| = \sum_{k=q_n}^{\infty} |a_k z^k (1 + \theta_k(z))| = \sum_{k=q_n}^{\infty} |a_k| |1 + \theta_k(z)| |z^k| \\ &\leq A \sum_{k=q_n}^{\infty} (1 - \eta)^{-k} (1 - \delta)^k = A \left(1 - \frac{1 - \delta}{1 - \eta}\right)^{-1} \left(\frac{1 - \delta}{1 - \eta}\right)^{q_n}, \end{aligned}$$

откъдето

$$M_{n,1} = O\left(\left(\frac{1 - \delta}{1 - \eta}\right)^{q_n}\right) = O\left(\left(\frac{1 - \delta}{1 - \eta}\right)^{(1+\theta)p_n}\right). \quad (3.2.3)$$

II. Нека сега $z \in C_3$. В този случай

$$\begin{aligned} |\varphi_n(z)| &= |\psi(z) - S_{p_n}| = \left|\psi(z) - \sum_{k=0}^{p_n} a_k \tilde{J}_k(z)\right| \\ &\leq |\psi(z)| + \sum_{k=0}^{p_n} |a_k \tilde{J}_k(z)| \leq M + \sum_{k=0}^{p_n} |a_k| |1 + \theta_k(z)| |z^k| \\ &\leq M + A \sum_{k=0}^{p_n} \left(\frac{1 + \delta}{1 - \eta}\right)^k = O\left(\left(\frac{1 + \delta}{1 - \eta}\right)^{p_n}\right), \end{aligned}$$

и следователно

$$M_{n,3} = O\left(\left(\frac{1 + \delta}{1 - \eta}\right)^{p_n}\right). \quad (3.2.4)$$

III. Накрая, нека $z \in C_2$. Тогава предвид (3.2.3) и (3.2.4) и съгласно теоремата на Адамар за трите кръга (за подробности виж [67, Том 2, формула (3.2:2)]), можем да запишем

$$M_{n,2} = O\left(\left(\left(\frac{1 - \delta}{1 - \eta}\right)^{(1+\theta) \ln \frac{1+2\delta}{1+2\omega}} \left(\frac{1 + \delta}{1 - \eta}\right)^{\ln \frac{1+2\omega}{1-2\delta}}\right)^{p_n}\right). \quad (3.2.5)$$

Да отбележим, че границата на вътрешната част на (3.2.5), именно

$$\left(\frac{1 - \delta}{1 - \eta}\right)^{(1+\theta) \ln \frac{1+2\delta}{1+2\omega}} \left(\frac{1 + \delta}{1 - \eta}\right)^{\ln \frac{1+2\omega}{1-2\delta}},$$

е равна на

$$a = (1 - \delta)^{(1+\theta) \ln(1+2\delta)} (1 + \delta)^{-\ln(1-2\delta)} \quad (3.2.6)$$

когато ω и η клонят към 0. Освен това, ако δ клони към 0, то $a < 1$. Наистина, вземайки логаритъм от a , получаваме

$$\begin{aligned} \ln a &= (1 + \theta) \ln(1 + 2\delta) \ln(1 - \delta) - \ln(1 - 2\delta) \ln(1 + \delta) \\ &= (1 + \theta)(2\delta + O(\delta^2))(-\delta + O(\delta^2)) - (-2\delta + O(\delta^2))(\delta + O(\delta^2)) \\ &= (1 + \theta)(-2\delta^2 + O(\delta^3)) + 2\delta^2 + O(\delta^3) = -2\theta\delta^2 + O(\delta^3). \end{aligned}$$

Следователно $\ln a < 0$ когато $\delta \rightarrow 0$ и по тази причина $a < 1$ при δ клонящо към 0.

Горе-изложеното в (III) показва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{n,2} = 0$. Допълнително, съгласно Следствие 2.4.1, $\{S_p\}$ е равномерно сходяща вътре в кръга $D(0; 1)$. По тези две причини редицата $\{S_{p_n}\}$ е равномерно сходяща вътре в цялата област $\tilde{U}$. $\square$

Теорема 3.2.2 (от Адамаров тип за празнините [99]). *Нека $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяващи условията*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_{k_n}|)^{1/k_n} = 1$$

за $k_{n+1} \geq (1 + \theta)k_n$ ($\theta > 0$), $a_k = 0$ за $k_n < k < k_{n+1}$ и $F(z)$ е сумата на реда (2.7.2) в единичния кръг $D(0; 1)$, т.е.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} \tilde{J}_{k_n}(z), \quad z \in D(0; 1).$$

Тогава всички точки на единичната окръжност $C(0; 1)$ са сингулярни за функцията F , т.е. единичната окръжност е естествена граница на аналитичност за реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} \tilde{J}_{k_n}(z). \quad (3.2.7)$$

Доказателство. Наистина, нека $|z_0| = 1$ и z_0 е регулярна точка за F . Означавайки $p_n = k_n$, $q_n = k_{n+1}$, можем да заключим, че $q_{n-1} \leq p_n < q_n$, $(1 + \theta)p_n \leq q_n$ ($\theta > 0$) и $S_{p_n} = \sum_{s=0}^n a_{k_s} \tilde{J}_{k_s}(z)$. Следователно, аналогично на доказателството на Теорема 3.2.1, редицата S_{p_n} е равномерно сходяща в околност на z_0 . Обаче радиусът на сходимост на реда (3.2.7) е $R = 1$ и това води до противоречие. $\square$

3.3 Обратна теорема за свръхсходимость

Аналогично на случая за степенните редове, добавянето на ред от вида (2.7.2) с радиус на сходимост по-голям от 1 към даден свръхсходящ ред от същия вид с радиус на сходимост 1, запазва свръхсходимостта на дадения ред. Твърдение от този вид, но за редове на Фурие е установено от Ковачева в публикацията [57].

По-нататък е дадено твърдение, обратно на Теорема 3.2.1, което гласи, че свръхсходящият ред (2.7.2) с радиус на сходимост 1 може да се представи като сума на два реда – първият с радиус на сходимост по-голям от 1, а вторият – с Адамарови празнини. По-точно, вярна е следната теорема.

Теорема 3.3.1 (за свръхсходимость [101]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условието $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1$, нека $F(z)$ е сумата на реда (2.7.2) в единичния кръг $D(0; 1)$ и редът (2.7.2) е свръхсходящ. Тогава $F(z)$ може да се представи във вида*

$$F(z) = H(z) + G(z), \quad (3.3.1)$$

където редът $H(z)$ притежава Адамарови празнини, а радиусът на сходимост на реда $G(z)$ е по-голям от 1.

Доказателство. От свръхсходимостта на реда (2.7.2) следва, че съществува окръжност $\tilde{\gamma} \subset \tilde{D}(0; 1)$ и подредица на редицата от парциалните му суми

$$S_{k_n}(z) = \sum_{m=0}^{k_n} a_m \tilde{J}_m(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.3.2)$$

такива че $\{S_{k_n}(z)\}$ е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$. Избираме индексите k_n по такъв начин, че

$$k_{n+1} > \alpha_n k_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 1), \quad (3.3.3)$$

и разглеждаме функцията

$$u_n(z) = \frac{1}{k_n} \log \left| \frac{S_{k_n}(z)}{z^{k_n}} \right| = \frac{1}{k_n} \log |S_{k_n}(z)| - \log |z|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.3.4)$$

която е субхармонична в множеството, разглеждано по-нататък.

Очевидно, съществува константа N_1 , такава че неравенството $u_n(z) < -q$ е в сила за $z \in \tilde{\gamma}$ and $n > N_1$, а $q > 0$ и не зависи нито от z нито от n .

Нека сега $\varepsilon > 0$. Означавайки $\delta = e^{-\varepsilon/2}$, получаваме, че $\delta < 1$. Тъй като максимумът на модула $\left| \frac{S_{k_n}(z)}{z^{k_n}} \right|$ в затворената обвивка $[\tilde{D}(0; \delta)]$ на множеството $\tilde{D}(0; \delta)$ се достига върху окръжността $C(0; \delta)$, то означавайки

$$m_{\delta,n} = \max_{|z|=\delta} |S_{k_n}(z)|,$$

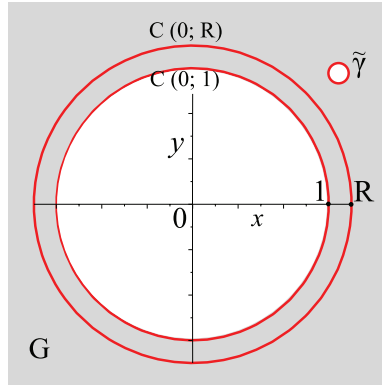
получаваме следното неравенство в множеството $|z| \geq \delta$:

$$u_n(z) \leq \frac{1}{k_n} \log m_{\delta,n} - \log \delta = \frac{1}{k_n} \log m_{\delta,n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

и следователно, последното е изпълнено и в множеството $|z| \geq 1$. Тъй като

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \log m_{\delta,n} = 0,$$

то съществува число N_2 , такава че за всички стойности на $n > N_2$ за $|z| > \delta$ и в частност също и за $|z| \geq 1$, е изпълнено неравенството $u_n(z) \leq \varepsilon$. Заедно с двете криви $\tilde{\gamma}$ и $C(0; 1)$, разглеждаме и окръжността $C(0; R)$ с радиус $R > 1$, която лежи в областта G , ограничена от кривите $\tilde{\gamma}$ и $C(0; 1)$ (Фиг. 3.3.1).



Фигура 3.3.1

Сега, оставяйки $n > N = \max(N_1, N_2)$, $N = N(\varepsilon)$, можем да запишем неравенствата

$$u_n(z) < -q \text{ за } z \in \tilde{\gamma} \quad \text{и} \quad u_n(z) \leq \varepsilon \text{ за } |z| = 1.$$

В резултат на това се получава следната оценка

$$u_n(z) \leq -\lambda_1 q + \lambda_2 \varepsilon \quad \text{за } z \in C(0; R) \text{ и } n > N,$$

с $\lambda_{1,2} > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $\lambda_{1,2}$ зависят само от R (всъщност, λ_1 е минимумът на хармоничната мярка върху окръжността $C(0; R)$ [22, Гл. VIII, §4, доказателството на Теорема 2]). Вземайки ε такова, че $-\lambda_1 q + \lambda_2 \varepsilon = -\eta < 0$ ние заключаваме, че $u_n(z) \leq -\eta$ за $n > N$ и $|z| = R$, откъдето следва оценката

$$|S_{k_n}(z)| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}.$$

Означавайки за удобство

$$I_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{S_{k_n}(z)}{z^{m+1}} dz,$$

и използвайки последното неравенство за $|S_{k_n}(z)|$, се получава следната оценка за модула на I_m :

$$|I_m| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^{m+1}} (Re^{-\eta})^{k_n} 2\pi R = \frac{(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m}, \quad \text{за } m \leq k_n. \quad (3.3.5)$$

Да се върнем към интеграла I_m , който е необходим за оценяването на $|a_m|$. За целта първо да припомним, че $I_m = \text{Res}_0 (S_{k_n}(z)/z^{m+1})$ и извършвайки директно интегрирането в I_m за $m = 0, 1, \dots, k_n$, получаваме последователно

$$\begin{aligned} a_0 &= I_0, & a_1 &= I_1, & a_2 - \frac{a_0}{2^2} &= I_2, & a_3 - \frac{a_1}{2^2 2} &= I_3, \\ a_4 - \frac{a_2}{2^2 3} + \frac{a_0}{2^4 (2!)^2} &= I_4, & a_5 - \frac{a_3}{2^2 4} + \frac{a_1}{2^4 2! 6} &= I_5, & \dots \end{aligned}$$

Сега по индукция и използвайки неравенството (3.3.5), могат да се докажат неравенствата (детайлите са пропуснати)

$$|a_0| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad |a_1| \leq \frac{(Re^{-\eta})^{k_n}}{R}; \quad |a_m| \leq \frac{2 (Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m} \quad \text{за } m \geq 2. \quad (3.3.6)$$

В частност, означавайки $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ и вземайки $1/\alpha < p' < 1$, $p'k_n < m \leq k_n$, следва неравенството $R^{-m} < R^{-p'k_n}$, което води до

$$|a_m| \leq 2 \left(\frac{Re^{-\eta}}{R^{p'}} \right)^{k_n}, \quad \text{за } p'k_n < m \leq k_n. \quad (3.3.7)$$

Избирайки p' толкова близко до 1, че да е изпълнено $(Re^{-\eta}R^{-p'}) = \rho < 1$, неравенството (3.3.7) приема вида

$$|a_m| \leq 2\rho^{k_n} \leq 2\rho^m \quad (\rho < 1), \quad \text{за } p'k_n < m \leq k_n. \quad (3.3.8)$$

По-нататък, означавайки $p_n = [p'k_n]$ (където $[p'k_n]$ означава цялата част на $p'k_n$), разглеждаме групирания ред

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{J}_{p_n+1, k_n}(z), \quad \tilde{J}_{p_n+1, k_n}(z) = a_{p_n+1} \tilde{J}_{p_n+1}(z) + \dots + a_{k_n} \tilde{J}_{k_n}(z). \quad (3.3.9)$$

Имайки предвид условието (3.3.3) и също, че $1/\alpha < p' < 1$, се получава следното неравенство за индексите в $\tilde{J}_{p_n+1, k_n}$

$$p_n + 1 \leq k_n < \frac{1}{\alpha} k_{n+1} < p'k_{n+1} < [p'k_{n+1}] + 1 = p_{n+1} + 1. \quad (3.3.10)$$

От една страна, най-големият индекс в събиращемия $\tilde{J}_{p_n+1, k_n}(z)$ е k_n , а най-малкият индекс в следващото събиращемо е $p_{n+1} + 1$. Тогава индивидуалните функции в различните членове на (3.3.9) не се застъпват. Така че, развитието на всички членове на (3.3.9) може да бъде разглеждано като развитие по функциите $\tilde{J}_m(z)$ с индекси $m \in \{p_n + 1, \dots, k_n\}_{n=1}^{\infty}$. Най-сетне, неравенството (3.3.8) показва, че редът от функции (3.3.9), разглеждан като ред по функциите на Бесел $\tilde{J}_m(z)$, е сходящ в кръга $D(0; 1/\rho)$ с $1/\rho > 1$.

Допълнителният ред

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m \tilde{J}_m(z), \quad \tilde{a}_m = \begin{cases} 0 & \text{за } m \in \{p_n + 1, \dots, k_n\}_{n=1}^{\infty}, \\ a_m & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.3.11)$$

очевидно е с празнини. За да докажем, че те са Адамарови, първо да отбележим, че $\tilde{a}_m = 0$ за $p_n < m < k_n + 1$, $n = 1, 2, \dots$ и да разгледаме (3.3.11). Тогава, означавайки $\alpha_0 = \frac{1}{p'} > 1$ и $q_n = k_n + 1$ и отчитайки, че $p_n = [p'k_n] \leq p'k_n$, получаваме, че

$$\alpha_0 p_n = \alpha_0 [p'k_n] \leq \alpha_0 p'k_n = k_n < k_n + 1 = q_n \quad \text{и } \tilde{a}_m = 0 \text{ за } p_n < m < q_n.$$

Следователно $\alpha_0 p_n < q_n$ с $\alpha_0 > 1$, което означава, че редът (3.3.11) има Адамарови празнини. $\square$

Глава 4

Мултииндексни функции на Бесел

4.1 Мултииндексни обобщения на функциите на Бесел от първи род

Функциите на Бесел и техните многобройни обобщения, които са произлезли от конкретни задачи от механиката и астрономията са се доказали като едни от най-често използваните специални функции в математическия анализ и неговите приложения във физиката, механиката и инженерите науки.

Нека първо да започнем с двуиндексното обобщение на функцията на Бесел (по-точно на свързаната с нея функция (1.5.7) на Бесел–Клифорд). Тази цяла функция, съдържаща един допълнителен индекс μ , е въведена от Райт [131] и е наречена функция на Бесел–Райт, именно

$$J_{\nu}^{\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(\nu + \mu k + 1)}, \quad \mu > -1, \quad (4.1.1)$$

за детайли виж [66, стр.109]; [41, стр.336], и др. Тя е известна в литературата още като функция на Бесел–Мейтланд, по второто име на Сър Едуард Мейтланд Райт. Първоначално Райт дефинира (4.1.1) само за стойности на $\mu > 0$ а на по-късен етап разширява нейната дефиниция за $\mu > -1$ (виж например [41], [47]). По-общи са три- и четирипараметричните обобщения на Беселовата функция J_{ν} . Това са обобщената функция на Бесел–Мейтланд (или Райт), въведена от Патак [104] (за детайли виж също [46]):

$$J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z) = (z/2)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{\Gamma(\lambda + k + 1) \Gamma(\nu + k\mu + \lambda + 1)}, \quad (4.1.2)$$

$$z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]; \quad \mu > 0, \quad \nu, \lambda \in \mathbb{C},$$

и обобщената функция на Ломел–Райт,

$$J_{\nu,\lambda}^{\mu,m}(z) = (z/2)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(\Gamma(\lambda + k + 1))^m \Gamma(\nu + k\mu + \lambda + 1)} \quad (4.1.3)$$

$$z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]; \quad \mu > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \nu, \lambda \in \mathbb{C},$$

въведена от де Отейза, Кала и Конде (детайли и резултати, свързани с дробното смятане могат да се видят в [46] и също [108]).

Друго интересно обобщение е така наречената *хипер-Беселова функция* $J_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{(m)} = J_{(\nu_i)}^{(m)}(z)$, дефинирана с формулата

$$J_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{(m)}(z) = J_{(\nu_i)}^{(m)}(z) = \frac{\left(\frac{z}{m+1}\right)^{\nu_1 + \dots + \nu_m}}{\Gamma(\nu_1 + 1) \dots \Gamma(\nu_m + 1)} j_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{(m)}(z), \quad (4.1.4)$$

където $z, \nu_i \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\nu_i + 1) > 0$ ($i = 1, \dots, m$), и

$$j_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{m+1}\right)^{k(m+1)}}{(\nu_1 + 1)_k \dots (\nu_m + 1)_k} \frac{1}{k!}, \quad |z| < \infty. \quad (4.1.5)$$

Имайки предвид (4.1.5), хипер-Беселовата функция може да се запише във вида

$$J_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{(m)}(z) = \left(\frac{z}{m+1}\right)^{\sum_{i=1}^m \nu_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{m+1}\right)^{k(m+1)}}{\Gamma(k + \nu_1 + 1) \dots \Gamma(k + \nu_m + 1)} \frac{1}{k!}. \quad (4.1.6)$$

Тази функция е въведена от Делерю [11] през 1953 г. като естествено обобщение от ред m с векторни индекси $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ (или с мултииндекси $(\nu_1, \dots, \nu_m)$) на функциите на Бесел от първи род J_{ν} . По-късно тази функция е изучавана и от други автори, например от Маричев [66],

Димовски [12], Ключанчев [53], [54], Димовски и Кирякова [13]–[14], Кирякова [41], [42], [49], Панева-Коновска [96, 99], и други.

Хипер-Беселовите функции на Делерю са тясно свързани с *хипер-Беселовите диференциални оператори* от произволен ред $m > 1$, *въведени от Димовски* [12]. Това са сингулярни линейни диференциални оператори, които се появяват много често в задачи от математическата физика като обобщение на оператора на Бесел от втори ред и може да бъде представен в следните алтернативни форми

$$\begin{aligned} B &= z^{\alpha_0} \frac{d}{dz} z^{\alpha_1} \dots \frac{d}{dz} z^{\alpha_m} = z^{-\beta} \prod_{k=1}^m \left(z \frac{d}{dz} + \beta \gamma_k \right) \\ &= z^{-\beta} \left(z^m \frac{d^m}{dz^m} + a_1 z^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} + \dots + a_{m-1} z \frac{d}{dz} + a_m \right), \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

за $0 < z < \infty$, с множество от $(m+1)$ параметъра $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, или $\{\beta > 0, \gamma_k \text{ реални}, k = 1, \dots, m\}$, или $\{\beta > 0, a_1, \dots, a_m\}$. Детайлите могат да се видят също в Димовски и Кирякова [13], [14], и Кирякова [41, Ч.3]. Наистина, както е показано в Теорема 3.4.3 и Следствие 3.4.4 в Кирякова [41], фундаменталната система от решения на *хипер-Беселовото диференциално уравнение* от m -ти ред $By(z) = \lambda y(z)$, $\lambda \neq 0$ се състои от следното множество от хипер-Беселовите функции

$$J_{1+\gamma_1-\gamma_k, \dots, *, \dots, 1+\gamma_m-\gamma_k}^{(m-1)} \left[(-\lambda)^{1/m} (m/\beta) z^{\beta/m} \right], \quad k = 1, \dots, m,$$

при предположение за формално подреждане на параметрите γ по следния начин $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < \gamma_1 + 1$ и където $*$ означава, че е пропуснат k -ят член в индексите. Тогава, решенията на хипер-Беселовите обикновени диференциални уравнения

$$By(z) = \lambda y(z) + f(z)$$

могат да се изразят явно чрез хипер-Беселови функции, редове по тях, или редове по интеграли от тях [41].

Очевидно, хипер-Беселовите функции (4.1.6) са естествено обобщение на *функциите на Бесел* от първи род (с $m+1 = 2$, $m = 1$), т.е.

$$J_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\nu+1)} \frac{1}{k!}, \quad (4.1.8)$$

както и на така наречените *функции на Бесел–Клифорд от 3-ти ред* $C_{\nu,\mu}(z)$ (с $m+1=3$), зависещи от два ($m=2$) индекса и модифициращи хипер-Беселовите функции $J_{\nu,\mu}^{(2)}(z)$, именно:

$$C_{\nu,\mu}(z) = z^{-\frac{\mu+\nu}{3}} J_{\nu,\mu}^{(2)}(3\sqrt[3]{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z)^k}{\Gamma(k+\mu+1)\Gamma(k+\nu+1)} \frac{1}{k!} \quad (4.1.9)$$

(детайлите могат да се видят в [51]). Други интересни специални случаи на хипер-Беселовите функции от произволен ред, но със специален избор на индексите са така наречените *тригонометрични функции от ред m* , включително *обобщената $\cos_m$ - и обобщената $\sin_{m,k}$ -функции* ($k=1, \dots, m-1$), изучавани например от Ключанчев [53], [54], Димовски и Кирякова [13], [14], Кирякова [41], [42], и други автори. Те се появяват като решения на добре познатия класически частен случай $B = \left(\frac{d}{dz}\right)^m$ на хипер-Беселовия оператор. Например, решението на задачата на Коши

$$y^{(m)}(z) = -y(z), \quad y(0) = 1, y'(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0,$$

се дава с функцията

$$y(z) = \cos_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{mk}}{(mk)!} = j_{\nu_1, \dots, \nu_{m-1}}^{(m-1)}(z) \quad \text{с} \quad \nu_k := \frac{k}{m} - 1.$$

Накрая, в частност (като например [66, стр.110]; [41, стр. 352–353]):

$$\begin{aligned} J_{\nu}^1(z) &= C_{\nu}(z), \quad J_{\nu,0}^1(z) = J_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z), \quad J_{\nu,0}^{\mu}(z) = (z/2)^{\nu} J_{\nu}^{\mu}(z^2/4), \\ J_{\nu,\lambda}^{\mu,1}(z) &= J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z), \quad J_{\nu,\lambda}^1(z) = \frac{2^{2-2\lambda-\nu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+\nu)} s_{2\lambda+\nu-1,\nu}(z), \\ \mathbf{H}_{\nu}(z) &= \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} s_{\nu,\nu}(z) = J_{\nu,1/2}^1(z), \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

където $s_{\alpha,\nu}(z)$ и $\mathbf{H}_{\nu}(z)$ означават съответно функциите на Ломел и на Струве [17, 7.5.5, (69), (84), Vol. 2].

Да отбележим, че тази глава се опира основно на [96] и [99].

4.2 Резултати, свързани с параметрите на мултииндексните обобщения на функциите на Бесел

Най-напред нека да разгледаме обобщената функция на Ломел–Райт (4.1.3) за стойности на параметрите

$$\mu > 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

а индексите ν да са от вида $\nu = n - 2\lambda$; $n = 0, 1, 2, \dots$, именно:

$$J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z) = (z/2)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(\Gamma(\lambda + k + 1))^m \Gamma(n - \lambda + k\mu + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.2.1)$$

Не представлява особено затруднение да се провери, че $J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}$ е цяла функция (това е направено например в [44] и освен това следва и като частен случай и от [99, §8.4]).

Забележка 4.2.1. По-нататък са използвани означенията $\mathbb{R}^-$ (съответно $\mathbb{R}^+$) за множеството от отрицателни (съотв. положителни) реални числа, $\mathbb{Z}^-$ (съотв. $\mathbb{N}$) за множеството от отрицателни (съотв. положителни) цели числа и $\mathbb{Z}_0^- = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ (съотв. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Забележка 4.2.2. При дадена стойност на параметъра λ , може да се окаже, че някои от коефициентите в (4.2.1) са равни на нула, т.е., че съществуват числа $p \in \mathbb{N}_0$ и $s \in \mathbb{N}$, такива че равенството (4.2.1) може да се представи във вида

$$J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z) = (z/2)^n \left(\frac{(-1)^p (z/2)^{2p}}{(\Gamma(\lambda + p + 1))^m \Gamma(n - \lambda + p\mu + 1)} + \sum_{k=p+s}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(\Gamma(\lambda + k + 1))^m \Gamma(n - \lambda + k\mu + 1)} \right). \quad (4.2.2)$$

По-нататък, означавайки

$$a_k = \frac{1}{\Gamma(\lambda + k + 1)}, \quad b_k = \frac{1}{\Gamma(n - \lambda + k\mu + 1)}, \quad c_k = a_k^m b_k, \quad (4.2.3)$$

за всички стойности на $k = 0, 1, 2, \dots$, разглеждаме два основни случая за параметъра λ , дадени в следващите две леми.

Лема 4.2.1. [99] Ако $\lambda \in \mathbb{C}$, но λ не е естествено число то

- (i) $p = 0$ и $s = 1$ за $\lambda \notin (\mathbb{Z}^- \cup \mathbb{R}^+)$,
- (ii) $p = -\lambda$ и $s = 1$ за $\lambda \in \mathbb{Z}^-$,
- (iii) $p = 0$ и $s = 1$ или $s = 2$ за $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Доказателство. (i) Очевидно, в този случай $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}^- \cup \mathbb{R}^+)$, което означава, че $\lambda \leq 0$ но $\lambda \notin \mathbb{Z}^-$ или $\lambda \notin \mathbb{R}$. Разглеждайки $\lambda \leq 0$ и $\lambda \neq -1, -2, \dots$, заключаваме, че $\lambda + k + 1$ и $n - \lambda + k\mu + 1$ не са отрицателни цели числа или нула, и поради това $c_k \neq 0$, за всички стойности на k . Вземайки $\lambda \notin \mathbb{R}$, стигаме до заключението, че $\lambda + k + 1 \notin \mathbb{R}$, както и, че $n - \lambda + \mu k + 1 \notin \mathbb{R}$, поради което и $c_k \neq 0$. Тъй като в този случай всички коефициенти са различни от 0, то $p = 0$ и $s = 1$.

(ii) Нека сега λ е отрицателно цяло число. Тогава $(n - \lambda + k\mu + 1)$ са положителни числа за всички k и освен това целите числа $\lambda + k + 1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ за $k \geq -\lambda$, т. е. $c_k = 0$ за $0 \leq k < -\lambda$ и $c_k \neq 0$ за всички $k \geq -\lambda$, което означава, че $p = -\lambda$ и $s = 1$.

(iii) Накрая, ако λ е положително реално число, но не е естествено, то числата a_k са положителни за всяко $k = 0, 1, 2, \dots$ и $b_0 \neq 0$. Възможно е, обаче, някои от останалите b_k да са нула. Нека сега $k = 1$, тогава има две възможности: или $n - \lambda + \mu + 1 \notin \mathbb{Z}_0^-$, и тогава $b_1 \neq 0$, или $n - \lambda + \mu + 1 \in \mathbb{Z}_0^-$, и тогава $b_1 = 0$. Вторият случай е възможен само ако $\mu \notin \mathbb{N}$, но тогава $n - \lambda + 2\mu + 1 \notin \mathbb{Z}_0^-$ и $b_2 \neq 0$. И така, има две възможности: $c_0 \neq 0$, $c_1 \neq 0$ или $c_0 \neq 0$, $c_1 = 0$, но $c_2 \neq 0$. $\square$

Лема 4.2.2. [99] Ако λ е естествено число, то

- (i) $p = 0$ и $s = 1$ за $n \geq \lambda$,
- (ii) $p = 1$ и $s = 1$ или $s = 2$ за $0 \leq n < \lambda$, $\mu \notin \mathbb{N}$,
- (iii) $p = \left\lceil \frac{\lambda - n - 1}{\mu} \right\rceil + 1$ и $s = 1$ за $0 \leq n < \lambda$, $\mu \in \mathbb{N}$.

Доказателство. (i) Нека най-напред $n \geq \lambda$. Тогава $n - \lambda + 1 > 0$, $\lambda + k + 1 > 0$ и следователно всички коефициенти $c_k \neq 0$.

(ii) Нека сега $0 \leq n < \lambda$. Тогава всички a_k са положителни, но $n - \lambda + 1 \in \mathbb{Z}_0^-$ и поради това $b_0 = 0$. По-нататък, ако $\mu \notin \mathbb{N}$, то $b_1 \neq 0$ и, както в Лема 4.2.1 случай (iii), следва $b_2 \neq 0$ или $b_2 = 0$ но $b_3 \neq 0$.

(iii) Ако $\mu \in \mathbb{N}$, то $n - \lambda + k\mu + 1 \in \mathbb{Z}$ и следователно $b_k = 0$ за $k \leq \frac{\lambda - n - 1}{\mu}$, т. е. $b_k > 0$ за $k > \frac{\lambda - n - 1}{\mu}$. И така, $c_k = 0$ за $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{\lambda - n - 1}{\mu} \right\rfloor$, и $c_k \neq 0$ за $k \geq \left\lfloor \frac{\lambda - n - 1}{\mu} \right\rfloor + 1$. $\square$

Забележка 4.2.3. Да отбележим, че формулата (4.2.2), приложена за $m = 1$, съгласно (4.1.2), (4.1.10) и (4.2.3), води до представяне на функцията $J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu}(z)$, със същите стойности на p и s , както на функцията $J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)$. Случаят $m = 1$, $\lambda = 0$ дава съответното представяне за функциите на Бесел–Мейтланд с $p = 0$ и $s = 1$. Само да споменем, че всички коефициенти в (4.1.1) са различни от нула, когато $\nu \in \mathbb{N}_0$ и $\mu > 0$ (това се вижда от Лема 4.2.1, (i), приложена за $\lambda = 0$).

Забележка 4.2.3 и доказаните лемии, показват, че функциите $J_n^{\mu}(z)$ и $J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)$ могат да се запишат във вида

$$J_n^{\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} (1 + \vartheta_n^{\mu}(z)), \quad \mu > 0, \quad (4.2.4)$$

където ϑ_n^{μ} е дадена с формулата

$$\vartheta_n^{\mu}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)(-z)^k}{k! \Gamma(n + \mu k + 1)}, \quad (4.2.5)$$

и респективно

$$J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z) = \frac{(-1)^p (z/2)^{n+2p}}{(\Gamma(\lambda + p + 1))^m \Gamma(n - \lambda + p\mu + 1)} \left(1 + \vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)\right), \quad (4.2.6)$$

с $\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}$, както следва:

$$\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z) = \sum_{k=p+s}^{\infty} \frac{(\Gamma(\lambda + p + 1))^m \Gamma(n - \lambda + p\mu + 1)}{(\Gamma(\lambda + k + 1))^m \Gamma(n - \lambda + k\mu + 1)} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^{k-p}. \quad (4.2.7)$$

Параметрите p и s ($p \geq 0$, $s \geq 1$) са дефинирани с предходните лемии.

Нека сега да се върнем към хипер-Беселовите функции. Във връзка със следващите разглеждания, свързани с тях, по-долу е избрана подходяща изброима фамилия с цел да се получат възможно по-прости резултати. За

целта, фиксирайки индекса $1 \leq i_0 \leq m$, да разгледаме хипер-Беселовите функции с цели индекси $\nu_{i_0} = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Използването на буквата n вместо ν_{i_0} е само за удобство с цел опростяване на изложението. За краткост, да означим

$$\sum_{i=1}^m {}' \nu_i = \sum_{i=1, i \neq i_0}^m \nu_i, \quad \prod_{i=1}^m {}' \Gamma(k + \nu_i + 1) = \prod_{i=1, i \neq i_0}^m \Gamma(k + \nu_i + 1), \quad (4.2.8)$$

$$(\nu_{i_0}(n)) = (\nu_1, \dots, \nu_{i_0-1}, n, \nu_{i_0+1}, \dots, \nu_m) = (\nu_i) |_{\nu_{i_0}=n}.$$

Тогава функциите от въпросната фамилия имат индекси от вида $(\nu_{i_0}(n))$, и съгласно (4.1.6), те могат да се представят във вида

$$J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z) = A(z; m, n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{m+1}\right)^{k(m+1)}}{\Gamma(k + n + 1) \prod_{i=1}^m {}' \Gamma(k + \nu_i + 1)} \frac{1}{k!}, \quad (4.2.9)$$

където с $A(z; m, n)$ е означен следният израз

$$A(z; m, n) = \left(\frac{z}{m+1}\right)^{\sum_{i=1}^m {}' \nu_i} \left(\frac{z}{m+1}\right)^n. \quad (4.2.10)$$

Забележка 4.2.4. Да отбележим, че условията $\operatorname{Re}(\nu_i + 1) > 0$ и $\operatorname{Re}(n + 1) > 0$ ($i = 1, \dots, m$), които са наложени върху дадените параметри водят до заключението, че всичките коефициенти в (4.2.9) са различни от нула.

4.3 Неравенства, свързани с обобщените функции на Бесел

В тази секция са оценени абсолютните стойности на целите функции (4.2.5) и (4.2.7) в комплексната равнина $\mathbb{C}$, както и в нейните компактни подмножества, когато $\mu > 0$. За целта е нужно да познаваме добре основните свойства на Γ -функцията (които са изложени в Глава 1, Секция 1.1).

Започвайки с $\vartheta_n^\mu(z)$, ние даваме долуизложения резултат за намерената горна оценка на нейния модул.

Теорема 4.3.1. [99] Нека $\vartheta_n^\mu(z)$ е функцията, дефинирана с (4.2.5), тогава съществува константа c_0 , такава че са изпълнени следните неравенства

$$|\vartheta_0^\mu(z)| \leq \frac{c_0}{\Gamma(1+\mu)} (\exp |z| - 1), \quad (4.3.1)$$

съответно

$$|\vartheta_n^\mu(z)| \leq \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\mu)} (\exp |z| - 1) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (4.3.2)$$

в цялата комплексна равнина. Освен това, ако $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество, то съществува константа $0 < C = C(K) < \infty$, такава че

$$|\vartheta_n^\mu(z)| \leq C \Gamma(n+1)/\Gamma(n+1+\mu), \quad (4.3.3)$$

за всяко $n \in \mathbb{N}_0$ и всяко $z \in K$.

Доказателство. Разглеждайки $z \in \mathbb{C}$, означаваме за удобство

$$w_k(n, \mu) = \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu k+1)}, \quad u_k(z; n, \mu) = \frac{w_k(n, \mu)}{k!} (-z)^k. \quad (4.3.4)$$

Тогава функцията $\vartheta_n^\mu(z)$, дадена с равенството (4.2.5), може да се запише във вида

$$\vartheta_n^\mu(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\mu+1)} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z; n, \mu). \quad (4.3.5)$$

За да се оцени модулът на $\vartheta_n^\mu(z)$, е необходимо да се намери горна оценка на $|w_k(n, \mu)|$.

Първо, нека $n = 0$ и $1 < \mu + 1 < \alpha_0$. Тогава предвид Забележка 1.1.2 (i), са изпълнени неравенствата $\Gamma(\mu+1) < \Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(\alpha_0) \leq \Gamma(\mu k + 1)$, откъдето $w_k(0, \mu) < 1/\Gamma(\alpha_0)$. Ако $\alpha_0 \leq \mu + 1$, то е в сила неравенството $w_k(0, \mu) \leq 1$. И така, получаваме оценката

$$|u_k(z; 0, \mu)| \leq c_0 \frac{|z|^k}{k!}, \quad c_0 = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}, & \mu + 1 < \alpha_0 \\ 1, & \mu + 1 \geq \alpha_0 \end{cases},$$

за абсолютната стойност на $u_k(z; n, \mu)$ и следователно, поради (4.3.5), следва и оценката (4.3.1), отнасяща се за модула на $\vartheta_0^\mu(z)$.

По-нататък, нека $n \in \mathbb{N}$. Тогава следват неравенствата $w_k(n, \mu) \leq 1$ за всички стойности на $k = 1, 2, \dots$, с което е установена верността на неравенството (4.3.2) в цялата комплексна равнина.

Сега, съгласно доказаните вече неравенства (4.3.1) и (4.3.2), оценката (4.3.3) следва незабавно. $\square$

По-нататък имаме намерение да оценим целите функции $\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)$. С тази цел първо преобразуваме израза в равенството (4.2.7), което води до тъждеството

$$\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z) = \tilde{\Gamma} \sum_{k=p+s}^{\infty} \frac{(-1)^{k-p} \gamma_k}{(\Gamma(\lambda + k + 1))^m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2(k-p)}, \quad (4.3.6)$$

където с $\tilde{\Gamma}$ и γ_k са означени изразите

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\Gamma^m(\lambda + p + 1)\Gamma(n - \lambda + p\mu + 1)}{\Gamma(n - \lambda + (p + s)\mu + 1)}, \quad \gamma_k = \frac{\Gamma(n - \lambda + (p + s)\mu + 1)}{\Gamma(n - \lambda + k\mu + 1)}. \quad (4.3.7)$$

След това, получените резултати са изложени поотделно като няколко различни случая в зависимост от параметъра λ , както следва.

Лема 4.3.1. [99] *Нека $\lambda = 0$. Тогава*

$$|\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)| \leq \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \mu + 1)} \left(\exp \left(\left| \frac{z^2}{4} \right| \right) - 1 \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$|\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \left(\exp \left(\left| \frac{z^2}{4} \right| \right) - 1 \right), \quad n = 0.$$

Доказателство. Съгласно Лема 4.2.1 случай (i), имаме $p = 0$, $s = 1$,
 $\gamma_k = \frac{\Gamma(n + \mu + 1)}{\Gamma(n + k\mu + 1)}$ и

$$\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z) = \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \mu + 1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{(\Gamma(k + 1))^m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

откъдето

$$|\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)| \leq \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + \mu + 1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(|z/2|^2)^k}{(\Gamma(k + 1))^m} \gamma_k$$

$$\leq \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\mu+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(|z/2|^2)^k}{\Gamma(k+1)} \gamma_k.$$

Вземайки предвид Забележка 1.1.2 (i), можем да запишем

$$0 < \gamma_k \leq 1, \text{ за } n \in \mathbb{N}; \quad \text{и} \quad 0 < \gamma_k \leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha_0)}, \text{ за } n = 0,$$

което доказва лемата. □

Лема 4.3.2. [99] *Нека $\lambda \in \mathbb{Z}^-$, тогава*

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq \Gamma(1+\mu-\lambda\mu) \frac{\Gamma(n-\lambda-\lambda\mu+1)}{\Gamma(n-\lambda+(1-\lambda)\mu+1)} \xi(|z|^2/4; \lambda, \mu)$$

с ξ , както е дадено по-долу

$$\xi(|z|^2/4; \lambda, \mu) = J_{-\lambda\mu}^{\mu} \left(- \left| \frac{z^2}{4} \right| \right) - \frac{1}{\Gamma(1-\lambda\mu)}.$$

Доказателство. Съгласно Лема 4.2.1, случай (ii), стойностите на p и s са съответно $p = -\lambda$ и $s = 1$, и следователно (4.3.6) приема вида

$$\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z) = \frac{\Gamma(n-\lambda-\lambda\mu+1)}{\Gamma(n-\lambda+(1-\lambda)\mu+1)} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-p} \gamma_k}{\Gamma^m(\lambda+k+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2(k-p)}$$

с γ_k , както следва

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(n-\lambda+(p+1)\mu+1)}{\Gamma(n-\lambda+k\mu+1)}.$$

Тъй като $p+1 \leq k$ и

$$\gamma_k = \frac{(n-\lambda+(p+1)\mu)}{(n-\lambda+k\mu)} \times \dots \times \frac{(1+(p+1)\mu)}{(1+k\mu)} \times \frac{\Gamma(1+(p+1)\mu)}{\Gamma(1+k\mu)},$$

то

$$0 < \gamma_k \leq \frac{\Gamma(1+(1-\lambda)\mu)}{\Gamma(1+k\mu)}.$$

Използвайки означението

$$w_k(z) = \frac{(-1)^{k-p} \gamma_k}{(\Gamma(\lambda+k+1))^m} \left(\frac{z}{2} \right)^{2(k-p)},$$

получаваме последователно

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p+1}^{\infty} w_k(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} w_{k+p}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_{k+p}}{(\Gamma(k+1))^m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \\
\left| \sum_{k=p+1}^{\infty} w_k(z) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_{k+p} (|z/2|^2)^k}{(\Gamma(k+1))^m} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\mu-\lambda\mu) (|z/2|^2)^k}{(\Gamma(k+1))^m \Gamma(1+k\mu-\lambda\mu)} \\
&= \Gamma(1+\mu-\lambda\mu) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|z/2|^2)^k}{(\Gamma(k+1))^m \Gamma(1+k\mu-\lambda\mu)} - \frac{1}{\Gamma(1-\lambda\mu)} \right), \\
&\leq \Gamma(1+\mu-\lambda\mu) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|z/2|^2)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(1+k\mu-\lambda\mu)} - \frac{1}{\Gamma(1-\lambda\mu)} \right),
\end{aligned}$$

откъдето непосредствено следва заключението на теоремата. $\square$

Лема 4.3.3. [99] *Нека $\lambda \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}$, тогава съществува цяла функция τ , за която е изпълнено*

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq |\Gamma(\lambda+1)|^m \frac{\Gamma(n-\lambda+1)}{\Gamma(n-\lambda+\mu+1)} \tau(|z|^2/4; \lambda).$$

Доказателство. Сега, съгласно Лема 4.2.1 случай (i), имаме $p = 0$, $s = 1$, $\gamma_k = \frac{\Gamma(n-\lambda+\mu+1)}{\Gamma(n-\lambda+k\mu+1)}$ и

$$\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z) = \frac{\Gamma^m(\lambda+1) \Gamma(n-\lambda+1)}{\Gamma(n-\lambda+\mu+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{(\Gamma(\lambda+k+1))^m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad (4.3.8)$$

съответно

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq |\Gamma(\lambda+1)| \frac{\Gamma(n-\lambda+1)}{\Gamma(n-\lambda+\mu+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(|z/2|^2)^k}{|\Gamma(\lambda+k+1)|^m} \gamma_k.$$

По-нататък, нарастването на Γ -функцията води до неравенството $0 < \gamma_k \leq 1$ и за двата случая: $n = 0$ но $1 - \lambda + \mu \geq \alpha_0$ и $n \in \mathbb{N}$, докато за $n = 0$ и $1 < 1 - \lambda + \mu < \alpha_0$ е в сила $0 < \gamma_k \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}$. Накрая, вземайки

$$C = \max \left(1, \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \quad \text{и} \quad \tau(z; \lambda) = C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{|\Gamma(\lambda+k+1)|^m},$$

завършваме доказателството на лемата. $\square$

Лема 4.3.4. [99] Нека $\lambda \notin \mathbb{R}$, т.е. $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \neq 0$) и нека $\tilde{\lambda}_1 = \max(0, \lambda_1)$. Тогава съществуват цели функции φ и φ_1 , такива че

$$|\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)| \leq |\Gamma(\lambda + 1)|^m \frac{|\Gamma(n - \lambda + 1)|}{|\Gamma(n - \lambda + \mu + 1)|} \varphi(|z|^2/4; \lambda, \mu)$$

за $n \geq \tilde{\lambda}_1$ и

$$|\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)| \leq |\Gamma(\lambda + 1)|^m \frac{|\Gamma(n - \lambda + 1)|}{|\Gamma(n - \lambda + \mu + 1)|} \varphi_1(|z|^2/4; \lambda, \mu)$$

за $0 \leq n < \tilde{\lambda}_1$.

Доказателство. Аналогично на Лема 4.3.3 е в сила $p = 0$ и $s = 1$, откъдето следва, че твърдеството (4.3.8) изразява $\vartheta_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)$, както в Лема 4.3.3 и със същите γ_k .

Първо да разгледаме случая $n \geq \tilde{\lambda}_1$. Следвайки идеята на доказателството на Лема 4.3.2, получаваме оценката

$$|\gamma_k| \leq \frac{|\Gamma([\tilde{\lambda}_1] + 1 - \lambda_1 + \mu - i\lambda_2)|}{|\Gamma([\tilde{\lambda}_1] + 1 - \lambda_1 + k\mu - i\lambda_2)|} = \frac{|\Gamma([\tilde{\lambda}_1] + 1 - \lambda + \mu)|}{|\Gamma([\tilde{\lambda}_1] + 1 - \lambda + k\mu)|},$$

където с $[\tilde{\lambda}_1]$ е означена цялата част на $\tilde{\lambda}_1$.

Нека сега $0 \leq n < \tilde{\lambda}_1$. Тогава поради сходимостта на редицата $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, тя е ограничена и следователно съществува константа $\tilde{C}$, такава че $|\gamma_k| \leq \tilde{C}$ за всички стойности на k .

Накрая доказателството завършва, вземайки

$$\varphi(z; \lambda, \mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Gamma([\tilde{\lambda}_1] + 1 - \lambda + \mu)|}{|(\Gamma(\lambda + k + 1))^m \Gamma([\tilde{\lambda}_1] + 1 - \lambda + k\mu)|} z^k,$$

и също

$$\varphi_1(z; \lambda, \mu) = \tilde{C} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{|\Gamma(\lambda + k + 1)|^m}. \quad \square$$

За да формулираме останалите две лемии се нуждаем от функциите $E_{\alpha, \beta}(z)$ на Митаг–Лефлер (дефинициите и основни свойства на тези цели функции са изложени в Глава 5).

Лема 4.3.5. [99] *Нека $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, тогава*

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq (\Gamma(\lambda+1))^m \Gamma([\lambda] - \lambda + s\mu + 1) \frac{\Gamma(n - \lambda + 1)}{\Gamma(n - \lambda + s\mu + 1)} \\ \times \left(\left(\frac{i|z|}{2} \right)^{-[\lambda]} J_{[\lambda]-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(i|z|) - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{|z/2|^{2k}}{\Gamma^m(\lambda + k + 1) \Gamma([\lambda] - \lambda + k\mu + 1)} \right),$$

за $n > \lambda$ и съществува константа C , такава че е изпълнено

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu}(z)| \leq \frac{C \Gamma^m(\lambda+1) |\Gamma(n - \lambda + 1)|}{|\Gamma(n - \lambda + s\mu + 1)|} \eta(|z|^2/4; \lambda)$$

за стойности $0 \leq n < \lambda$ с

$$\eta(|z|^2/4; \lambda) = E_{(1,\lambda+1)}(|z|^2/4) - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{|z/2|^{2k}}{\Gamma(\lambda + k + 1)},$$

когато $m = 1$ и

$$\eta(|z|^2/4; \lambda) = (-|z|^2/4)^{-\lambda} J_{0,\lambda}^{1,m-1}(i|z|) - \sum_{k=0}^{s-1} \frac{|z/2|^{2k}}{\Gamma^m(\lambda + k + 1)},$$

за $m > 1$.

Доказателство. Съгласно Лема 4.2.1 случай (iii), имаме $p = 0$, $s = 1$ или $s = 2$, $\gamma_k = \frac{\Gamma(n - \lambda + s\mu + 1)}{\Gamma(n - \lambda + k\mu + 1)}$ и

$$\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z) = \frac{\Gamma^m(\lambda+1) \Gamma(n - \lambda + 1)}{\Gamma(n - \lambda + s\mu + 1)} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{(\Gamma(\lambda + k + 1))^m} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k},$$

респективно

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq \Gamma^m(\lambda+1) \left| \frac{\Gamma(n - \lambda + 1)}{\Gamma(n - \lambda + s\mu + 1)} \right| \sum_{k=s}^{\infty} \frac{|\gamma_k| (|z/2|^2)^k}{(\Gamma(\lambda + k + 1))^m}.$$

За $n > \lambda$, по същия начин, както в доказателството на Лема 4.3.4 получаваме неравенството

$$0 < \gamma_k \leq \frac{\Gamma([\lambda] + 1 - \lambda + s\mu)}{\Gamma([\lambda] + 1 - \lambda + k\mu)}$$

за всички $k \geq s$, което незабавно завършва доказателството.

Доказателството на случая за стойности на $n < \lambda$ се извършва отново аналогично на това в Лема 4.3.4. $\square$

Лема 4.3.6. [99] *Нека $\lambda \in \mathbb{N}$, тогава*

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq \Gamma^m(\lambda + 1) \Gamma(\mu + 1) \frac{\Gamma(n - \lambda + 1)}{\Gamma(n - \lambda + \mu + 1)} \zeta(|z|^2/4; \lambda, \mu),$$

с функция ζ , както следва

$$\zeta(|z|^2/4; \lambda, \mu) = (i|z|/2)^{-\lambda} J_{-\lambda,\lambda}^{\mu}(i|z|) - \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)},$$

за всички $n \geq \lambda$. Освен това, съществува константа C , такава че

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq C \frac{\Gamma^m(\lambda + p + 1) |\Gamma(n - \lambda + p\mu + 1)|}{|\Gamma(n - \lambda + (p + s)\mu + 1)|} \zeta_1(|z|^2/4; \lambda, \mu),$$

за $0 \leq n < \lambda$, а ζ_1 е дадена с равенството

$$\zeta_1(|z|^2/4; \lambda, \mu) = E_{(1,\lambda+1)}(|z|^2/4) - \sum_{k=0}^{p+s-1} \frac{|z/2|^{2k}}{\Gamma(\lambda + k + 1)},$$

с съответните стойности на p и s .

Доказателство. Започвайки със случая $n \geq \lambda$ и прилагайки Лема 4.2.2 получаваме, че $p = 0$, $s = 1$ и тогава равенството (4.3.8) (аналогично на доказателството на Лема 4.3.3) изразява $\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$, със същите γ_k . Така, аналогично на доказателството на Лема 4.3.2, стигаме до неравенствата $0 < \gamma_k \leq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(k\mu+1)}$ за всички $k \in \mathbb{N}$, откъдето следва, че

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq \frac{\Gamma^m(\lambda + 1) \Gamma(n - \lambda + 1)}{\Gamma(n - \lambda + \mu + 1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(|z/2|^2)^k}{(\Gamma(\lambda + k + 1))^m} \gamma_k.$$

По-нататък, вземайки под внимание, че $\Gamma^m(\lambda + k + 1) \geq \Gamma(\lambda + k + 1)$ и също, че

$$\zeta(|z|^2/4; \lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|z/2|^2)^k}{\Gamma(k\mu + 1) \Gamma(\lambda + k + 1)} - \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)},$$

желаната оценка се потвърждава за всички стойности на $n \geq \lambda$.

Доказателството в случая $n < \lambda$ се извършва по същия начин, използвайки допълнително сходимостта на редицата $\{\gamma_k\}$, а също така и нейната ограниченост. $\square$

И така, комплексната равнина може да се раздели на шест подмножества, които не се пресичат едно с друго, както следва

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \{0\}, & \Delta_2 &= \mathbb{Z}^-, & \Delta_3 &= \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}, \\ \Delta_4 &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, & \Delta_5 &= \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, & \Delta_6 &= \mathbb{N},\end{aligned}$$

и $\mathbb{C} = \bigcup_{k=1}^6 \Delta_k$.

Сега гореизложените лемии могат да се обединят както следва във формулираната по-долу теорема.

Теорема 4.3.2. [99] *Нека $\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$ е функцията, дадена с (4.2.7). Тогава съществуват цели функции ψ_k ($1 \leq k \leq 6$), такива че са изпълнени следните неравенства*

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq \frac{|\Gamma(n - \lambda + p\mu + 1)|}{|\Gamma(n - \lambda + (p + s)\mu + 1)|} \psi_k(|z|^2/4; \lambda, \mu), \quad (4.3.9)$$

в цялата комплексна равнина, стига само $\lambda \in \Delta_k$ (за съответната стойност на k). Освен това, ако $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество, тогава съществува константа $0 < C = C(K) < \infty$, такава че

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq C \frac{|\Gamma(n - \lambda + p\mu + 1)|}{|\Gamma(n - \lambda + (p + s)\mu + 1)|} \quad (4.3.10)$$

със съответните стойности на p и s , дадени в лемите 4.2.1 и 4.2.2, за всяко $n \in \mathbb{N}_0$ и всяко $z \in K$.

Доказателство. За да установим съществуването на цяла функция $\psi_k(z; \lambda, \mu)$, означаваме с $\psi_k(|z|^2/4; \lambda, \mu)$ съответната функция (exp, τ , φ , φ_1 , η , ζ , ζ_1 , с точност до множител константа), която се намира отдясно в неравенството в съответната от предшестващите лемии в тази секция. От холоморфността на $\psi_k(z; \lambda, \mu)$ в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$ следва, че съществува константа $C_k = C_k(K)$, такава че $|\psi_k(|z|^2/4; \lambda, \mu)| \leq C_k$ за всяко $z \in K$. По-нататък, валидността на (4.3.10) следва незабавно, означавайки $C = \max_{1 \leq k \leq 6} C_k$. $\square$

Накрая възнамеряваме да дадем съответна горна оценка и за хипер-Беселовите функции (4.2.9). За целта, нека $z, \nu_i \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\nu_i + 1) > 0$ ($i = 1, \dots, m$) и $J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}$ ($n = 0, 1, \dots$) са функциите (4.2.9). Следващият резултат се отнася за тях.

Теорема 4.3.3. [99] *Съществува цяла функция ϑ_n , такава че хипер-Беселовата функция $J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}$ може да се запише във вида*

$$J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z) = \frac{A(z; m, n)}{\Gamma(n+1) \prod_{i=1}^m \Gamma(\nu_i + 1)} (1 + \vartheta_n(z)) \quad (4.3.11)$$

с $A(z; m, n)$ дефинирано чрез (4.2.10) и

$$|\vartheta_n(z)| \leq \frac{1}{(n+1) \prod_{i=1}^m |\nu_i + 1|} \left(\frac{|z|}{m+1} \right)^{m+1} \exp \left(\left(\frac{|z|}{m+1} \right)^{m+1} \right) \quad (4.3.12)$$

за всички стойности на z в комплексната равнина $\mathbb{C}$. Освен това, ако K е непразно компактно подмножество на $\mathbb{C}$, то съществува константа $C = C(K)$, такава че

$$|\vartheta_n(z)| \leq \frac{C}{n+1}, \quad (4.3.13)$$

за всяко $n \in \mathbb{N}_0$ и всяко $z \in K$.

Забележка 4.3.1. По същество, доказателството е изложено в Секция 6.3.

4.4 Асимптотични формули относно индекса n

В тази секция са предложени няколко асимптотични формули за “големи” индекси за обобщените функции на Бесел. Получените резултати са естествени обобщения на познатата асимптотична формула (1.6.2) за функциите на Бесел J_n с цял неотрицателен индекс n , когато $n \rightarrow \infty$.

По-нататък разглеждаме функциите $J_n^\mu(z)$ and $J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z)$ с цели индекси $n = 0, 1, \dots$, съответно дефинирани чрез (4.1.1) и (4.2.1), за $\mu > 0$. Да

отбележим, че и двете функции $\vartheta_n^\mu(z)$ и $\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$, а също така и $J_n^\mu(z)$ и $J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$ са холоморфни функции на z в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$, т. е. всички те са цели функции. В тази секция са доказани асимптотични формули, за по-горе споменатите функции от Беселов тип за “големи” стойности на индекса n , започвайки с първите от тях.

Теорема 4.4.1. [99] *Нека параметърът $\mu > 0$. Тогава функциите $J_n^\mu(z)$ на Бесел–Мейтланд (Райт) имат асимптотичната формула (4.2.4) с ϑ_n^μ дефинирана с (4.2.5). Освен това, за всички $z \in \mathbb{C}$ е в сила*

$$\vartheta_n^\mu(z) \rightarrow 0 \quad \text{когато} \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.4.1)$$

и сходимостта е равномерна върху компактните подмножества на комплексната равнина.

Доказателство. Да припомним, че съгласно Забележка 1.1.2 (iii), формулата на Стирлинг води до следното свойство за частното на две Γ -функции, именно

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\mu)} = O\left(\frac{1}{n^\mu}\right), \quad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

Тогава, тъй като $n^{-\mu} \rightarrow 0$ и предвид (4.3.2), валидността на (4.4.1) незабавно следва. Равномерната сходимост на редицата $\{\vartheta_n^\mu(z)\}$ върху компактните подмножества на комплексната равнина $\mathbb{C}$ следва от оценката (4.3.3) за модула $|\vartheta_n^\mu|$. $\square$

По аналогичен начин може да се формулира съответна теорема, която се отнася до обобщените функции на Ломел–Райт, дадена по-долу.

Теорема 4.4.2. [99] *Нека параметърът $\mu > 0$. Тогава функциите на Ломел–Райт $J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$ имат асимптотичната формула (4.2.6) с $\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}$ дефинирана с равенството (4.2.7). Освен това, за всички $z \in \mathbb{C}$ е в сила формулата*

$$\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z) \rightarrow 0, \quad \text{когато} \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.4.2)$$

и сходимостта е равномерна върху компактните подмножества на комплексната равнина.

Доказателство. По същия начин, както в предната теорема, съгласно Забележка 1.1.2 (iii), свойството на частното на две Γ -функции дава

$$\frac{\Gamma(n-\lambda+p\mu+1)}{\Gamma(n-\lambda+(p+s)\mu+1)} = O\left(\frac{1}{n^{s\mu}}\right), \quad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

Тогава, тъй като съответното $s \geq 1$ (s е дефинирано от Лема 4.2.1 и 4.2.2), е в сила релацията $n^{-s\mu} \rightarrow 0$, и предвид (4.3.9), коректността на (4.4.2) следва веднага. Равномерната сходимост на $\{\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)\}$ върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$ следва поради оценката (4.3.10). $\square$

Забележка 4.4.1. *Да отбележим, че всички резултати, получени в тази глава, засягащи обобщените функции на Ломел–Райт пораждат аналогични такива за обобщените функции на Бесел–Мейтланд, вземайки $m = 1$.*

По-конкретно, може да се запише следното следствие от Теорема 4.4.2.

Следствие 4.4.1. [99] *Нека $\mu > 0$. Тогава обобщените функции на Бесел–Мейтланд (Райт) (4.1.2) имат следната асимптотична формула*

$$J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu}(z) = \frac{(-1)^p (z/2)^{n+2p}}{\Gamma(\lambda + p + 1) \Gamma(n - \lambda + p\mu + 1)} (1 + \vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu}(z)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.4.3)$$

$$\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu}(z) \rightarrow 0, \quad \text{когато } n \rightarrow \infty \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Функциите $\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu}(z)$ са холоморфни функции на z в $\mathbb{C}$. Сходимостта е равномерна върху компактните подмножества на комплексната равнина $\mathbb{C}$.

Теорема 4.4.3. [99] *Хипер-Беселовата функция $J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}$ има асимптотичната формула, дадена с (4.3.11), където $\vartheta_n(z) \rightarrow 0$ когато $n \rightarrow \infty$. Освен това, върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$, сходимостта на $\vartheta_n(z)$ е равномерна.*

Доказателство. Нека ϑ_n е функцията в (4.3.11). Сега, имайки предвид, че неравенствата (4.3.12) и (4.3.13) са изпълнени, потвърждаването на резултата следва автоматично. $\square$

Забележка 4.4.2. *Съгласно Теорема 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 и Следствие 4.4.1, следва, че съществува естествено число M , такова че функциите $J_n^{\mu}(z)$, $J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$, $J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu}(z)$ и $J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z)$ нямат никакви нули за $n > M$, с изключение евентуално на нулата.*

4.5 Специални случаи

Някои интересни частни случаи на горе-дискутираните функции от Беселов тип са дадени по-долу. Както е написано в (4.1.10), за $m = 1$ специалните функции (4.1.3) се превръщат в обобщението (4.1.2) на Беселовата функция $J_\nu(z)$, въведено от Патак [104] (детайли могат да се видят и в [46]), т. е.

$$J_{\nu,\lambda}^\mu(z) = J_{\nu,\lambda}^{\mu,1}(z). \quad (4.5.1)$$

За специален избор на другите параметри λ и μ се получават резултати за по-частни случаи, както следва.

- (1) Нека $\lambda = 0$, тогава специалната функция (4.1.2) представлява обобщението на функцията на Бесел–Клифорд $C_\nu(z) = z^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{z})$, именно

$$J_\nu^\mu(z^2/4) = (z/2)^{-\nu} J_{\nu,0}^\mu(z) = (z/2)^{-\nu} J_{\nu,0}^{\mu,1}(z). \quad (4.5.2)$$

Допълнително, ако $\mu = 1$, тогава от (4.1.2) стигаме до класическата функция на Бесел

$$J_\nu(z) = J_\nu^{(1)}(z) = J_{\nu,0}^1(z) = J_{\nu,0}^{1,1}(z). \quad (4.5.3)$$

- (2) Нека $\mu = 1$, тогава (4.1.2) води до класическата функция на Ломел [17, 7.5.5, (69), Vol. 2]

$$\frac{2^{2-2\lambda-\nu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+\nu)} s_{2\lambda+\nu-1,\nu}(z) = J_{\nu,\lambda}^1(z) = J_{\nu,\lambda}^{1,1}(z). \quad (4.5.4)$$

В частност, ако $\lambda = 1/2$, тогава от (4.1.2) стигаме до класическата функция на Струве [17, 7.5.5, (84), Vol. 2]

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} s_{\nu,\nu}(z) = J_{\nu,1/2}^1(z) = J_{\nu,1/2}^{1,1}(z). \quad (4.5.5)$$

4.6 Асимптотика за функции на Ломел и Струве

Асимптотичната формула за обобщената функция на Бесел–Мейтланд е дадена в Секция 4.4 просто като следствие от Теорема 4.4.2. Тази, за функциите на Бесел–Мейтланд е доказана самостоятелно, независимо от факта,

че също може да се изведе от Теорема 4.4.2 (или от Следствие 4.4.1). За $\mu = 1$ може да се получи съответната асимптотика за функциите на Ломел и Струве. Както беше споменато преди (виж (4.1.10), (4.5.4)), обобщените функции на Бесел–Мейтланд (4.1.2) се превръщат във функции на Ломел $s_{\alpha,\nu}$ ([17, 7.5.5, (69)], Vol. 2) за стойност на параметъра $\mu = 1$. Тази корелация (виж [66, стр. 110, (8.3)]; [41, стр. 352–353]), може да бъде записана по следния начин

$$s_{\alpha,\nu}(z) = 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+1}{2}\right) J_{\nu, \frac{\alpha-\nu+1}{2}}^1(z), \quad (4.6.1)$$

или, вземайки $\lambda = \frac{\alpha-\nu+1}{2}$, се привежда във вида

$$s_{\alpha,\alpha+1-2\lambda}(z) = 2^{\alpha-1} \Gamma(\lambda) \Gamma(\alpha+1-\lambda) J_{\alpha+1-2\lambda,\lambda}^1(z). \quad (4.6.2)$$

Ако освен това допълнително $\lambda = 1/2$ т.е. $\alpha = \nu$, прилагайки (4.6.2) получаваме функциите на Струве ([17, 7.5.5, (84)], Том 2):

$$\mathbf{H}_{\nu}(z) = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} s_{\nu,\nu}(z) = J_{\nu,1/2}^1(z). \quad (4.6.3)$$

Тогава Теорема 4.4.2, приложена за $m = 1$, или просто Следствие 4.4.1, осигуряват следните следствия.

Следствие 4.6.1. [99] *За функциите на Ломел (4.6.2) е в сила следната асимптотична формула*

$$\begin{aligned} s_{m,m+1-2\lambda}(z) &= 2^{m-1} \Gamma(\lambda) \Gamma(m+1-\lambda) J_{m+1-2\lambda,\lambda}^1(z) \\ &= [4\lambda(m+1-\lambda)]^{-1} z^{m+1} \left(1 + \theta_{m+1-2\lambda,\lambda}^1(z)\right), \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

с функция $\theta_{m+1-2\lambda,\lambda}^1$, както следва

$$\theta_{m+1-2\lambda,\lambda}^1(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (m \in \mathbb{N}), \quad (4.6.5)$$

и освен това, сходимостта е равномерна върху компактните подмножества на комплексната z -равнина.

Следствие 4.6.2. [99] *Функциите на Струве (4.6.3) имат следната асимптотична формула*

$$H_n(z) = J_{n,1/2}^1(z) = \frac{2(z/2)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} \left(1 + \theta_{n,1/2}^1(z)\right), \quad (4.6.6)$$

с функция $\theta_{n,1/2}^1$, за която е в сила:

$$\theta_{n,1/2}^1(z) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (4.6.7)$$

и при това, сходимостта е равномерна върху компактните подмножества на комплексната z -равнина.

Глава 5

Функции от Митаг-Лефлеров тип

5.1 Функции на Митаг-Лефлер

През 1899 г. Митаг-Лефлер започва да публикува поредица от статии под общото заглавие “Върху аналитичното представяне на еднозначен клон на моногенна функция” (‘Sur la representation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogene’) публикувани основно в “Акта математика” (‘Acta Mathematica’). Неговите изследвания са свързани с решаването на задачата за аналитично продължение на комплекснозначни функции, представени със степенни редове. Функцията, до която стига при решаването на тази задача, по-късно е наречена *функция на Митаг-Лефлер*. Той я дефинира със степенен ред по следния начин

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0. \quad (5.1.1)$$

Основните свойства на тази функция са изучени както от Митаг-Лефлер [72]–[77], така също и от Уиман [129]. Както е отбелязано от самия Митаг-Лефлер, редът (5.1.1) е сходящ в цялата комплексна равнина за всички стойности на параметъра α , за които $\Re \alpha > 0$, и поради това той представя цяла функция на комплексната променлива z . Добре известно е, че ако $\alpha > 0$, то редът (5.1.1) е пример за цяла функция с ред $\rho = 1/\alpha$ и тип $\sigma = 1$.

За частни случаи на параметъра α , функцията $E_{\alpha}(z)$ съвпада с някои

елементарни специални функции. Именно, в частност

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \exp(z),$$

$$E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cos z,$$

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh z.$$

Тази функция е просто обобщение на експоненциалната функция, тъй като може да се получи след заместване на израза $k! = \Gamma(k+1)$, който се намира в знаменателя на общия член на степенния ред за $\exp(z)$, с $\Gamma(\alpha k+1)$, поради което понякога тя се нарича *обобщена експонента*.

През първата половина на двадесети век функцията на Митаг-Лефлер остава почти непозната за по-голямата част от учените. Най-вероятно за първи път интерес към тази функция е проявен от Хил и Тамаркин [31], поради прилагането ѝ за представянето на решението на интегралното уравнение на Абел от втори род чрез нея. Описание на най-важните свойства на (5.1.1) е направено в трети том на “Ръководство за висши трансцендентни функции” на Бейтман [17]. В него функциите на Митаг-Лефлер са включени в глава XVIII, посветена на така наречените различни (miscellaneous) функции. Приписването на епитета “различна” на функцията на Митаг-Лефлер се дължи на факта, че чак по-късно, през 1960-те тя е разпозната, че принадлежи на по-широк клас от висши трансцендентни функции, известни като H -функции на Фокс (виж например [70, 38, 71]). В днешно време тази функция и нейните многобройни обобщения са включени в различни дробни модели (както е описано например в монографиите изброени по-долу в края на тази секция). Специалната роля на функцията на Митаг-Лефлер е изтъкната от Кирякова [46], [47], и е включена в класа на специалните функции за дробното смятане. Освен това, базирайки се на ролята на функцията на Митаг-Лефлер в приложението, Майнарди я нарича “Кралицата на дробното смятане” (виж например [64]). Поради тази изключителна роля на фамилията от функции на Митаг-Лефлер, всеки нов точен резултат, включващ тези функции, изглежда много интересен.

Първото обобщение на функцията $E_{\alpha}(z)$, също наречено функция на Митаг-Лефлер, което е дадено по-долу

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, \quad (5.1.2)$$

е въведено от Агарвал [1], макар че някои факти за него са споменати от Уиман в [129] по-рано (почти пет десетилетия). Редица зависимости, свързани с тази функция, са получени от Агарвал и Хумберт [32] с използване апарата на трансформацията на Лаплас. Тази функция би могла да бъде наречена функция на Агарвал, но Агарвал и Хумберт щедро са ѝ оставили същото име като на еднопараметричната функция на Митаг-Лефлер. Това е причината, поради която, днес двупараметричната функция (5.1.2) се нарича също *функция на Митаг-Лефлер*. Интересно е да се спомене факта, че двама от пионерите на съвременната българска математика, са прилагали функцията на Митаг-Лефлер (въпреки че не са споменавали изрично името ѝ, те са използвали вече приетото означение E_{α} в своите изследвания в областта на комплексния анализ). През 1930 г. Никола Обрешков [82, 83] дефинира обобщен метод за сумиране (по-точно метод от типа на Борел за аналитично продължение на комплексни функции, дефинирани със сходящи степенни редове), определя го като така нареченото сумиране на Митаг-Лефлер и изучава асимптотиката на функцията на Митаг-Лефлер. По-късно, през 1969 г., Любомир Илиев [33, 34] използва функцията на Митаг-Лефлер в конструктивната теория на функциите на Лагер. Във множеството от степенни редове той дефинира линеен диференциален оператор $\mathcal{D}_{\alpha}$, породен от функцията на Митаг-Лефлер $E_{\alpha,\alpha}$.

Функцията (5.1.2) се свежда до класическата функция на Митаг-Лефлер, ако се вземе $\beta = 1$. Аналогично на реда в (5.1.1), редът (5.1.2) също е сходящ в цялата комплексна равнина $\mathbb{C}$, което означава, че $E_{\alpha,\beta}(z)$ е цяла функция. Нещо повече, също както функцията $E_{\alpha}(z)$ на Митаг-Лефлер, и функцията $E_{\alpha,\beta}(z)$ е цяла функция със същия ред $\rho = 1/\Re(\alpha)$ [40, стр. 42]. В частност, ако $\alpha > 0$, то и двете функции имат ред $\rho = 1/\alpha$ и тип $\sigma = 1$. И двете са подробно изучавани от Джрабашян [16], дадени са техни асимптотични формули в различни части на комплексната равнина, разпределение на нулите, приложения и свойства като функции-ядра на обратни трансформации от Борелов тип, различни релации и представления. Най-важните свойства и приложения на тези функции, изследвани от много математици, могат да бъдат намерени в съвременните монографии на Килбас и др. [40], Горенфло и др. [24], Балеану и др. [3], и Подлубни [105].

Резултатите в тази глава се отнасят до оценки и асимптотични формули за функциите на Митаг-Лефлер и някои от техните обобщения. До голяма степен те се основават на монографията [99] на автора.

5.2 Неравенства за функциите на Митаг-Лефлер

В тази секция ние предлагаме няколко полезни оценки, свързани с горе дискутираните функции на Митаг-Лефлер с положителни стойности на параметъра α . Вземайки параметъра $\beta = n \in \mathbb{N}$, след това ние въвеждаме означението

$$\theta_n(z) = E_n(z) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(kn + 1)}, \quad (5.2.1)$$

$$\theta_{\alpha,n}(z) = \Gamma(n)E_{\alpha,n}(z) - 1 = \Gamma(n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + n)}. \quad (5.2.2)$$

Сега, оставяйки α да бъде положително число, ние установяваме валидността на твърдението, дадено по-долу.

Теорема 5.2.1. [99] *Нека $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{C}$ и нека $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество. Тогава са в сила следните неравенства*

$$|\theta_n(z)| \leq \frac{1}{n!} (\exp(|z|) - 1), \quad (5.2.3)$$

$$|\theta_{\alpha,n}(z)| \leq \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha + n)} \Gamma(\alpha + 1) (E_{\alpha}(|z|) - 1). \quad (5.2.4)$$

Освен това, съществува константа $C = C(K)$, $0 < C < \infty$, такава че

$$|\theta_n(z)| \leq C/n!, \quad |\theta_{\alpha,n}(z)| \leq C \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha + n)}, \quad (5.2.5)$$

за всички естествени числа n и всички $z \in K$.

Доказателство. Първо, нека $z \in \mathbb{C}$. Тогава $\theta_n(z)$ може да се запише по следния начин

$$\theta_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(kn+1)} z^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(kn)!} z^k.$$

Означавайки $u_k(z) = \frac{n!}{(kn)!} z^k$, ние получаваме оценката $|u_k(z)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$ за абсолютната стойност на $u_k(z)$. Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ е сходящ за всяко $z \in \mathbb{C}$ със сума $\exp(|z|) - 1$, то оценката (5.2.3) е в сила в цялата комплексна равнина.

За да докажем (5.2.4), ние записваме (5.2.2) както следва

$$\theta_{\alpha,n}(z) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha k+n)} z^k,$$

и означавайки

$$\tilde{\gamma}_{n,k} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha k+n)}, \quad \tilde{u}_{n,k}(z) = \tilde{\gamma}_{n,k} z^k,$$

получаваме последователно

$$\tilde{\gamma}_{n,1} = 1;$$

$$0 < \tilde{\gamma}_{n,k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} \prod_{s=1}^{n-1} \frac{(\alpha+s)}{(\alpha k+s)} \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha k+1)}, \text{ за } k \in \mathbb{N}, k \neq 1,$$

$$|\tilde{u}_{n,k}(z)| = \tilde{\gamma}_{n,k} |z|^k \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha k+1)} |z|^k, \text{ за } k \in \mathbb{N}.$$

Следователно

$$|\theta_{\alpha,n}(z)| \leq \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{\Gamma(\alpha k+1)} - 1 \right),$$

което доказва (5.2.4).

По-нататък, за всички z от компактното множество K , неравенствата (5.2.5) следват незабавно от току-що доказаните неравенства (5.2.3) и (5.2.4). $\square$

5.3 Обобщени функции на Митаг-Лефлер

Следващото обобщение на функцията $E_\alpha(z)$ е предложено от Прабхакар [107], който обобщава (5.1.1), а също така и (5.1.2), въвеждайки трипараметричната функция $E_{\alpha,\beta}^\gamma$ от вида

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (5.3.1)$$

където $(\gamma)_k$ е символът на Поххамер ([17], Section 2.1.1), даден с (1.3.1). За $\gamma = 1$ функцията $E_{\alpha,\beta}^\gamma$ съвпада с $E_{\alpha,\beta}$, а за $\gamma = \beta = 1$ с E_α , т.е.

$$E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z), \quad E_{\alpha,1}^1(z) = E_\alpha(z).$$

Обобщената 3-параметрична функция на Митаг-Лефлер (5.3.1) е известна в литературата още като *функция на Прабхакар*. Тя също е цяла функция на z с ред $\rho = 1/\operatorname{Re}(\alpha)$, както е споменато в [40] и [68]. Самият Прабхакар изучава някои свойства на тази функция, както и свойствата на един интегрален оператор, съдържащ я като ядро, и прилага получените резултати за да докаже съществуването и единствеността на решението на съответното интегрално уравнение. По-късно са доказани и други свойства на $E_{\alpha,\beta}^\gamma(z)$, включително диференциране и интегриране от класически и дробен ред, от Килбас, Сайго и Саксена [39]. Наскоро беше публикувано подробно изследване от Кристиан Лаволт [58]. В него се изучават обобщени дробни диференциални и интегрални оператори от обобщената функция на Митаг-Лефлер, като освен това се обобщават обичайните ѝ свойства. Отбелязани са и важни приложения за теоретичната физика и приложната математика.

За различни свойства на Прабхакаровата функция от Митаг-Лефлеров тип може да се види в монографията на Килбас, Сривастава и Трухильо [40], а за нейното скорошно използване в триенето и обобщените ядра на паметта, както и в точните решения на обобщеното дробно уравнение на Лангевин – например в Сандев, Метцлер, Томовски [118], [119], в Сандев, Чечкин, Кантц и Метцлер [117] и в Сандев и Томовски [125]. Изучаван е също и интегрален оператор, който има за ядро функция от такъв вид, в пространството $L(a, b)$. Тази функция играе фундаментална роля в описанието на аномалните диелектрични свойства в неразпределените материали и хетерогенните системи, които проявяват едновременно нелокалност и нелинейност [21].

Функциите (5.3.1) и редове по тях са използвани напоследък за изразяване на решенията на обобщеното уравнение на Лангевин от Сандев, Томовски и Дубелдам [121], а също така и за разлагане по собствените функции на решението на двучленно дробно уравнение (относно времето) от Бажлева и Димовски [7], [8].

Изучаван е също и друг тип 3-параметрична функция на Митаг-Лефлер (q -аналог на функцията на Митаг-Лефлер), като например в Райкович, Маринкович и Станкович [110]. Всъщност, специалната роля на функциите от Митаг-Лефлеров тип в дробното смятане е открита от много учени от различна гледна точка. Изобилие от най-разнообразни свойства на такива функции са изучени от много автори, между тях [20], [40], [44], [47], [105], [110], [29] и други.

5.4 Резултати, свързани с параметрите на функцията на Прабхакар

Сега да разгледаме обобщените (3-параметрични) функции на Митаг-Лефлер (5.3.1) за цели неотрицателни индекси $\beta = n$; $n = 0, 1, 2, \dots$, а именно:

$$E_{\alpha, n}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + n)} \frac{z^k}{k!}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.4.1)$$

Забележка 5.4.1. *Според стойностите на параметрите, е възможно някои от коефициентите в (5.4.1) да се анулират. В тази секция ние възнамеряваме да установим, че съществува число $p \in \mathbb{N}_0$, такова че представянето (5.4.1) може да се запише както следва:*

$$E_{\alpha, n}^{\gamma}(z) = z^p \sum_{k=p}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + n)} \frac{z^{k-p}}{k!}, \quad (5.4.2)$$

като определим съответната стойност на p .

За тази цел, означавайки за удобство

$$a_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha k + n)}, \quad b_k = (\gamma)_k, \quad c_k = a_k b_k / k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

ние разглеждаме поотделно три основни случая, отразени в лемите по-долу.

Лема 5.4.1. [99] Ако $\gamma \in \mathbb{C}$, но $\gamma \notin \mathbb{Z}_0^-$, то

1. $p = 0$ за $n \in \mathbb{N}$,
2. $p = 1$ за $n = 0$.

Доказателство. Нека най-напред $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, в този първи случай $b_k \neq 0$ и освен това $\alpha k + n$ не са нито отрицателни цели числа, нито нула. Поради това $a_k \neq 0$ и следователно $c_k \neq 0$ за всички стойности на k . Във втория случай, когато $n = 0$, само a_0 е равно на нула, и тогава $c_0 = 0$, но $c_k \neq 0$ за всички естествени стойности на k . $\square$

В частност, ако $\gamma = 1$ резултатът, който се получава в Лема 5.4.1 се отнася за двупараметричните функции $E_{\alpha,n}(z)$, т.е. всичките коефициенти в неговото степенно представяне са различни от нула, евентуално с изключение на c_0 . Именно, в сила е формулираното по-долу следствие.

Следствие 5.4.1. [99] Нека $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. Тогава функциите на Митаг-Лефлер $E_{\alpha,n}(z)$ удовлетворяват зависимостта

$$E_{\alpha,n}(z) = z^p \sum_{k=p}^{\infty} \frac{z^{k-p}}{\Gamma(\alpha k + n)}, \quad (5.4.3)$$

със съответните стойности на p , а именно

1. $p = 0$ за $n \in \mathbb{N}$,
2. $p = 1$ за $n = 0$.

Забележка 5.4.2. В действителност, в останалите два случая функциите (5.4.1) се свеждат до полиноми от степен $-\gamma$, и означавайки $m = -\gamma$, можем да запишем представянето (5.4.2) в следната еквивалентна форма

$$E_{\alpha,n}^{\gamma}(z) = z^p \sum_{k=p}^m \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + n)} \frac{z^{k-p}}{k!}, \quad m = -\gamma \in \mathbb{N}_0. \quad (5.4.4)$$

Лема 5.4.2. [99] Ако $\gamma \in \mathbb{Z}^-$ и $m = -\gamma$, то (5.4.1) може да бъде изразено с формулата (5.4.4) със следните стойности на p :

1. $p = 0$ за $n \in \mathbb{N}$,
2. $p = 1$ за $n = 0$.

Доказателство. Стойностите на коефициентите a_k са същите, като в доказателството на Лема 5.4.1. Освен това, за числата b_k , може да се

запише

$$\begin{aligned} b_k &= (-m)_k = -m(-m+1)\dots(-m+k-1) \\ &= (-1)^k m(m-1)\dots(m-k+1), \end{aligned}$$

откъдето $b_k \neq 0$ само за $k \leq m$ и поради това $c_k = 0$ за всички $k > m$. Следователно, стойностите на p са такива, каквито се изискваше да се докаже. $\square$

Следствие 5.4.2. [99] Ако $\gamma \in \mathbb{Z}^-$ и $m = -\gamma$, то (5.4.4) може да се запише във вида:

$$E_{\alpha,n}^{-m}(z) = z^p \sum_{k=p}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{z^{k-p}}{\Gamma(\alpha k + n)}. \quad (5.4.5)$$

със съответните стойности на p .

Доказателство. Като вземем под внимание зависимостта $c_k = a_k b_k / k!$ и израза за b_k , получен в доказателството на Лема 5.4.2, валидността на (5.4.5) следва автоматично. $\square$

Забележка 5.4.3. Нека да споменем, че $(-1)^p \binom{m}{p} = (-m)_p$ и освен това $p! = 1$, когато $p = 0$ или $p = 1$, а $m \in \mathbb{N}$.

Остава още да разгледаме само най-простия случай, а именно $\gamma = 0$. В този случай е вярна следната лема.

Лема 5.4.3. [99] Ако $\gamma = 0$, то:

1. $E_{\alpha,n}^0(z) = \frac{1}{\Gamma(n)}$ за $n \in \mathbb{N}$,
2. $E_{\alpha,n}^0(z) = 0$ за $n = 0$.

Доказателство. Вземайки под внимание, че $b_k = 0$ за всички $k \in \mathbb{N}$, сумата в (5.3.1) се редуцира до първото събираемо c_0 . Останалото следва директно след пресмятане на този единствен член. $\square$

Забележка 5.4.4. Да отбележим, че ако γ е неположително цяло число (т.е. γ е нула или отрицателно цяло число), както се вижда по-горе, функциите (5.3.1) се свеждат до полиноми. Обаче, когато $\gamma \notin \mathbb{Z}_0^-$, те са цели функции на z от ред $\rho = 1/\operatorname{Re}(\alpha)$ и това не е трудно да се провери.

Горните леми и Забележка 5.4.3 показват, че функциите $E_{\alpha,n}^{\gamma}(z)$ могат да се запишат в следния вид

$$E_{\alpha,n}^{\gamma}(z) = \frac{(\gamma)_p}{\Gamma(\alpha p + n)} z^p (1 + \theta_{\alpha,n}^{\gamma}(z)), \quad (5.4.6)$$

с функция

$$\theta_{\alpha,n}^{\gamma}(z) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{(\gamma)_p} \frac{\Gamma(\alpha p + n)}{\Gamma(\alpha k + n)} \frac{z^{k-p}}{k!} \quad \text{за } \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-, \quad (5.4.7)$$

и съответно, за $\gamma = -m$, $m \in \mathbb{N}$, както следва:

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha,n}^{-m}(z) &= \sum_{k=p+1}^m \frac{(-m)_k}{(-m)_p} \frac{\Gamma(\alpha p + n)}{\Gamma(\alpha k + n)} \frac{z^{k-p}}{k!} \\ &= \sum_{k=p+1}^m \frac{(-1)^{k-p} \binom{m}{k}}{\binom{m}{p}} \frac{\Gamma(\alpha p + n)}{\Gamma(\alpha k + n)} z^{k-p}. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Забележка 5.4.5. В горните представяния (5.4.6)–(5.4.8), параметърът γ е различен от нула, и параметърът p се определя от предшестващите леми. По-конкретно, $p = 0$ за всички естествени стойности на n и $p = 1$ за $n = 0$. Функциите $E_{\alpha,0}^n$ имат възможно най-прост вид, даден с Лема 5.4.3, и освен това $E_{\alpha,0}^0 = 0$.

5.5 Неравенства за функцията на Прабхакар

В тази секция нашата цел е да оценим целите функции $\theta_{\alpha,n}^{\gamma}(z)$ за неотрицателни цели стойности на n , т.е.

$$n \in \mathbb{N}_0, \alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0 \text{ и } z \in \mathbb{C}.$$

За целта преобразуваме изразите в равенствата (5.4.7) и (5.4.8), във следната форма

$$\theta_{\alpha,n}^{\gamma}(z) = \frac{\Gamma(\alpha p + n)}{\Gamma(\alpha(p+1) + n)} \sum_{k=p+1}^{\infty} \gamma_{n,k} \frac{(\gamma)_k}{(\gamma)_p} \frac{z^{k-p}}{k!}, \quad (5.5.1)$$

и съответно

$$\theta_{\alpha,n}^{-m}(z) = \frac{\Gamma(\alpha p + n)}{\Gamma(\alpha(p+1) + n)} \sum_{k=p+1}^m (-1)^{k-p} \gamma_{n,k} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{m}{p}} z^{k-p}, \quad (5.5.2)$$

като с $\gamma_{n,k}$ е означен изразът

$$\gamma_{n,k} = \frac{\Gamma(\alpha(p+1) + n)}{\Gamma(\alpha k + n)}. \quad (5.5.3)$$

Теорема 5.5.1. [99] *Нека $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, $n \in \mathbb{N}_0$ и $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество. Тогава съществува цяла функция τ , такава че*

$$|\theta_{\alpha,n}^{\gamma}(z)| \leq \frac{|\Gamma(\alpha p + n)|}{|\Gamma(\alpha(p+1) + n)|} \tau(|z|; \alpha, \gamma), \quad (5.5.4)$$

за всички стойности на $z \in \mathbb{C}$. Освен това, съществува константа $0 < C = C(K) < \infty$, за която е изпълнено неравенството

$$|\theta_{\alpha,n}^{\gamma}(z)| \leq C \frac{|\Gamma(\alpha p + n)|}{|\Gamma(\alpha(p+1) + n)|}, \quad (5.5.5)$$

за всички неотрицателни цели стойности на n и всички $z \in K$.

Доказателство. За да намерим функция τ с желаните свойства и да докажем неравенството (5.5.4), ние оценяваме функцията (5.5.1), започвайки със стойностите на (5.5.3). Тъй като

$$\gamma_{0,k} = \frac{\Gamma(\alpha(p+1))}{\Gamma(\alpha k)},$$

$$\gamma_{n,k} = \frac{\Gamma(\alpha(p+1))}{\Gamma(\alpha k)} \frac{(\alpha(p+1))}{(\alpha k)} \cdots \frac{(\alpha(p+1) + n - 1)}{(\alpha k) + n - 1}, \quad \text{за } n \in \mathbb{N},$$

и поради следващото неравенство

$$\frac{|\alpha(p+1)|}{|\alpha k|} \cdots \frac{|\alpha(p+1) + n - 1|}{|\alpha k + n - 1|} \leq 1,$$

получаваме, че

$$|\gamma_{n,k}| \leq \frac{|\Gamma(\alpha(p+1))|}{|\Gamma(\alpha k)|},$$

за всички възможни стойности на n и k . Накрая, доказателството на неравенството (5.5.4) приключва, след като се вземе

$$\tau(z; \alpha, \gamma) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{|\Gamma(\alpha(p+1))|}{|\Gamma(\alpha k)|} \frac{|(\gamma)_k|}{|(\gamma)_p|} \frac{z^{k-p}}{k!},$$

сравни с (5.5.4). Тъй като τ е цяла функция, а също така и поради току-що доказаното неравенство, вярността на (5.5.5) следва незабавно. $\square$

Теорема 5.5.2. [99] *Нека $n \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \in \mathbb{Z}^-$, $m = -\gamma$ (с изключение на случая, в който $n = 0$ и $\gamma = -1$, описан в Забележка 5.5.1) и $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество. Тогава съществува цяла функция t , такава че*

$$|\theta_{\alpha,n}^{-m}(z)| \leq \frac{|\Gamma(\alpha p + n)|}{|\Gamma(\alpha(p+1) + n)|} t(|z|; \alpha, \gamma). \quad (5.5.6)$$

за всички $z \in \mathbb{C}$. Освен това, съществува константа $0 < C = C(K) < \infty$, за която е изпълнено неравенството

$$|\theta_{\alpha,n}^{-m}(z)| \leq C \frac{|\Gamma(\alpha p + n)|}{|\Gamma(\alpha(p+1) + n)|}, \quad (5.5.7)$$

за всички неотрицателни цели стойности на n и всички $z \in K$.

Доказателство. Разглеждайки израза (5.5.2), следвайки линията на пресмятания в доказателството на Теорема 5.5.1 и означавайки

$$t(z; \alpha, \gamma) = \sum_{k=p+1}^m \frac{|\Gamma(\alpha(p+1))|}{|\Gamma(\alpha k)|} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{m}{p}} z^{k-p},$$

ние приключваме доказателството, по аналогия на доказателството на Теорема 5.5.1. $\square$

Забележка 5.5.1. *Разглеждането на най-простия случай, в който $n = 0$ и $\gamma = -1$, води до резултата, записан по-долу:*

$$E_{\alpha,0}^{-1}(z) = -\frac{z}{\Gamma(\alpha)}, \quad \theta_{\alpha,0}^{-1}(z) = 0. \quad (5.5.8)$$

5.6 Асимптотични формули за “големи” стойности на индекса n

В тази секция са осигурени няколко асимптотични формули за “големи” стойности на индексите, които се използват в по-нататъшното изложение.

Теорема 5.6.1. [99] *Нека $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, тогава функциите на Митаг-Лефлер E_n и $E_{\alpha,n}$ имат следните асимптотични формули*

$$E_n(z) = 1 + \theta_n(z), \quad \theta_n(z) \rightarrow 0 \quad \text{когато } n \rightarrow \infty, \quad (5.6.1)$$

$$E_{\alpha,n}(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} (1 + \theta_{\alpha,n}(z)), \quad \theta_{\alpha,n}(z) \rightarrow 0 \quad \text{когато } n \rightarrow \infty, \quad (5.6.2)$$

за $z \in \mathbb{C}$. Функциите $\theta_n(z)$, $\theta_{\alpha,n}(z)$ са холоморфни там, а в компактните подмножества на комплексната равнина $\mathbb{C}$ сходимостта е равномерна и освен това са изпълнени равенствата

$$\theta_n(z) = O(1/n!), \quad \theta_{\alpha,n}(z) = O(1/n^\alpha). \quad (5.6.3)$$

Доказателство. Тъждествата (5.6.1) и (5.6.2) се получават автоматично благодарение на равенствата (5.1.1), (5.1.2), (5.2.1) и (5.2.2). Холоморфността на $\theta_n(z)$ и $\theta_{\alpha,n}(z)$ следва от холоморфността на $E_n(z)$ и $E_{\alpha,n}(z)$ в цялата комплексна равнина и зависимостите между тях, дадени в (5.6.1) и (5.6.2). Останалото незабавно следва, съгласно Теорема 5.2.1 и Забележка 1.1.2 (iii). $\square$

Теорема 5.6.2. [99] *Нека $z, \alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \neq 0$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ и $\theta_{\alpha,n}^\gamma$ са дадени с формулите (5.5.1)–(5.5.3). Тогава обобщените функции на Митаг-Лефлер (5.4.1) удовлетворяват следните асимптотични формули*

$$E_{\alpha,n}^\gamma(z) = \frac{(\gamma)_p}{\Gamma(\alpha p + n)} z^p (1 + \theta_{\alpha,n}^\gamma(z)) \quad \text{и} \quad \theta_{\alpha,n}^\gamma(z) \rightarrow 0 \quad \text{когато } n \rightarrow \infty, \quad (5.6.4)$$

със съответната стойност на p , според стойността на γ . Освен това, върху компактните подмножества на комплексната равнина $\mathbb{C}$, сходимостта е равномерна и

$$\theta_{\alpha,n}^\gamma(z) = O\left(\frac{1}{n^{\operatorname{Re}(\alpha)}}\right) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (5.6.5)$$

Доказателство. С използването на формулата (5.4.6), Теорема 5.5.1 и 5.5.2, както и свойството на частното на две Γ -функции (Забележка 1.1.2 (iii)), доказателството става очевидно. $\square$

В заключение, да отбележим, че в случая $\gamma = 1$ се получават аналогични резултати, свързани с класическите функции $E_{\alpha,n}$ на Митаг-Лефлер, т.е. всички резултати, получени в Секции 5.5 и 5.6 са валидни в частност и за $E_{\alpha,n}$. Допълнително, ако параметърът α е положителен, то следват резултатите в Секция 5.2 и верността на Теорема 5.6.1.

И така, може да се направи следната важна забележка.

Забележка 5.6.1. *Като се има предвид Следствие 5.4.1, зависимостта (5.6.4) води до стойност на параметъра $p = 1$ в съответното представяне, свързано с функциите на Митаг-Лефлер $E_{\alpha,0}(z) = E_{\alpha,0}^1(z)$.*

Забележка 5.6.2. *Като се вземат под внимание Лема 5.4.3 и Забележка 5.5.1, следват следните зависимости*

$$\theta_{\alpha,n}^0(z) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \theta_{\alpha,0}^{-1}(z) = 0; \quad E_{\alpha,0}^0(z) = 0. \quad (5.6.6)$$

Забележка 5.6.3. *Съгласно асимптотичните формули (5.6.1) и (5.6.4) следва, че съществува естествено число M , такова че функциите $E_n(z)$, $E_{\alpha,n}(z)$ и $E_{\alpha,n}^\gamma(z)$ нямат изобщо никакви нули за $n > M$, евентуално с изключение на нулата.*

Забележка 5.6.4. *Всяка една от функциите $E_n(z)$, $E_{\alpha,n}(z)$ и $E_{\alpha,n}^\gamma(z)$ ($n \in \mathbb{N}$), бидейки цяла функция, която не е тождествено нула, има най-много краен брой нули в затвореното и ограничено множество $|z| \leq R$. Освен това, поради Забележка 5.6.3, не повече от краен брой от тези функции имат нули, с изключение евентуално на нулата (началото).*

Глава 6

По-нататъшни обобщения на функциите от Беселов и Митаг-Лефлеров тип

6.1 Мултииндексни функции на Митаг-Лефлер

Въпреки че функциите на Митаг-Лефлер остават дълго време незабелязани и непознати, в днешно време са се появили най-разнообразни техни обобщения във връзка с приложенията им като решения на уравнения и системи от дробен ред, които моделират различни феномени и числени алгоритми. В края на двадесети век е въведен и изучаван от Якубович и Лучко [132], Лучко и Горенфло [60], Лучко [59] и Кирякова [43] – [47] клас от специални функции от Митаг-Лефлеров тип, които са мултииндексни аналози на $E_{\alpha, \beta}(z)$.

В тези функции индексите $\alpha := 1/\rho$, $\beta := \mu$ са заместени от две множества от мултииндекси, или вектор-индекси, а именно

$$\alpha \rightarrow (1/\rho_1, 1/\rho_2, \dots, 1/\rho_m) \quad \text{и} \quad \beta \rightarrow (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m),$$

от размерност $m = 1, 2, 3, \dots$

Дефиниция 6.1.1. *Нака $m > 1$ е цяло число и $\rho_1, \dots, \rho_m > 0$, $\mu_1, \dots, \mu_m$ са произволни реални (комплексни) числа. Посредством тези “мултииндекси”, мултииндексните (вектор-индексни) функции на Митаг-Лефлер*

са дефинирани както следва:

$$E_{\left(\frac{1}{\rho_i}\right), (\mu_i)}(z) = E_{\left(\frac{1}{\rho_i}\right), (\mu_i)}^m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho_1} + \mu_1\right) \dots \Gamma\left(\frac{k}{\rho_m} + \mu_m\right)}. \quad (6.1.1)$$

Този интересен клас от функции се появява за първи път в качеството на явно решение на задачи от типа на Коши за дробни диференциални уравнения от дробен мултиред в монографията [132]. Теорията на този клас от мултииндексни функции на Митаг-Лефлер е подробно развита в поредица от статии от Кирякова други автори. По-конкретно, в Кирякова [44] е доказано, че мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.1.1) са цели функции от ред ρ и тип σ , с

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_m}, \quad \sigma = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1}} \dots \left(\frac{\rho_m}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_m}}. \quad (6.1.2)$$

В тази статия, а също и в [47], могат да бъдат намерени редица други основни свойства, интегрални и диференциални формули и пр. за (6.1.1). Информация за приложенията на този клас от специални функции в решенията на уравнения и модели от дробен ред може да се намери например в Кирякова и Лучко [52]. Изследването на Килбас, Королева и Рогозин [37] описва историческото развитие на теорията на тези мултииндексни ($2m$ -параметрични) Митаг-Лефлерови функции като подклас на обобщените хипергеометрични функции на Райт ${}_p\Psi_q(z)$. Методът на представянето чрез интеграл от типа на Мелин–Барнс позволява на тези автори да разширят въпросните функции и да ги изучат за случая на произволни стойности на параметрите (например за комплексни параметри информация има в [35] и [36]).

Мултииндексни функции на Митаг-Лефлер (6.1.1) могат да се разглеждат също и като “дробно индексни” аналози на Беселовите и хипер-Беселовите функции (сравни напр. с (4.1.6), отчитайки, че $k! = \Gamma(k+1)$):

$$J_{\nu_1, \dots, \nu_{m-1}}^{(m-1)}(z) = \left(\frac{z}{m}\right)^{\sum_{i=1}^{m-1} \nu_i} E_{(1, \dots, 1), (\nu_1+1, \dots, \nu_{m-1}+1, 1)}^m(-(z/m)^m), \quad (6.1.3)$$

и обобщения на дълъг списък от специални функции, използвани в математическата физика, дробното смятане и също така като решения на разнообразни математически модели (например в изследванията на Кирякова [47], [46], [45], и Кирякова и Лучко [52]).

6.2 Резултати, свързани с параметрите на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер

Нека да фиксираме $1 \leq i_0 \leq m$ и да означим за удобство

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1/\rho_i, \quad (\alpha_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m), \\ \prod_{i=1}^m{}' \Gamma(\alpha_i k + \mu_i) &= \prod_{i=1, i \neq i_0}^m \Gamma(\alpha_i k + \mu_i), \\ (\mu_{i_0}(n)) &= (\mu_1, \dots, \mu_{i_0-1}, n, \mu_{i_0+1}, \dots, \mu_m) = (\mu_i) |_{\mu_{i_0}=n}. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Да разгледаме сега мултииндексните функции на Митаг-Лефлер с индекси от вида $(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))$, т.е.

$$E_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_{i_0} k + n) \prod_{i=1}^m{}' \Gamma(\alpha_i k + \mu_i)}, \quad \text{за } n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.2.2)$$

Забележка 6.2.1. В зависимост от стойностите на α_i и μ_i ($i = 1, 2, \dots, m$), някои от коефициентите в (6.2.2) могат да се окажат нули, това е възможно само когато някои от числата μ_i са отрицателни реални числа или нула, но най-много краен брой от коефициентите могат да са нула. По-точно, ако $\mu_{i_q} \in \mathbb{R}_0^-$ за $q = 1, 2, \dots, M$ ($1 \leq M \leq m$), то всички коефициенти с $k > \max_{1 \leq q \leq M} \left(-\frac{\mu_{i_q}}{\alpha_{i_q}} \right)$, $k \in \mathbb{N}_0$, са различни от нула.

Казано по друг начин, съществуват числа $p \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$, такива че твърждеството (6.2.2) може да бъде записано в следния вид:

$$\begin{aligned} E_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z) &= \frac{z^p}{\Gamma(\alpha_{i_0} p + n) \prod_{i=1}^m{}' \Gamma(\alpha_i p + \mu_i)} \\ &+ \sum_{k=p+s}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_{i_0} k + n) \prod_{i=1}^m{}' \Gamma(\alpha_i k + \mu_i)}, \quad \text{за } n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Забележка 6.2.2. Да припомним, че ние използваме означенията, въведени в Забележка 4.2.1, след което да означим

$$a_{i_0}(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_{i_0}k + n)}, \quad a_i(k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i k + \mu_i)} \quad \text{за } i \neq i_0, \\ A_k = \prod_{i=1, i \neq i_0}^m a_i(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2.4)$$

За да определим съответните стойности на p и s в (6.2.3), ние разглеждаме три основни случая. За целта използваме означенията, въведени в Забележки 4.2.1 и 6.2.2, а също и

$$c_k = A_k a_{i_0}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2.5)$$

Лема 6.2.1. [99] Ако $\mu_i \in \mathbb{C}$ за $i \neq i_0$ и μ_i не са нито отрицателни реални числа, нито нула, а n е неотрицателно цяло число, то

1. $p = 0$ и $s = 1$ за $n \in \mathbb{N}$,
2. $p = 1$ и $s = 1$ за $n = 0$.

Доказателство. Очевидно, тъй като или $\mu_i > 0$ или $\mu_i \notin \mathbb{R}$, то числата $\alpha_i k + \mu_i \notin \mathbb{Z}_0^-$ за $i \neq i_0$ и $k = 0, 1, 2, \dots$. Освен това, в първия случай, $\alpha_{i_0} k + n > 0$. По тези причини, $A_k \neq 0$, $a_{i_0}(k) \neq 0$, и следователно $c_k \neq 0$, за всички стойности на k .

Във втория случай, тъй като $n = 0$, то $a_{i_0}(k) = 0$ за $k = 0$, $a_{i_0}(k) > 0$ за $k = 1, 2, \dots$, а $A_k \neq 0$ по същите причини, както в първия случай, което води до твърденията $c_0 = 0$ и $c_k \neq 0$ за $k = 1, 2, \dots$. $\square$

Лема 6.2.2. [99] Ако $i \neq i_0$, $\mu_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$, поне едно от $\mu_i \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}^-$, и n е неотрицателно цяло число, то съществуват положителни цели числа s_0 и l_0 такива че

1. $p = 0$ и $s = s_0$ за $n \in \mathbb{N}$,
2. $p = s_0$ и $s = l_0$ за $n = 0$.

Доказателство. В първия случай, $\alpha_{i_0} k + n > 0$ за всички стойности на k и следователно $a_{i_0}(k) > 0$ за $k = 0, 1, 2, \dots$. От друга страна, за $i \neq i_0$ е изпълнено $a_i(k) \neq 0$, откъдето следва, че $A_0 \neq 0$ и тогава $p = 0$. Обаче, някои от числата $\alpha_i k + \mu_i$ е възможно да принадлежат на $\mathbb{Z}_0^-$ и тогава съответното $c_k = 0$. Следователно, предвид Забележка 6.2.1, съществува $s_0 \in \mathbb{N}$ с $A_{s_0} \neq 0$, поради което $c_{s_0} \neq 0$ и $s = s_0$.

Във втория случай, понеже $n = 0$, то $a_{i_0}(k) = 0$ за $k = 0$, $a_{i_0}(k) > 0$ за $k = 1, 2, \dots$, и A_k имат същите стойности, както в първия случай. Следователно, съществува естествено число l_0 , такова че $A_{s_0} \neq 0$, $A_{s_0+l_0} \neq 0$ но $A_k = 0$ за $s_0 < k < s_0 + l_0$, откъдето следват твърденията $c_0 = 0$, $c_k = 0$ за $0 < k < s_0$ и $s_0 < k < s_0 + l_0$, и също така $c_k \neq 0$ за $k = s_0$ и $k = s_0 + l_0$. Следователно $p = s_0$ и $s = l_0$. $\square$

Лема 6.2.3. [99] Ако $i \neq i_0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$, поне едно от числата $\mu_i \in \mathbb{Z}_0^-$ и n е неотрицателно цяло число, тогава съществуват естествени числа p_0 и s_0 , такива че $p = p_0$ и $s = s_0$.

Доказателство. Разглеждайки случая $n \in \mathbb{N}$, получаваме $a_{i_0}(k) > 0$ за $k = 0, 1, 2, \dots$. От друга страна, ако $i \neq i_0$, то $a_i(0) = 0$ за $i \neq i_0$, откъдето $A_0 = 0$, и освен това е възможно някои от числата $\alpha_i k + \mu_i$ да принадлежи на $\mathbb{Z}_0^-$. Следователно съществуват числа $p_0, s_0 \in \mathbb{N}$, такива че $A_{p_0} \neq 0$, $A_{p_0+s_0} \neq 0$ и $A_k = 0$ за $p_0 < k < p_0 + s_0$. Поради това $c_{p_0} \neq 0$, $c_{p_0+s_0} \neq 0$, което означава, че $p = p_0$, $s = s_0$.

В другия случай, тъй като $n = 0$, то $a_{i_0}(k) = 0$ за $k = 0$ и $a_{i_0}(k) > 0$ за $k = 1, 2, \dots$. Освен това, A_k имат същите стойности, както в случая $n \in \mathbb{N}$. Следователно (със същите p_0 и s_0), $c_{p_0} \neq 0$, $c_{p_0+s_0} \neq 0$, $c_k = 0$ за $p_0 < k < p_0 + s_0$, поради което $p = p_0$ и $s = s_0$. $\square$

6.3 Неравенства и асимптотични формули за “големи” стойности на параметрите μ

Първо да се занимаем с функциите (6.2.2), като припомним, че те са дефинирани при условията (6.2.1), т.е.

$$\alpha_i > 0, \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, m.$$

В тази секция ние доказваме асимптотична формула за “големи” стойности на индекса $\mu_{i_0} = n$ ($i_0 = 1, 2, \dots, m$).

Нека стойностите p и s ($p \geq 0$, $s \geq 1$) са определените от предшестващите леми и нека

$$\theta_n(z) = \sum_{k=p+s}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha_{i_0}p + n) \prod_{i=1}^m \Gamma(\alpha_i p + \mu_i)}{\Gamma(\alpha_{i_0}k + n) \prod_{i=1}^m \Gamma(\alpha_i k + \mu_i)} z^{k-p}. \quad (6.3.1)$$

По-нататък нашата цел е да оценим функциите $\theta_n(z)$, доказвайки определени неравенства както в комплексната равнина $\mathbb{C}$, така и върху нейните компактни множества. За целта преобразуваме израза в равенството (6.3.1), което води до твърдението

$$\theta_n(z) = \frac{\Gamma(\alpha_{i_0}p + n) \prod_{i=1}^m \Gamma(\alpha_i p + \mu_i)}{\Gamma(\alpha_{i_0}(p + s) + n)} \sum_{k=p+s}^{\infty} \frac{\gamma_{n,k}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(\alpha_i k + \mu_i)} z^{k-p} \quad (6.3.2)$$

с $\gamma_{n,k}$ както следва:

$$\gamma_{n,k} = \frac{\Gamma(\alpha_{i_0}(p + s) + n)}{\Gamma(\alpha_{i_0}k + n)}.$$

С цел използването в по-нататъшните разглеждания да припомним, че съществува число $1 < \alpha_0 < 2$, такова че Ойлеровата Гама функция $\Gamma(\alpha)$ е растяща в интервала (α_0, ∞) и намаляваща в $(0, \alpha_0)$ и освен това $\Gamma(\alpha)$ достига абсолютния си минимум върху множеството $\mathbb{R}^+$ на положителните реални числа в точката α_0 , т. е. $\Gamma(\alpha_0) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \Gamma(\alpha)$ (Забележка 1.1.2(i)).

Теорема 6.3.1. [99] *Нека $z \in \mathbb{C}$ и $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество. Тогава съществува цяла функция $\varphi_{(\alpha_i), (\mu_i)}(z)$, такава че за всички стойности на $n \in \mathbb{N}_0$ е изпълнено неравенството*

$$|\theta_n(z)| \leq \frac{\Gamma(\alpha_{i_0}p + n)}{\Gamma(\alpha_{i_0}(p + s) + n)} \times \varphi_{(\alpha_i), (\mu_i)}(|z|), \quad (6.3.3)$$

и освен това съществува константа $C = C(K)$, $0 < C < \infty$, такава че

$$|\theta_n(z)| \leq C \frac{\Gamma(\alpha_{i_0}p + n)}{\Gamma(\alpha_{i_0}(p + s) + n)}, \quad (6.3.4)$$

за всички $z \in K$.

Доказателство. Първо да отбележим, че случаят $n \geq 2$, осигурява верността на неравенството $0 < \gamma_{n,k} \leq 1$ за всички стойности на k . Нека сега $n = 0$ или $n = 1$. Тогава поради сходимостта си, редицата $\{\gamma_{n,k}\}_{k=p+s}^{\infty}$ е ограничена и следователно съществува константа $\tilde{A}$, такава че $|\gamma_{n,k}| \leq \tilde{A}$ за всички стойности на k .

Сега доказателството на оценката (6.3.3) върху цялата комплексна равнина завършва, като се вземе

$$\varphi_{(\alpha_i), (\mu_i)}(z) = A \prod_{i=1}^m {}' |\Gamma(\alpha_i p + \mu_i)| \sum_{k=p+s}^{\infty} \frac{z^{k-p}}{\prod_{i=1}^m {}' |\Gamma(\alpha_i k + \mu_i)|}$$

с константа $A = 1$ за $n \geq 2$ и $A = \tilde{A}$ за $n = 0$ и $n = 1$.

Накрая, за всички $z \in K$, неравенството (6.3.4) следва незабавно от верността на неравенството (6.3.3). $\square$

По-нататък е дадена асимптотична формула за “големи” стойности за индекса $\mu_{i_0} = n$.

Теорема 6.3.2. [99] *Нека K е непразно компактно подмножество на комплексната равнина $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$ и нека θ_n е функцията, дефинирана с (6.3.1), със съответните стойности на $p \in \mathbb{N}_0$ и $s \in \mathbb{N}$. Тогава мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.2.2) имат следната асимптотична формула*

$$E_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z) = \frac{z^p}{\Gamma(\alpha_{i_0} p + n) \prod_{i=1}^m {}' \Gamma(\alpha_i p + \mu_i)} (1 + \theta_n(z)), \quad (6.3.5)$$

$$\theta_n(z) \rightarrow 0 \text{ когато } n \rightarrow \infty.$$

Освен това, функциите $\theta_n(z)$ са холоморфни при $z \in \mathbb{C}$, сходимостта е равномерна върху непразните компактни подмножества на комплексната равнина $\mathbb{C}$ и

$$\theta_n(z) = O\left(\frac{\Gamma(\alpha_{i_0} p + n)}{\Gamma(\alpha_{i_0}(p+s) + n)}\right) = O\left(\frac{1}{n^{s\alpha_{i_0}}}\right), \quad z \in K. \quad (6.3.6)$$

Доказателство. Тъждеството (6.3.5) следва автоматично благодарение на (6.2.2), (6.2.3), (6.3.1) и (6.3.2). Холоморфността на θ_n следва от холоморфността на $E_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}$ в цялата комплексна равнина и равенството (6.3.5). Останалото следва незабавно от Теорема 6.3.1. $\square$

Забележка 6.3.1. Теорема 6.3.1 и 6.3.2 остават в сила и при условие, че $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$, но в този случай числата p и s подлежат на определяне.

Забележка 6.3.2. Да отбележим, че съгласно асимптотичната формула (6.3.5) следва, че съществува естествено число M , такова че функциите (6.2.2) нямат нули за $n > M$, евентуално с изключение на нулата.

Забележка 6.3.3. Всяка от функциите (6.2.2) ($n \in \mathbb{N}_0$), бидейки цяла функция, не еждествено нула, има най-много краен брой нули в затвореното и ограничено множество $|z| \leq R$. Освен това, както е отразено в Забележка 6.3.2, най-много краен брой от тези функции имат някакви нули, евентуално с изключение на нулата.

Нека $z, \nu_i \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\nu_i + 1) > 0$ ($i = 1, \dots, m$) и $J_{(\nu_{i_0}(n))}$ ($n = 0, 1, \dots$) са функциите (4.2.9) и допълнително нека

$$\begin{aligned} (\tilde{\nu}_{i_0}(n+1)) &= (\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_{i_0-1}, n+1, \tilde{\nu}_{i_0+1}, \dots, \tilde{\nu}_m, \tilde{\nu}_{m+1}) = (\tilde{\nu}_i) \big|_{\tilde{\nu}_{i_0}=n+1}, \\ \nu_{m+1} &= 0, \quad \tilde{\nu}_i = \nu_i + 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m+1). \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Тогава формулата (6.1.3) може да бъде адаптирана към функцията (4.2.9), която се записва и във вида

$$J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z) = A(z; m, n) E_{(1, \dots, 1), (\tilde{\nu}_{i_0}(n+1))}^{m+1} \left(- \left(\frac{z}{m+1} \right)^{m+1} \right), \quad (6.3.8)$$

с $A(z; m, n)$ дефинирана от формулата (4.2.10).

Сега възнамеряваме да разгледаме функциите $E_{(1, \dots, 1), (\tilde{\nu}_{i_0}(n+1))}^{m+1}$, да ги представим във вида (6.3.5) и да намерим горна оценка за модула $|\vartheta_n|$ на съответната функция ϑ_n . Така намерената оценка се използва в по-нататъшното изложение за да намерим оценката, свързана с функциите (6.3.8). Да напомним, че съгласно Забележка 4.2.4, коефициентите на горе споменатите функции са различни от нула. Да започнем нашите разглеждания с $E_{(1, \dots, 1), (\tilde{\nu}_{i_0}(n+1))}^{m+1}(z)$. Предвид специфичните свойства на обсъжданите функции и използвайки техния явен вид, можем да запишем (както се вижда от (6.3.1), (6.3.5) и Забележка 6.3.1):

$$E_{(1, \dots, 1), (\tilde{\nu}_{i_0}(n+1))}^{m+1}(z) = \frac{\left(1 + \tilde{\vartheta}_n(z)\right)}{\Gamma(n+1) \prod_{i=1}^m \Gamma(\nu_i + 1)} \quad (6.3.9)$$

с функция

$$\tilde{\vartheta}_n(z) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^m {}'\Gamma(\nu_i + 1)}{(n+2)_{k-1} \prod_{i=1}^m {}'\Gamma(k + \nu_i + 1)} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}. \quad (6.3.10)$$

Верността на следващото твърдение, което се отнася до (6.3.10), може да бъде лесно потвърдена.

Теорема 6.3.3. [99] *Нека $\tilde{\vartheta}_n$ да бъде функцията, дефинирана с (6.3.10). Тогава е в сила следното неравенство*

$$|\tilde{\vartheta}_n(z)| \leq \frac{|z| \exp(|z|)}{(n+1) \prod_{i=1}^m {}'|(\nu_i + 1)|}, \quad (6.3.11)$$

за всички стойности на променливата z в комплексната равнина $\mathbb{C}$.

Доказателство. Наистина, преобразувайки израза от дясната страна на тъждеството (6.3.10), получаваме последователно

$$\begin{aligned} |\tilde{\vartheta}_n(z)| &\leq \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^m {}'|(\nu_i + 1)_k|} \frac{|z|^k}{\Gamma(k+1)} \\ &\leq \frac{|z|}{(n+1) \prod_{i=1}^m {}'|(\nu_i + 1)|} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^m {}'|(\nu_i + 2)_{k-1}|} \frac{|z|^{k-1}}{\Gamma(k+1)} \right) \\ &\leq \frac{|z|}{(n+1) \prod_{i=1}^m {}'|(\nu_i + 1)|} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|z|^{k-1}}{\Gamma(k)} \right), \end{aligned}$$

което потвърждава валидността на неравенството (6.3.11). □

Накрая да отбележим, че означението

$$\vartheta_n(z) = \tilde{\vartheta}_n \left(- \left(\frac{z}{m+1} \right)^{m+1} \right) \quad (6.3.12)$$

и равенството (6.3.9) водят до зависимостта

$$E_{(1,\dots,1),(\tilde{\nu}_{i_0}(n+1))}^{m+1} \left(- \left(\frac{z}{m+1} \right)^{m+1} \right) = \frac{(1 + \vartheta_n(z))}{\Gamma(n+1) \prod_{i=1}^m \Gamma(\nu_i + 1)}. \quad (6.3.13)$$

В заключение да отбележим, че комбинирането на последните няколко резултата позволява да бъде доказана Теорема 4.3.3, която се отнася за хипер-Беселовите функции. Наистина, последната формула има ключова роля за това доказателство. По-конкретно, може да се запише следващата забележка.

Забележка 6.3.4. *Валидността на (4.3.11) и (4.3.12) следва незабавно, отчитайки едновременно (6.3.8), (6.3.11) и (6.3.13). Накрая оценката (4.3.13) е елементарно следствие от неравенството (4.3.12).*

6.4 Дефиниция и основни свойства на мултииндексните (3m-параметрични) функции на Митаг-Лефлер

Наскоро, в [90], [93] и също в монографията [99], които са основата на тази глава, са въведени и изучавани 3m-параметричните функции на Митаг-Лефлер, които обобщават едновременно функциите на Прабхакар (5.3.1) и мултииндексните функции на Митаг-Лефлер с 2m параметъра, дадени с (6.1.1). По-долу е дадена тяхната дефиниция.

Дефиниция 6.4.1. *Нека $m > 1$ е естествено число и да разгледаме параметрите $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$), за всички стойности на $i = 1, 2, \dots, m$. Посредством мултииндексите $(\alpha_i), (\beta_i), (\gamma_i)$ взвеждаме така наречените 3m-параметрични функции (мултииндексни) на Митаг-Лефлер, именно:*

$$E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_k \dots (\gamma_m)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \frac{z^k}{(k!)^m}. \quad (6.4.1)$$

В [90] ние сме доказали следното твърдение, което дава реда и типа на (6.4.1).

Теорема 6.4.1. [99] Ако никой от параметрите $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ не е отрицателно цяло число или нула, то мултииндексната функция на Митаг-Лефлер (6.4.1) е цяла функция с ред ρ и тип σ , дадени със зависимостите:

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{Re}(\alpha_1) + \dots + \operatorname{Re}(\alpha_m), \quad (6.4.2)$$

съответно

$$\frac{1}{\sigma} = |(\rho\alpha_1)^{\rho\alpha_1}| \dots |(\rho\alpha_m)^{\rho\alpha_m}|. \quad (6.4.3)$$

Освен това, за всяко положително число ε е в сила асимптотичната оценка

$$|E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(z)| < \exp((\sigma + \varepsilon)|z|^\rho), \quad |z| \geq r_0 > 0, \quad (6.4.4)$$

със стойности на ρ, σ както е дадено в (6.4.2) и (6.4.3), за $|z| \geq r_0(\varepsilon)$ и $r_0(\varepsilon)$ достатъчно голямо.

Доказателство. Според формулата на Коши–Адамар, радиусът на сходимост на реда (6.4.1) е $R \geq 0$, където

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} (|c_k|)^{1/k} \quad \text{с} \quad c_k = \prod_{i=1}^m \left[\frac{(\gamma_i)_k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i k + \beta_i)} \right]. \quad (6.4.5)$$

Прилагайки асимптотичната формула на Стирлинг за Γ -функцията за големи z (Забележка 1.1.2), и вземайки под внимание (6.4.5), получаваме

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} (|c_k|)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^m |e^{\alpha_i} e^{-\alpha_i \ln(\alpha_i k)}|, \quad (6.4.6)$$

следователно $1/R = 0$, или $R = \infty$.

Сега формулата на Стирлинг, записана във вида

$$\ln \Gamma(z) = (z - 1/2) \ln z + 1/2 \ln(2\pi) + O(1/z)$$

заедно с добре познатата формула

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \ln k}{\ln(1/|c_k|)}$$

за ред на цяла функция от вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, дават

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/|c_k|)}{k \ln k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\alpha_i k) \ln k \right] \frac{1 + o(k \ln k)}{k \ln k} = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\alpha_i),$$

което потвърждава валидността на равенството (6.4.2).

По-нататък, типът на функцията $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ от ред ρ се определя от равенството

$$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left[k^{1/\rho} |c_k|^{1/k} \right].$$

Използвайки (6.4.5) и (6.4.6) и правейки пресмятания като по-горе, имаме:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left[k^{1/\rho} |c_k|^{1/k} \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[k^{1/\rho} \prod_{i=1}^m |e^{\alpha_i} e^{-\alpha_i \ln(\alpha_i k)}| \right] = \prod_{i=1}^m \frac{e^{\operatorname{Re}(\alpha_i)}}{|(\alpha_i)^{\alpha_i}|},$$

откъдето следва, че могат да се запишат следните равенства

$$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \prod_{i=1}^m \frac{e^{\operatorname{Re}(\alpha_i)}}{|(\alpha_i)^{\alpha_i}|}, \quad (\sigma)^{-1/\rho} = \rho^{1/\rho} \prod_{i=1}^m |(\alpha_i)^{\alpha_i}| = \prod_{i=1}^m |(\rho \alpha_i)^{\alpha_i}|,$$

което потвърждава равенството (6.4.3).

Асимптотичната оценка (6.4.4) следва от дефинициите за ред и тип на цяла функция. $\square$

Съответно, в другия случай имаме следното алтернативно твърдение.

Теорема 6.4.2. [99] *Ако поне един от параметрите $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ е отрицателно цяло число или нула, то мултииндексната функция на Митаг-Лефлер (6.4.1) се редуцира до крайна сума, както следва:*

$$E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(z) = \sum_{k=0}^M \frac{(\gamma_1)_k \dots (\gamma_m)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \frac{z^k}{(k!)^m}. \quad (6.4.7)$$

Доказателство. Нека $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_I}$ са стойностите на γ_i , които са цели отрицателни числа или нула и $M = \min\{-\gamma_{i_1}, \dots, -\gamma_{i_I}\}$. Тогава $(-M)_k = 0$ за всяко $k > M$ и следователно, всичките коефициенти

$$c_k = \prod_{i=1}^m \left[\frac{(\gamma_i)_k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i k + \beta_i)} \right]$$

са равни на нула, когато $k > M$. Това доказва твърдеството (6.4.7). $\square$

Допълнително, в зависимост от другите параметри α_i и β_i , и някои от останалите коефициенти могат да се окажат нула, т.е. съществуват числа p и s , такива че (6.4.1) се свежда до следния вид

$$E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(z) = \frac{(\gamma_1)_p \cdots (\gamma_m)_p}{\Gamma(\alpha_1 p + \beta_1) \cdots \Gamma(\alpha_m p + \beta_m)} \frac{z^p}{(p!)^m} + \sum_{k=p+s}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_k \cdots (\gamma_m)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \cdots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \frac{z^k}{(k!)^m},$$

съответно

$$E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(z) = \frac{(\gamma_1)_p \cdots (\gamma_m)_p}{\Gamma(\alpha_1 p + \beta_1) \cdots \Gamma(\alpha_m p + \beta_m)} \frac{z^p}{(p!)^m} + \sum_{k=p+s}^M \frac{(\gamma_1)_k \cdots (\gamma_m)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \cdots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \frac{z^k}{(k!)^m}.$$

Този проблем е подробно изследван от автора за различни частни случаи на гореразглежданите функции. Тука (в Секция 6.2) са дадени резултати, свързани с $(2m-)$ мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.1.1), включително асимптотични формули за “големи” стойности на индексите на тези функции, които са получени в [92].

6.5 Функции на Фокс и Райт

Повечето от специалните функции на математическата физика са частни случаи на обобщените хипергеометрични функции ${}_pF_q$, и по този начин на по-общите G -функции на Майер [17, Том 1, Гл. 5]. Обаче, функциите на Митаг-Лефлер са пример за специални функции, които не могат да бъдат включени в схемата на G -функциите на Майер, бидейки образец за

по-общата H -функция на Фокс. Именно,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(z) &= H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (0, 1) \\ (0, 1), (1-\beta, \alpha) \end{matrix} \right. \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}'} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)} (-z)^{-s} ds, \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

с подходящ контур на интегриране $\mathcal{L}'$ (може да се види например в [41, Апендикс]), и само за рационални стойности на $\alpha = p/q$, (6.5.1) се свежда до G -функция. По-общите ${}_p\Psi_q$ функции на Райт също служат за такъв пример.

Дефиниция 6.5.1. *Под понятието H -функция на Фокс се разбира обобщена хипергеометрична функция, дефинирана чрез интеграл от типа на контурния интеграл на Мелин–Барнс*

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n}(\sigma) &= H_{p,q}^{m,n} \left[\sigma \left| \begin{matrix} (a_1, A_1) \dots (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) \dots (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] \\ &= H_{p,q}^{m,n} \left[\sigma \left| \begin{matrix} (a_k, A_k)_1^p \\ (b_k, B_k)_1^q \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}'} \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \sigma^s ds \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

с подинтегрална функция от вида

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) = \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - sB_i) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + sA_j)}{\prod_{i=m+1}^q \Gamma(1 - b_i + sB_i) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - sA_j)}.$$

Кривата $\mathcal{L}'$ е подходящо избран контур в $\mathbb{C}$, m, n, p, q са цели числа $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$, параметрите $a_j, b_i \in \mathbb{C}$, $A_j, B_i > 0$, $j = 1, \dots, p$, $i = 1, \dots, q$ и $A_j(b_i + l) \neq B_i(a_j - l' - 1)$, $l, l' = 0, 1, 2, \dots$. Информация за различни типове контури и условия за съществуване и аналитичност на функцията (6.5.2) в кръгове $\subset \mathbb{C}$ с радиуси $\rho = \prod_{j=1}^p A_j^{-A_j} \prod_{i=1}^q B_i^{B_i}$, може да бъде намерена в [109], [41, Апендикс], [40], [68] и други.

За $A_1 = \dots = A_p = 1$, $B_1 = \dots = B_q = 1$, функцията (6.5.2) се обръща в по-популярната G -функция на Майер, виж [17, Том 1, Гл. 5, 23, 14]. G - и H -функциите обхващат почти всички елементарни и специални функции и това прави познаването им изключително полезно. Да отбележим, че обобщените хипергеометрични ${}_pF_q$ функции представляват специални случаи на G -функцията:

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \sigma) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{\sigma^k}{k!} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^q \Gamma(b_i)}{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)} G_{p, q+1}^{1, p} \left[-\sigma \left| \begin{matrix} 1 - a_1, \dots, 1 - a_p \\ 0, 1 - b_1, \dots, 1 - b_q \end{matrix} \right. \right], \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

докато функциите на Митаг-Лефлер (5.1.2) с ирационални параметри $\alpha > 0$ и обобщените хипергеометрични ${}_p\Psi_q$ функции на Райт с ирационални $A_j, B_i > 0$, дават примери за H -функции, които не могат да се редуцират до G -функции, като например представянето (6.5.1), и

$$\begin{aligned} {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_1, A_1) \dots (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) \dots (b_q, B_q) \end{matrix} \middle| \sigma \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + kA_1) \dots \Gamma(a_p + kA_p)}{\Gamma(b_1 + kB_1) \dots \Gamma(b_q + kB_q)} \frac{\sigma^k}{k!} \\ &= H_{p, q+1}^{1, p} \left[-\sigma \left| \begin{matrix} (1 - a_1, A_1), \dots, (1 - a_p, A_p) \\ (0, 1), (1 - b_1, B_1), \dots, (1 - b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right]. \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Обаче за $A_1 = \dots = A_p = 1$, $B_1 = \dots = B_q = 1$, както се вижда и от (6.5.3), е изпълнено равенството

$$\begin{aligned} {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_1, 1) \dots (a_p, 1) \\ (b_1, 1) \dots (b_q, 1) \end{matrix} \middle| \sigma \right] &= \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)}{\prod_{i=1}^q \Gamma(b_i)} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; \sigma) \\ &= G_{p, q+1}^{1, p} \left[-\sigma \left| \begin{matrix} 1 - a_1, \dots, 1 - a_p \\ 0, 1 - b_1, \dots, 1 - b_q \end{matrix} \right. \right]. \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

6.6 $3m$ -параметричните мултииндексни функции на Митаг-Лефлер като функции на Фокс и Райт

По-нататък, нека да определим мястото на въведените функции (6.4.1) сред познатите специални функции, по-специално в класовете на обобщените хипергеометрични функции на Райт и H -функциите на Фокс (повече за техните дефиниции и свойства може да се намери например в [109], [41, Апендикс]).

За тази цел, вземайки

$$\gamma_i \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\gamma_i) > 0; \quad i = 1, \dots, m,$$

първо определяме две числови множества, както е дадено по-долу:

$$S_l = \{s : s = -k \quad (k \in \mathbb{N}_0)\},$$

$$S_r = \{s : s = l + \gamma_i, \quad (l \in \mathbb{N}_0)\},$$

за които веднага може да бъде записана следната забележка.

Забележка 6.6.1. Сечението на множествата S_l и S_r е празно множество, т.е. $S_l \cap S_r = \emptyset$. Освен това, ако

$$\tilde{\gamma} = \min_{i=1 \div m} \operatorname{Re}(\gamma_i), \quad (6.6.1)$$

то множеството S_l лежи от лявата страна на ивицата

$$S = \{s : s \in \mathbb{C}, \quad 0 < \gamma' \leq \operatorname{Re}(s) \leq \gamma'' < \tilde{\gamma}\}, \quad (6.6.2)$$

докато множеството S_r лежи от дясната ѝ страна.

Тука ние доказваме следните нови представяния.

Теорема 6.6.1. [99] Нека $\alpha_i > 0$, $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\gamma_i) > 0$ за $i = 1, \dots, m$. Тогава мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.4.1) се изразяват чрез обобщените хипергеометрични функции на Райт, а също така и чрез H -функциите на Фокс, както следва:

$$\begin{aligned} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(z) &= A_m \Psi_{2m-1} \left[\begin{matrix} (\gamma_1, 1), \dots, (\gamma_m, 1) \\ (\beta_1, \alpha_1), \dots, (\beta_m, \alpha_m), (1, 1), \dots, (1, 1) \end{matrix} \middle| z \right] \\ &= A H_{m, 2m}^{1, m} \left[-z \middle| \begin{matrix} (1 - \gamma_1, 1), \dots, (1 - \gamma_m, 1) \\ [(0, 1), (1 - \beta_i, \alpha_i)]_1^m \end{matrix} \right], \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

където с A е означен следният израз $A = \left[\prod_{i=1}^m \Gamma(\gamma_i) \right]^{-1}$.

Те имат следните представяния чрез интеграл от типа на контурния интеграл на Мелин–Барнс, разширяващи интегралната формула (6.5.1):

$$E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(z) = \frac{A}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}'} \mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(s)(-z)^s ds = \frac{A}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(-s)(-z)^{-s} ds, \quad (6.6.4)$$

за $|\arg(-z)| < \pi$, където $\mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(s)$ е функцията

$$\mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(s) = \frac{\Gamma(-s) \prod_{i=1}^m \Gamma(\gamma_i + s)}{[\Gamma(1 + s)]^{m-1} \prod_{i=1}^m \Gamma(\beta_i + s\alpha_i)}, \quad (6.6.5)$$

и $\mathcal{L}$ е произволен контур в $\mathbb{C}$ разположен от $-i\infty$ до $+i\infty$ по такъв начин, че полюсите $s = -k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) на $\Gamma(s)$ да лежат отляво на $\mathcal{L}$, а полюсите $s = l + \gamma_i$ ($l \in \mathbb{N}_0$) на $\Gamma(\gamma_i - s)$ ($i = 1, \dots, m$) – от дясната му страна.

Доказателство. Първо започваме с доказването на (6.6.4). Съгласно Забележка 6.6.1, нито един от полюсите на функциите $\Gamma(s)$ и $\Gamma(\gamma_i - s)$ не лежи в ивицата S , дадена с (6.6.2). Освен това, полюсите $s = -k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) на $\Gamma(s)$ лежат от лявата страна на тази ивица, а полюсите $s = l + \gamma_i$ ($l \in \mathbb{N}_0$) на $\Gamma(\gamma_i - s)$ ($i = 1, \dots, m$) – от дясната ѝ страна.

Нека да разгледаме дясната страна на (6.6.4) и да означим за удобство

$$I(z) = \frac{A}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(-s)(-z)^{-s} ds. \quad (6.6.6)$$

Пресмятайки резидуумите на подинтегралната функция в (6.6.6) в простите полюси $s_k = -k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и вземайки под внимание асимптотичната формула (дадена например в [17], Том 1, 1.1.(8))

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!(s+k)} [1 + O(s+k)] \quad (s \rightarrow -k; k = 0, 1, 2, \dots),$$

ние получаваме

$$\begin{aligned}
 I(z) &= A \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=-k} \left\{ \mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(-s)(-z)^{-s} \right\} \\
 &= A \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=-k} \left\{ \frac{\Gamma(s) \prod_{i=1}^m \Gamma(\gamma_i - s)}{[\Gamma(1 - s)]^{m-1} \prod_{i=1}^m \Gamma(\beta_i - s\alpha_i)} (-z)^{-s} \right\} \\
 &= A \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k \prod_{i=1}^m \Gamma(\gamma_i + k)}{k! [\Gamma(1 + k)]^{m-1} \prod_{i=1}^m \Gamma(\beta_i + k\alpha_i)} (-z)^k \right\} \quad (6.6.7) \\
 &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(\gamma_i + k)}{\prod_{i=1}^m \Gamma(\beta_i + k\alpha_i)} \frac{z^k}{(k!)^m} = E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(z),
 \end{aligned}$$

което доказва (6.6.4).

По-нататък, като запишем (6.4.1) във вида

$$E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(z) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \gamma_1) \dots \Gamma(k + \gamma_m)}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m) (\Gamma(k + 1))^{m-1}} \frac{z^k}{k!}$$

и сравним с (6.5.4), ние получаваме (6.6.3), с което завършва доказателството на теоремата. $\square$

Представянето (6.6.3) на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер като H -функции на Фокс позволява да бъде описано тяхното асимптотично поведение когато $z \rightarrow 0$, а също така и когато $z \rightarrow \infty$. В случая на функциите на Митаг-Лефлер (5.1.2) (за стойност на $m = 1$), Джрбашян [16] установява валидността на различни асимптотични формули за $|z| \rightarrow \infty$, в различни части от комплексната равнина и при различни условия, наложени на α и β . Например, ако $1/\alpha = \rho > 1/2$ и вътре в ъглови области, (5.1.2) е $\approx \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho)$. В случая $m > 1$ асимптотична оценка е дадена с (6.4.4), а в по-детайлизирани ситуации, асимптотиката на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер може да бъде намерена от тяхната интерпретация като ${}_p\Psi_q$ -функции.

Трансформацията на Мелин от функцията $f(t)$ на реалната променлива $t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ е дефинирана чрез

$$(\mathcal{M}f)(s) = \mathcal{M}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt \quad (s \in S \subset \mathbb{C}), \quad (6.6.8)$$

където S е подходяща вертикална ивица (подробности могат да се видят в книгата на Тичмарш [123]), а обратната трансформация на Мелин е дадена за $t \in \mathbb{R}^+$ чрез формулата ($\gamma = \operatorname{Re}(s)$):

$$(\mathcal{M}^{-1}F)(t) = \mathcal{M}^{-1}[F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)t^{-s}ds, \quad 0 < t < \infty. \quad (6.6.9)$$

Следствие 6.6.1. [99] *Нека $\alpha_i > 0$, $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}(\gamma_i) > 0$ за $i = 1, \dots, m$. Тогава трансформацията на Мелин от $3m$ -индексната функция на Митаг-Лефлер се изразява както следва:*

$$\mathcal{M}[E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(-t)](s) = A \mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(-s) \quad (6.6.10)$$

с $t > 0$, $0 < \operatorname{Re}(s) < \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}$ и $\mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}$ са като определените в (6.6.1), респективно (6.6.5), а коефициентът $A = \left[\prod_{i=1}^m \Gamma(\gamma_i) \right]^{-1}$.

Доказателство. В частност, ако $\mathcal{L}$ е правата линия $\operatorname{Re}(s) = \gamma$, $0 < \gamma < \tilde{\gamma}$ и като вземем $-z = t \in (0, \infty)$, то зависимостта (6.6.4) довежда до

$$E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(-t) = \frac{A}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(-s)(t)^{-s}ds, \quad (6.6.11)$$

за $0 < t < \infty$. Зависимостта (6.6.11), получена по-горе, означава, че функцията $E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(-t)$ е резултат от обратната трансформация на Мелин от функцията $A \mathcal{H}_{m, 2m}^{1, m}(-s)$. Следователно правата трансформация на Мелин от тази функция се дава с (6.6.10), което трябваше да се докаже. $\square$

6.7 Специални случаи на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер

Нека да споменем някои интересни специални случаи на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер, съответно с $2m$ и $3m$ индекса.

Случай 1. Ако $m = 1$, то формулата (6.4.1) дава трипараметричната функция на Митаг-Лефлер, позната още като функцията на Прабхакар (5.3.1):

$$E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(z) = E_{(\alpha), (\beta)}^{(\gamma), 1}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, 1) \\ (\beta, \alpha) \end{matrix} \middle| z \right].$$

Ако допълнително $\gamma = 1$, се получава класическата функция на Митаг-Лефлер и нейните специални случаи:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = E_{(\alpha), (\beta)}^{(1), 1}(z) = {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\beta, \alpha) \end{matrix} \middle| z \right],$$

$$E_{\alpha}(z) = E_{(\alpha), (1)}^{(1), 1}(z) = {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1, \alpha) \end{matrix} \middle| z \right],$$

$$E_1(z) = \exp(z) = E_{(1), (1)}^{(1), 1}(z) = {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1, 1) \end{matrix} \middle| z \right].$$

Случай 2. Ако $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 1$, дефиницията (6.4.1) дава мултииндексните ($2m$ -параметрични) функции на Митаг-Лефлер (6.1.1), въведени от Якубович и Лучко [132], [59] и изучавани в редица статии на Кирякова. По-точно, поставяйки $1/\rho_i$ в (6.4.1) вместо α_i , получаваме :

$$\begin{aligned} E_{\left(\frac{1}{\rho_i}\right), (\beta_i)}(z) &= E_{\left(\frac{1}{\rho_i}\right), (\beta_i)}^{(1), m}(z) = E_{\left(\frac{1}{\rho_i}\right), (\beta_i)}^{(1, \dots, 1), m}(z) \\ &= {}_m\Psi_{2m-1} \left[\begin{matrix} (1, 1), \dots, (1, 1) \\ (\beta_i, \alpha_i)_1^m, (1, 1), \dots, (1, 1) \end{matrix} \middle| z \right] = {}_1\Psi_m \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\beta_i, \alpha_i)_1^m \end{matrix} \middle| z \right]. \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

Тогава, естествено, формулите, (6.4.2) и (6.4.3) се свеждат до (6.1.2), получена от Кирякова в [44].

Както е добре известно, последната функция е тясно свързана с *хипер-Беселовата функция*, дефинирана с формулите (4.1.4)–(4.1.6). По-точно, като отчетем формулата

$$j_{\nu_1, \dots, \nu_m}^{(m)}(z) = {}_0F_m \left((\nu_k + 1)_1^m; - \left(\frac{z}{m+1} \right)^{m+1} \right),$$

достигахме до извода, че е в сила зависимостта (детайлите са в [41, Апендикс (D. 3) и Гл. 3]):

$$\begin{aligned} J_{\nu_1, \dots, \nu_{m-1}}^{(m-1)}(z) &= \frac{\left(\frac{z}{m}\right)^{\nu_1 + \dots + \nu_{m-1}}}{\prod_{i=1}^{m-1} \Gamma(\nu_i + 1)} {}_0F_m \left((\nu_k + 1)_1^{m-1}; - \left(\frac{z}{m}\right)^m \right) \\ &= \left(\frac{z}{m}\right)^{\sum_{i=1}^{m-1} \nu_i} E_{(1, \dots, 1), (\nu_1+1, \dots, \nu_{m-1}+1, 1)}^m (-(z/m)^m) \\ &= \left(\frac{z}{m}\right)^{\sum_{i=1}^{m-1} \nu_i} E_{(1, \dots, 1), (\nu_1+1, \dots, \nu_{m-1}+1, 1)}^{(1, \dots, 1), m} (-(z/m)^m). \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

Случай 3. Нека отново $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 1$. Тогава специален случай са (за $m = 2$) обобщените функции на Райт с 2×2 индекса (за техните приложения като скалярно-инвариантни решения на частни диференциални уравнения от дробен ред може да се види например в Лучко и Горенфло [60]) и Джрбашяновата функция от Митаг-Лефлеров тип от [15], означена като $E_{(1/\rho_1, 1/\rho_2), (\mu_1, \mu_2)}$, т.е.

$$E_{(1/\rho_1, 1/\rho_2), (\mu_1, \mu_2)}(z) = E_{(1/\rho_1, 1/\rho_2), (\mu_1, \mu_2)}^{(1, 1), 2}(z) = {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\mu_i, 1/\rho_i)_1^2 \end{matrix} \middle| z \right]. \quad (6.7.3)$$

По-нататък, за $m \geq 2$ функцията (6.7.1), а също така и (6.4.1), е обобщената функция на Ломел–Райт с 4 индекса ($\mu > 0, q \in \mathbb{N}, \nu, \lambda \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} J_{\nu, \lambda}^{\mu, q}(z) &= (z/2)^{\nu+2\lambda} E_{(\mu, 1, \dots, 1), (\nu+\lambda+1, \lambda+1, \dots, \lambda+1)}^{(1, 1, \dots, 1), q+1} (-(z/2)^2) \\ &= (z/2)^{\nu+2\lambda} {}_1\Psi_{q+1} \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\lambda+1, 1)_1^q, (\lambda+\nu+1, \mu) \end{matrix} \middle| - (z/2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

Това е пример за мултииндексна функция на Митаг-Лефлер с произволно $m = q + 1$. Някои частни случаи на (6.7.4) са изброени по-долу.

Очевидно, за $q = 1$, специалната функция (6.7.4) се обръща в 3-индексното обобщение (4.1.2) на Беселовата функция $J_\nu(z)$:

$$\begin{aligned}
J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z) &= (z/2)^{\nu+2\lambda} E_{(\mu, 1), (\nu+\lambda+1, \lambda+1)}^{(1, 1), 2}(-(z/2)^2) \\
&= (z/2)^{\nu+2\lambda} {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (\lambda+1, 1), (\lambda+\nu+1, \mu) \end{matrix} \middle| - (z/2)^2 \right].
\end{aligned} \tag{6.7.5}$$

За частни избори на другите параметри λ и μ се получават резултати за по-специални случаи, както следва.

Нека $\lambda = 0$, тогава специалната функция (6.7.4) дава обобщението на функцията $C_{\nu}(z) = z^{-\nu/2} J_{\nu}(2\sqrt{z})$ на Бесел–Клифорд, въведено от Е. М. Райт с (4.1.1):

$$J_{\nu}^{\mu}(z) = E_{(\mu, 1), (\nu+1, 1)}^{(1, 1), 2}(-z) = {}_0\Psi_1 \left[\begin{matrix} - \\ (\nu+1, \mu) \end{matrix} \middle| -z \right]. \tag{6.7.6}$$

Ако допълнително $\mu = 1$, то от (6.7.6) стигаме до класическата функция на Бесел:

$$\begin{aligned}
J_{\nu}(z) &= J_{\nu}^{(1)}(z) = (z/2)^{\nu} E_{(1, 1), (\nu+1, 1)}^{(1, 1), 2}(-(z/2)^2) \\
&= (z/2)^{\nu} {}_0\Psi_1 \left[\begin{matrix} - \\ (\nu+1, 1) \end{matrix} \middle| - (z/2)^2 \right].
\end{aligned} \tag{6.7.7}$$

Глава 7

Дробно смятане в класа на мултииндексните функции

7.1 Интеграли и производни на Риман-Лиувил от дробен ред

Понятието “дробно смятане” (ДС) или “дробен анализ” се използва като разширение на “смятане” (“анализ”), когато редът на диференциране и интегриране може да бъде произволно число (дробно, ирационално, комплексно), т. е. не задължително цяло. Подробности за неговата теория и приложение могат да се намерят например в *енциклопедията на ДС* [116] и също в неотдавна публикуваните [127, 106], а стратегията и идеологията за по-нататъшното развитие може да се видят в [62, 63].

Най-популярната дефиниция за интегриране от ред

$$\lambda \in \mathbb{C} (Re(\lambda) > 0),$$

е за *дробния интеграл на Риман-Лиувил*

$$R^\lambda f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z (z-t)^{\lambda-1} f(t) dt = \frac{z^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} f(z\tau) d\tau. \quad (7.1.1)$$

Тогава *дробната производна на Риман-Лиувил* от ред

$$\lambda \in \mathbb{C} (Re(\lambda) > 0),$$

се дефинира като композиция на производна от цял ред и интеграл от дробен ред от вида (7.1.1), именно:

$$D^\lambda f(z) := D^n R^{n-\lambda} f(z), \quad (7.1.2)$$

където

$$n := [Re(\lambda)] + 1 > Re(\lambda), [Re(\lambda)] = \text{цялата част на } Re(\lambda).$$

В тази секция ние пресмятаме дробните интеграли (7.1.1) и производни (7.1.2) на Риман–Лиувил от мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.4.1). За тази цел ние се нуждаем най-напред от производните от цял ред. Диференцирането на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.4.1) е дадено със следното елементарно твърдение.

Теорема 7.1.1. [90, 99] *Нека $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \omega \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha_i) > 0$, $Re(\beta_{i_0}) > 0$, $i = 1, \dots, m$, $1 \leq i_0 \leq m$, $i_0 \in \mathbb{N}$, тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено следното твърждение:*

$$\begin{aligned} D^n [z^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] &= \left(\frac{d}{dz} \right)^n [z^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] \\ &= z^{\beta_{i_0}-n-1} E_{(\alpha_i), (\tilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}}), \quad |\arg z| < \pi, \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

със стойности на параметрите съответно

$$\tilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} - n \quad \text{и} \quad \tilde{\beta}_i = \beta_i, \quad \text{ако } i \neq i_0.$$

Доказателство. Използвайки (6.4.1) и извършвайки почленно диференциране под знака за сумиране (което е възможно поради равномерната сходимост на реда (6.4.1) в компактните подмножества на комплексната равнина $\mathbb{C}$ и диференцируемостта на степенната функция за $|\arg z| < \pi$), имаме

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dz} \right)^n [z^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_k \dots (\gamma_m)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \frac{\omega^k \left(\frac{d}{dz} \right)^n [z^{\alpha_{i_0} k + \beta_{i_0} - 1}]}{(k!)^m}, \end{aligned}$$

откъдето, като се вземе под внимание релацията

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n [z^{\alpha_{i_0}k+\beta_{i_0}-1}] = \frac{\Gamma(\alpha_{i_0}k+\beta_{i_0})}{\Gamma(\alpha_{i_0}k+\beta_{i_0}-n)} z^{\alpha_{i_0}k+\beta_{i_0}-n-1},$$

верността на твърдението (7.1.3) незабавно следва. $\square$

Забележка 7.1.1. *Допълнително, ако $\alpha_{i_0}, \beta_{i_0} \in \mathbb{N}$, то (7.1.3) е коректно не само за $|\arg z| < \pi$ но и за всички комплексни стойности на z , евентуално с изключение на нулата. Всичко това се отнася и за останалите резултати в тази глава.*

Забележка 7.1.2. *В частност, като резултат от (7.1.3), ние получаваме следните твърдения, свързани с $\mathfrak{I}$ -параметричните и мултииндексните (с 2т параметра) функции на Митаг-Лефлер:*

$$D^n[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega z^\alpha)] = z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}^\gamma(\omega z^\alpha),$$

$$D^n[z^{\beta_{i_0}-1}E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^m(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}-n-1}E_{(\alpha_i),(\tilde{\beta}_i)}^m(\omega z^{\alpha_{i_0}}),$$

с с стойности $\tilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} - n$ и $\tilde{\beta}_i = \beta_i$, ако $i \neq i_0$. Тези резултати следват, като се вземат предвид (5.3.1) и (6.1.1), за $m = 1$, съответно $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 1$. Споменатите релации са добре познати и могат да се намерят например в [39] и [44].

Следствие 7.1.1. [99] *Нека $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta_{i_0}) > 0$, $i = 1, \dots, m$, $1 \leq i_0 \leq m$, $i_0 \in \mathbb{N}$, тогава*

$$\int_0^z t^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega t^{\alpha_{i_0}}) dt = z^{\beta_{i_0}} E_{(\alpha_i),(\tilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}}), \quad |\arg z| < \pi, \quad (7.1.4)$$

с $\tilde{\beta}_i = \beta_i$, ако $i \neq i_0$, и $\tilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} + 1$.

Доказателство. Вземайки $n = 1$ и β_{i_0} вместо $\beta_{i_0} - 1$, зависимостта (7.1.3) води до равенството

$$D[z^{\beta_{i_0}} E_{(\alpha_i),(\tilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}}).$$

Последната формула показва, че функцията $z^{\beta_{i_0}} E_{(\alpha_i),(\tilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})$ е примитивна функция на $z^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})$, което потвърждава верността на (7.1.4). $\square$

Теорема 7.1.2. [90, 99] *Нека $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \omega, \lambda, z \in \mathbb{C}$, и $Re(\alpha_i), Re(\beta_{i_0}), Re(\lambda) > 0$, за $i = 1, \dots, m, 1 \leq i_0 \leq m, i_0 \in \mathbb{N}$. Тогава е в сила следното твърждение:*

$$R^\lambda[z^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}+\lambda-1} E_{(\alpha_i), (\tilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}}) \quad (|\arg z| < \pi), \quad (7.1.5)$$

с $\tilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} + \lambda$ и $\tilde{\beta}_i = \beta_i$, ако $i \neq i_0$.

Доказателство. Означавайки $f(t) = t^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega t^{\alpha_{i_0}})$ ние получаваме

$$\begin{aligned} f(z\tau) &= z^{\beta_{i_0}-1} \tau^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}} \tau^{\alpha_{i_0}}) \\ &= z^{\beta_{i_0}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_k \dots (\gamma_m)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \frac{(\omega z^{\alpha_{i_0}})^k}{(k!)^m} \tau^{\alpha_{i_0} k + \beta_{i_0} - 1}. \end{aligned}$$

Сега, използвайки втората част от формулата (7.1.1), вземайки предвид зависимостта

$$\int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{\alpha_{i_0} k + \beta_{i_0} - 1} d\tau = B(\lambda, \alpha_{i_0} k + \beta_{i_0}) = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\alpha_{i_0} k + \beta_{i_0})}{\Gamma(\alpha_{i_0} k + \beta_{i_0} + \lambda)},$$

и отчитайки, че смяната на реда на интегриране и сумиране е възможно поради равномерната сходимост на интегрирания ред в компактните подмножества на комплексната равнина $\mathbb{C}$ и диференцируемостта и интегрируемостта на степенната функция за $|\arg z| < \pi$), ние завършваме доказателството на теоремата. $\square$

Теорема 7.1.3. [90, 99] *Нека $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \omega, \lambda, z \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha_i), Re(\beta_{i_0}), Re(\lambda) > 0$, за $i = 1, \dots, m, 1 \leq i_0 \leq m, i_0 \in \mathbb{N}$, тогава е в сила следното твърждение*

$$D^\lambda[z^{\beta_{i_0}-1} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}-\lambda-1} E_{(\alpha_i), (\tilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z^{\alpha_{i_0}}) \quad (|\arg z| < \pi), \quad (7.1.6)$$

с $\tilde{\beta}_i = \beta_i$, ако $i \neq i_0$, и $\tilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} - \lambda$.

Доказателство. Използвайки (7.1.2) и (7.1.3), ние прилагаме последователно $R^{n-\lambda}$ и след това D^n , вследствие на което получаваме следните резултати:

$$R^{n-\lambda}[z^{\beta_{i_0}-1}E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}+n-\lambda-1}E_{(\alpha_i),(\beta'_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}}),$$

$$D^n[z^{\beta_{i_0}+n-\lambda-1}E_{(\alpha_i),(\beta'_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}-\lambda-1}E_{(\alpha_i),(\tilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z^{\alpha_{i_0}}),$$

с параметри

$$\tilde{\beta}_i = \beta'_i = \beta_i, \quad \text{ако } i \neq i_0,$$

и съответно

$$\beta'_{i_0} = \beta_{i_0} + n - \lambda, \quad \tilde{\beta}_{i_0} = \beta'_{i_0} - n = \beta_{i_0} - \lambda,$$

което потвърждава коректността на зависимостта (7.1.6). $\square$

7.2 Интеграли и производни на Ердей–Кобер от дробен ред

Наред с класическите дефиниции на Риман–Лиувил за оператори от дробен ред, в литературата се използват много други модификации и техни обобщения. Изглежда, че най-полезните оператори на класическото ДС са тези на Ердей–Кобер (за подробности може да се види например в Кирякова [41]). Изключителен интерес в това отношение представлява и наскоро публикуваната статия [50].

Дробният интегрален оператор на Ердей–Кобер е дефиниран по следния начин:

$$\begin{aligned} I_{\mu}^{\beta,\lambda} f(z) &= \left[z^{-(\beta+\lambda)} R^{\lambda} z^{\beta} f(z^{1/\mu}) \right]_{z \rightarrow z^{\mu}} \\ &= \frac{z^{-\mu(\beta+\lambda)}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z (z^{\mu} - t^{\mu})^{\lambda-1} t^{\beta\mu} f(t) d(t^{\mu}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\lambda-1} \tau^{\beta} f(z\tau^{1/\mu}) d\tau, \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

а съответният диференциален оператор на Ердей–Кобер може да бъде записан символично както следва:

$$D_{\mu}^{\beta,\lambda} f(z) = \left[z^{-\beta} D^{\lambda} z^{\beta+\lambda} f(z^{1/\mu}) \right]_{z \rightarrow z^{\mu}}, \tag{7.2.2}$$

където $\lambda, \mu > 0$ и β са реални параметри ($D_\mu^{\beta,0}f(z) = I_\mu^{\beta,0}f(z) = f(z)$ по подразбиране) и $D_\mu^{\beta,\lambda}I_\mu^{\beta,\lambda} = Id$. Случаите $\mu = 2$ са въведени от Снедон, докато тези, първоначално разглеждани от Кобер и Ердей имат $\mu = 1$. Операторите на Ердей–Кобер (7.2.1) и (7.2.2) имат многобройни приложения, подчертани още от Снедон, и са широко използвани в ДС и диференциалните уравнения от дробен ред, за да моделират различни видове от физични, икономически, и други процеси. Така например Пагнини [88], разглежда така наречената дробна дифузия на Ердей–Кобер и фамилия от дифузионни процеси, управлявани от ggVm (обобщено сиво Брауново движение).

По същество в тази секция е използван операторът (7.2.1), като първо са пресметнати дробните интеграли на Ердей–Кобер от функциите (5.3.1), а след това и на и (6.4.1).

Теорема 7.2.1. [93, 99] *Нека $i = 1, 2, \dots, m$, i_0 е фиксирано естествено число, $1 \leq i_0 \leq m$, $z, \omega \in \mathbb{C}$, $|\arg z| < \pi$, $\omega \neq 0$, и $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_{i_0}, \lambda > 0$. Тогава*

$$I_{1/\alpha}^{\beta-1,\lambda} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega z) = E_{\alpha,\beta+\lambda}^\gamma(\omega z), \quad (7.2.3)$$

$$I_{1/\alpha_{i_0}}^{\beta_{i_0}-1,\lambda} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) = E_{(\alpha_i),(\tilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) \quad (7.2.4)$$

със стойности

$$\tilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} + \lambda; \quad \tilde{\beta}_i = \beta_i, \quad i \neq i_0.$$

Доказателство. За да докажем (7.2.3), първо въвеждаме означението $f(z) = E_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega z)$, и интегрираме почленно с интеграла (7.2.1), което е допустимо аналогично на предходната Секция 7.1, при което се получава следният резултат

$$\begin{aligned} I_{1/\alpha}^{\beta-1,\lambda} f(z) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{\beta-1} f(z\tau^\alpha) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{(\omega z)^k \tau^{\alpha k}}{k!} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{(\omega z)^k}{k!} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{\alpha k + \beta - 1} d\tau \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta + \lambda)} \frac{(\omega z)^k}{k!} = E_{\alpha, \beta + \lambda}^{\gamma}(\omega z),$$

което доказва (7.2.3). Аналогично, вземайки $f(z) = E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z)$ и прилагайки (7.2.1) с $\mu = 1/\alpha_{i_0}$, $\beta = \beta_{i_0} - 1$, ние получаваме (7.2.4). $\square$

7.3 Обобщени интегрални и производни на Ердей–Кобер от дробен ред

Нека сега накратко да припомним дефиницията на операторите от така нареченото Обобщено дробно смятане (ОДС) на Кирякова [41], [44].

Дефиниция 7.3.1. Нека $m \geq 1$ е цяло число и

$$\lambda_i \geq 0, \mu_i > 0, \beta_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \dots, m).$$

Да разгледаме вектора $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ като мултигелло и съответно $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ като мултиред на дробно интегриране. Интегралните оператори, дефинирани по-долу:

$$I_{(\mu_i), m}^{(\beta_i), (\lambda_i)} f(z) = \begin{cases} \int_0^1 H_{m, m}^{m, 0} \left[\tau \left| \begin{smallmatrix} (\beta_i + \lambda_i + 1 - 1/\mu_i, 1/\mu_i)_1^m \\ (\beta_i + 1 - 1/\mu_i, 1/\mu_i)_1^m \end{smallmatrix} \right. \right] f(z\tau) d\tau, & \text{ако } \sum_{i=1}^m \lambda_i > 0, \\ f(z), & \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0, \end{cases} \quad (7.3.1)$$

се наричат многократни (m -кратни) интегрални оператори на Ердей–Кобер за дробно смятане. По-общо, операторите от вида

$$I f(z) = z^{\lambda_0} I_{(\mu_i), m}^{(\beta_i), (\lambda_i)} f(z) \quad \text{с } \lambda_0 \geq 0 \quad (7.3.2)$$

накратко се наричат обобщени (m -кратни) дробни интегрални.

За $m = 1$ операторите (7.3.1) се превръщат в класическите интегрални на Ердей–Кобер (7.2.1), за $m = 2$ те са хипергеометричните дробни интегрални, за произволно $m > 1$ се получават хипер-Беселовите интегрални оператори като частни случаи [41]. Теорията на ОДС, базирана на операторите (7.3.1) е развита напълно в монографията на Кирякова [41]. Тук ние само накратко припомним някои от основните факти.

Нека σ е произволно реално число. Означаваме с $\mathcal{H}(\Omega)$ пространството от холоморфни функции в комплексната област Ω , звездообразна относно началото $z = 0$, и разглеждаме пространствата

$$\mathcal{H}_\sigma(\Omega) = \{f(z) = z^p \tilde{f}(z); p \geq \sigma, \tilde{f}(z) \in \mathcal{H}(\Omega)\}, \quad \mathcal{H}_0(\Omega) := \mathcal{H}(\Omega).$$

За $\beta_i > -1 - \sigma/\mu_i$ and $\lambda_i > 0$, операторите (7.3.1) изобразяват пространството $\mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ в самото него (Кирякова, [41]).

Основното свойство на обобщените многократни (m -кратни) дробни интеграли е, че единичните интеграли (7.3.1), които съдържат H -функция, могат да се представят еквивалентно като комутативни композиции на единични интеграли на Ердей–Кобер от вида (7.2.1), а именно за $f \in \mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ с $\beta_i > -1 - \sigma/\mu_i$, $\lambda_i > 0$ и $i = 1, 2, \dots, m$, както следва:

$$\begin{aligned} I_{(\mu_i),m}^{(\beta_i),(\lambda_i)} f(z) &= \prod_{i=1}^m I_{\mu_i}^{\beta_i, \lambda_i} f(z) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\prod_{i=1}^m \frac{(1 - \tau_i)^{\lambda_i - 1} \tau_i^{\beta_i}}{\Gamma(\lambda_i)} \right] f(z \tau_1^{1/\mu_1} \dots \tau_m^{1/\mu_m}) d\tau_1 \dots d\tau_m. \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Ако стойностите на някои λ_i са нули, например $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, $1 \leq k \leq m$, то съответните им оператори $I_{\mu_i}^{\beta_i, \lambda_i} = I$ са оператори-идентитети и кратността на (7.3.1) се свежда от m до $m - k$ (както и при H -функциите, които са ядро на интеграла). Декомпозиционната зависимост (7.3.3) е ключ към разнообразни приложения на (7.3.1) и (7.3.2), произтичаща от простичките, но доста ефективни свойства на G - и H -функциите и мощния апарат на прилагането им.

Обобщените дробни производни, съответни на (7.3.1), са дефинирани в [41] с диференциално-интегрални изрази, по аналогия с идеята за (7.1.2).

Сега по аналогия с Теорема 7.2.1 е доказана релация, съдържаща обобщения дробен интеграл (7.3.1).

Теорема 7.3.1. [93, 99] *Нека $z, \omega \in \mathbb{C}$, $|\arg z| < \pi$, $\omega \neq 0$, и $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i > 0$ за $1 \leq i \leq m$. Тогава*

$$I_{(1/\alpha_i),m}^{(\beta_i-1),(\lambda_i)} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) = E_{(\alpha_i),(\beta_i+\lambda_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z).$$

Доказателство. Като се вземат предвид долунаписаните зависимости, базирани на (7.2.1) и (7.2.4):

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{(1 - \tau_1)^{\lambda_1-1} \tau_1^{\beta_1-1}}{\Gamma(\lambda_1)} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z \tau_1^{\alpha_1} \dots \tau_m^{\alpha_m}) d\tau_1 \\
&= I_{1/\alpha_1}^{\beta_1-1, \lambda_1} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_m^{\alpha_m}) = E_{(\alpha_i),(\beta_1+\lambda_1, \beta_2, \dots, \beta_m)}^{(\gamma_i),m}(\omega z \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_m^{\alpha_m}), \\
&\quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
& \int_0^1 \frac{(1 - \tau_m)^{\lambda_m-1} \tau_m^{\beta_m-1}}{\Gamma(\lambda_m)} E_{(\alpha_i),(\beta_1+\lambda_1, \dots, \beta_{m-1}+\lambda_{m-1}, \beta_m)}^{(\gamma_i),m}(\omega z \tau_m^{\alpha_m}) d\tau_m \\
&= I_{1/\alpha_m}^{\beta_m-1, \lambda_m} E_{(\alpha_i),(\beta_1+\lambda_1, \dots, \beta_{m-1}+\lambda_{m-1}, \beta_m)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) = E_{(\alpha_i),(\beta_i+\lambda_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z),
\end{aligned}$$

последователните повторни (m пъти) интегрирания в (7.3.3) водят до тъждеството

$$\begin{aligned}
& I_{(1/\alpha_i),m}^{(\beta_i-1),(\lambda_i)} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) = E_{(\alpha_i),(\beta_i+\lambda_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) \\
&= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\prod_{i=1}^m \frac{(1 - \tau_i)^{\lambda_i-1} \tau_i^{\beta_i-1}}{\Gamma(\lambda_i)} \right] E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z \tau_1^{\alpha_1} \dots \tau_m^{\alpha_m}) d\tau_1 \dots d\tau_m,
\end{aligned}$$

което доказва теоремата. □

7.4 Производни от n -ти ред за $2m$ -параметричните функции

Дотук в тази глава се занимавахме с намиране на различни производни и интегрални от произволен ред от представители на $3m$ -параметрични функции, при които полученият резултат е функция от същия вид. Понататъшните ни усилия са насочени към намиране на зависимости между представители на двата класа от функции.

В неотдавнашната публикация [84] е доказана проста зависимост която свързва n -та производна на двупараметричните функции на Митаг-Лефлер

и трипараметричните им обобщения (направени от Прабхакар), а нейна вариация се появява още в [7], именно:

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z) = n! E_{\alpha,\beta+n\alpha}^{n+1}(z). \quad (7.4.1)$$

Тази зависимост провокира интерес към въпроса за съществуването на подобна връзка между мултииндексните аналози на тези функции и възбужда желание за намирането ѝ, ако тя съществува.

Преди да преминем нататък, да въведем следното общоприето означение за оператора за n -кратно диференциране

$$D^n = \frac{d^n}{dz^n} = \left(\frac{d}{dz} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

като отбележим, че ако $n = 0$, по подразбиране се приема, че $D^n f(z) = f(z)$, т. е. $D^0 f(z) = f(z)$.

В следващата теорема е получена зависимост между функцията $E_{(\alpha_i),(\beta_i+n\alpha_i)}^{(\gamma_i),m}$ (при посочени стойности на параметрите γ_i) и n -та производна на $E_{(\alpha_i),(\beta_i)}$. Оказва се, че в този случай е вярна формула, аналогична на (7.4.1), т.е. производните от цял ред на $2m$ -параметричните функции на Митаг-Лефлер се изразяват чрез $3m$ -параметричните, също с точност до константа. По-конкретно, в сила е следната теорема.

Теорема 7.4.1. *Нека $\alpha_i, \beta_i, z \in \mathbb{C}$ и нека $\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$ за $i = 1, \dots, m$. Тогава е в сила следното равенство:*

$$D^n [E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z)] = \frac{d^n}{dz^n} [E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z)] = \Gamma(n+1) E_{(\alpha_i),(\beta_i+n\alpha_i)}^{(\gamma_i),m}(z), \quad (7.4.2)$$

за всички стойности на $n \in \mathbb{N}_0$, с параметри $\gamma_1 = n+1, \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 1$.

Доказателство. Започваме доказателството със случая $n \in \mathbb{N}$. Като вземем под внимание, че

$$D^n (z^k) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} z^{k-n},$$

и формулите (6.1.1), (6.4.1), дефиниращи съответно $2m$ - и $3m$ -индексните функции на Митаг-Лефлер, получаваме последователно

$$D^n [E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z)] = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} \frac{z^{k-n}}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_1 k + \alpha_1 n + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \alpha_m n + \beta_m)}.$$

Доказателството завършва отчитайки, че

$$\Gamma(k+n+1) = (n+1)_k \Gamma(n+1),$$

откъдето следва равенството

$$\frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)} = \Gamma(n+1) \frac{(n+1)_k (1)_k \dots (1)_k}{(k!)^m}.$$

Вземайки $\gamma_1 = n+1$, $\gamma_2 = \dots = \gamma_m = 1$, верността на (7.4.2) следва незабавно. Да отбележим, че направената смяна на реда на диференциране и сумиране е законна, защото функциите (6.1.1) се представят със степенен ред, сходящ в цялата комплексна равнина и равномерно и абсолютно сходящ в компактните ѝ подмножества.

В случай, че $n = 0$, получаваме съответно, че

$$D^0 [E_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z)] = E_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z) = E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(1), m}(z) = \Gamma(n+1) E_{(\alpha_i), (\beta_i + n\alpha_i)}^{(\gamma_i), m}(z),$$

с $\gamma_1 = n+1 = 1$, $\gamma_2 = \dots = \gamma_m = 1$, което показва, че (7.4.2) е изпълнено и в този случай. $\square$

7.5 Производни и интеграли на Риман-Лиувил от дробен ред за $2m$ -параметричните функции

В тази секция са разгледани интегралите (7.1.1) и производните (7.1.2) на Риман-Лиувил от дробен ред и са пресметнати такива за мултииндексните функции (6.1.1), умножени с подходяща степенна функция. В резултат се получава функция от вида (6.4.1), с точност до константа. За целта нека да вземем $\tilde{\lambda}$, $z \in \mathbb{C}$ и $|\arg z| < \pi$ и да въведем означението

$$\tilde{E}_{\alpha, \beta}(z) = z^{\tilde{\lambda}} E_{\alpha, \beta}(z), \quad \tilde{E}_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z) = z^{\tilde{\lambda}} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z) = z^{\tilde{\lambda}} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^m(z) \quad (7.5.1)$$

за функциите, чиито дробни производни и интеграли са намерени по-нататък в тази секция.

Започвайки с най-простия случай $m = 1$, можем да формулираме следното елементарно твърдение.

Теорема 7.5.1. Нека $\alpha, \beta, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $0 < \operatorname{Re}(\tilde{\lambda}) < 1$, $n \in \mathbb{N}$, и нека $\lambda = n - 1 + \tilde{\lambda}$. Тогава

$$D^\lambda[\tilde{E}_{\alpha,\beta}(z)] = \Gamma(\lambda + 1)E_{\alpha,\beta+(n-1)\alpha}^{\lambda+1}(z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi). \quad (7.5.2)$$

Доказателство. Прилагайки добре известната формула

$$D^\lambda(z^p) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\lambda+1)} z^{p-\lambda}, \quad (7.5.3)$$

за $z^{k+\tilde{\lambda}}$ получаваме

$$D^\lambda(z^{k+\tilde{\lambda}}) = \frac{\Gamma(k+\tilde{\lambda}+1)}{\Gamma(k+\tilde{\lambda}-\lambda+1)} z^{k+\tilde{\lambda}-\lambda} = \frac{\Gamma(k+\tilde{\lambda}+1)}{\Gamma(k-n+2)} z^{k+1-n}.$$

Тогава почленното диференциране в равенството (допустимо, както в доказателствата на предходните твърдения в тази глава)

$$\tilde{E}_{\alpha,\beta}(z) = z^{\tilde{\lambda}}E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+\tilde{\lambda}}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

води последователно до следната верига от преобразования

$$\begin{aligned} D^\lambda[\tilde{E}_{\alpha,\beta}(z)] &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\tilde{\lambda}+1)}{\Gamma(k-n+2)} \frac{z^{k+1-n}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\tilde{\lambda}+n)}{\Gamma(k+1)} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + (n-1)\alpha + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\lambda}+n)_k \Gamma(\tilde{\lambda}+n)}{\Gamma(\alpha k + (n-1)\alpha + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \end{aligned}$$

което доказва теоремата, тъй като

$$\tilde{\lambda} + n = \tilde{\lambda} + n + 1 - 1 = \lambda + 1. \quad \square$$

Следствие 7.5.1. Ако $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ и $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1$, то е в сила твърдението

$$D^\lambda[z^\lambda E_{\alpha,\beta}(z)] = \Gamma(\lambda + 1)E_{\alpha,\beta}^{\lambda+1}(z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi). \quad (7.5.4)$$

Доказателство. В частност ако в параметъра λ от Теорема 7.5.1 се вземе $n = 1$, то се получава, че $\lambda = \tilde{\lambda}$, което автоматично свежда формулата (7.5.2) до исканата зависимост (7.5.4). $\square$

Теорема 7.5.2. Нека $\alpha_i, \beta_i, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$ за $i = 1, \dots, m$. Нека освен това $0 < \operatorname{Re}(\tilde{\lambda}) < 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lambda = n - 1 + \tilde{\lambda}$. Тогава е в сила

$$D^\lambda[\tilde{E}_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z)] = \Gamma(\lambda + 1) E_{(\alpha_i), (\beta_i + (n-1)\alpha_i)}^{(\gamma_i), m}(z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi), \quad (7.5.5)$$

с параметри $\gamma_1 = \lambda + 1, \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 1$.

Доказателство. Поради (7.5.1)

$$\tilde{E}_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z) = z^{\tilde{\lambda}} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+\tilde{\lambda}}}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)},$$

и тогава, аналогично на доказателствата на предните резултати, съгласно (7.5.3), следва последователно, че

$$\begin{aligned} D^\lambda[\tilde{E}_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z)] &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \tilde{\lambda} + 1)}{\Gamma(k - n + 2)} \frac{z^{k+1-n}}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \tilde{\lambda} + n)}{\Gamma(k + 1)} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha_1 k + \tilde{\beta}_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \tilde{\beta}_m)} \\ &= \Gamma(\lambda + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda + 1)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \tilde{\beta}_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \tilde{\beta}_m)} \frac{z^k}{k!}, \end{aligned}$$

където $\tilde{\beta}_i = (n - 1)\alpha_i + \beta_i$ за $i = 1, \dots, m$. $\square$

Следствие 7.5.2. Ако $\alpha_i, \beta_i, \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$ за $i = 1, \dots, m$, и $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1$, то е изпълнено равенството

$$D^\lambda[z^\lambda E_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z)] = \Gamma(\lambda + 1) E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i)}(z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi), \quad (7.5.6)$$

с параметри $\gamma_1 = \lambda + 1, \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 1$.

Доказателство. Аналогично на доказателството на Следствие 7.5.1, верността на (7.5.6) следва автоматично от (7.5.5) при $n = 1$. $\square$

Теорема 7.5.3. Нека $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$, и нека $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ и $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1$.
Тогава

$$R^\lambda[z^{-\lambda}E_{\alpha,\beta}(\omega z)] = \Gamma(1-\lambda) E_{\alpha,\beta}^{1-\lambda}(\omega z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi). \quad (7.5.7)$$

Доказателство. Означавайки $f(z) = z^{-\lambda}E_{\alpha,\beta}(\omega z)$, получаваме

$$f(z\tau) = z^{-\lambda}\tau^{-\lambda}E_{\alpha,\beta}(\omega z\tau) = z^{-\lambda}\tau^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega z\tau)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

откъдето, използвайки, втората част от формулата (7.1.1), и интегрирайки почленно, аналогично на предходните доказателства стигаме последователно до следния резултат:

$$\begin{aligned} R^\lambda f(z) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega z\tau)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega z)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{k-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} d\tau. \end{aligned}$$

Сега вземайки под внимание, че

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{k-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} d\tau &= \frac{B(\lambda, k-\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} \\ &= \frac{\Gamma(k-\lambda+1)}{\Gamma(k+1)} = \frac{(1-\lambda)_k \Gamma(1-\lambda)}{k!}, \end{aligned}$$

завършваме доказателството на теоремата. □

Теорема 7.5.4. Нека $\alpha_i, \beta_i, \lambda \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$ за $i = 1, \dots, m$.
Нека освен това $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1$. Тогава

$$R^\lambda[z^{-\lambda}E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z)] = \Gamma(1-\lambda) E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i)}(\omega z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi), \quad (7.5.8)$$

с параметри $\gamma_1 = 1-\lambda, \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 1$.

Доказателство. Означавайки $f(z) = z^{-\lambda} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}(\omega z)$, по аналогия с доказателството на Теорема 7.5.3 получаваме

$$\begin{aligned} R^\lambda f(z) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega z \tau)^k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega z)^k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{k-\lambda}}{\Gamma(\lambda)} d\tau, \end{aligned}$$

след което доказателството на теоремата продължава по същия начин, както това на Теорема 7.5.3. $\square$

7.6 Обобщени производни и интегрални на Ердей–Кобер от дробен ред за $2m$ -параметричните функции

В тази секция ние разглеждаме интеграла от дробен ред $I_\mu^{\beta, \lambda}$ на Ердей–Кобер, дефиниран с (7.2.1), в комплексната равнина и го изучаваме за стойности на параметрите

$$\mu = 1, \quad \lambda > 0, \quad \beta = -\lambda,$$

като го прилагаме за двупараметричните функции $E_{\alpha, \beta}$ на Митаг-Лефлер (5.1.2) и $2m$ -параметричните мултииндексни функции (6.1.1). В резултат се получават съответно трипараметричните функции на Митаг-Лефлер и $3m$ -параметричните мултииндексни функции (6.4.1).

Лема 7.6.1. Нека $i = 1, 2, \dots, m$ и нека $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \omega, z \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$. Нека освен това $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$ и $0 < \lambda < 1$. Тогава

$$I_1^{-\lambda, \lambda} E_{\alpha, \beta}(\omega z) = \Gamma(1 - \lambda) E_{\alpha, \beta}^{1-\lambda}(\omega z), \quad (7.6.1)$$

$$I_1^{-\lambda, \lambda} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}(\omega z) = \Gamma(1 - \lambda) E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z), \quad (7.6.2)$$

с параметри

$$\gamma_1 = 1 - \lambda; \quad \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 1.$$

Доказателство. Преди да преминем към доказателството на (7.6.1), означаваме $f(z) = E_{\alpha,\beta}(\omega z)$, след което извършваме почленно интегриране в (7.2.1), чиято допустимост се гарантира както по-горе, тъй като интегрираният ред е равномерно сходящ върху компактните подмножества на комплексната равнина. Това дава последователно

$$\begin{aligned}
 I_1^{-\lambda,\lambda} f(z) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{-\lambda} f(\omega z \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega z)^k \tau^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} d\tau \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega z)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{k-\lambda} d\tau \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\lambda+1)}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{(\omega z)^k}{k!} = \Gamma(1-\lambda) E_{\alpha,\beta}^{1-\lambda}(\omega z),
 \end{aligned}$$

тъй като $\Gamma(k-\lambda+1) = (1-\lambda)_k \Gamma(1-\lambda)$. (Това доказва (7.6.1)). Аналогично, означавайки $f(z) = E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z)$ и прилагайки (7.2.1) с параметри $\mu = 1$ и $\beta = -\lambda$, получаваме (7.6.2). $\square$

Забележка 7.6.1. В интерес на истината, трябва да отбележим, че получените дотук в тази секция резултати съвпадат с тези от Секция 7.5, свързани с Риман–Лиувилевия интеграл, защото разглеждания интеграл на Ердей–Кобер е с параметри

$$\mu = 1 \quad \text{и} \quad \beta + \lambda = 0$$

и поради това формулата (7.2.1), която дефинира интеграла на Ердей–Кобер, се свежда до следния вид

$$I_1^{(-\lambda),(\lambda)} f(z) = R^{-\lambda} (z^{-\lambda} f(z))$$

за стойности на параметъра $\lambda > 0$.

Забележка 7.6.2. Да отбележим, че в частност, ако $\mu_i = \mu$, за $i = 1, \dots, m$, то изразът (7.3.1) се означава просто с $I_{\mu, m}^{(\beta_i), (\lambda_i)} f(z)$ вместо с $I_{(\mu), m}^{(\beta_i), (\lambda_i)} f(z)$, а самите формули (7.3.1) и (7.3.2) се редуцират до

$$I_{\mu, m}^{(\beta_i), (\lambda_i)} f(z) = \begin{cases} \int_0^1 G_{m, m}^{m, 0} \left[\tau \left| \begin{smallmatrix} (\beta_i + \lambda_i)_1^m \\ (\lambda_i)_1^m \end{smallmatrix} \right. \right] f(z \tau^{\frac{1}{\mu}}) d\tau, & \sum_{i=1}^m \lambda_i > 0, \\ f(z), & \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0, \end{cases} \quad (7.6.3)$$

и съответно

$$I f(z) = z^{\lambda_0} I_{\mu, m}^{(\beta_i), (\lambda_i)} f(z) \quad \text{с} \quad \lambda_0 \geq 0. \quad (7.6.4)$$

Аналогично на (7.3.1), еднократните интегралы в (7.6.3), съдържащи G -функцията могат да се представят в еквивалентна форма като комутативни композиции на еднократни интегралы на Ердей–Кобер от вида (7.2.1), а именно за $f \in \mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ с $\beta_i > -1 - \sigma/\mu$, $\lambda_i > 0$ и $i = 1, 2, \dots, m$:

$$\begin{aligned} I_{\mu, m}^{(\beta_i), (\lambda_i)} f(z) &= \prod_{i=1}^m I_{\mu}^{\beta_i, \lambda_i} f(z) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\prod_{i=1}^m \frac{(1 - \tau_i)^{\lambda_i - 1} \tau_i^{\beta_i}}{\Gamma(\lambda_i)} \right] f \left((z \tau_1 \dots \tau_m)^{1/\mu} \right) d\tau_1 \dots d\tau_m. \end{aligned} \quad (7.6.5)$$

Ако някои от λ_i са нули, например $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, $1 \leq k \leq m$, то съответните множители $I_{\mu}^{\beta_i, \lambda_i} = I$ са оператори-идентитети и тогава кратността на (7.6.3) се редуцира от m до $m - k$, както и реда на G -функцията (която е ядрото). Декомпозиционната зависимост (7.6.5) е ключ към различни приложения на (7.6.3) и (7.6.4), произтичащи от простичките, но доста ефективни свойства на G -функциите. Обобщените дробни производни, съответстващи на (7.6.3), са дефинирани в [41] с диференциално-интегрални изрази, по аналогия с идеята за (7.1.2) и (7.2.2).

Сега, по аналогия с Лема 7.2.1 е доказана зависимост, съдържаща обобщения дробен интеграл (7.6.3), която свързва $3m$ -параметричните функции на Митаг-Лефлер с интеграла (7.6.3) от $2m$ -параметричните функции на Митаг-Лефлер, дадена във формулираната по-долу теорема.

Теорема 7.6.1. Нека $\alpha_i, \beta_i, \omega, z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha_i) > 0$, $0 < \lambda_i < 1$ ($1 \leq i \leq m$) и $\omega \neq 0$. Тогава е в сила твърдението

$$I_{1, m}^{(-\lambda_i), (\lambda_i)} E_{(\alpha_i), (\beta_i)}(\omega z) = \Gamma(1 - \lambda_1) \dots \Gamma(1 - \lambda_m) E_{(\alpha_i), (\beta_i)}^{(1 - \lambda_i), m}(\omega z). \quad (7.6.6)$$

Доказателство. Имайки предвид следните релации, основаващи се на дефиницията за дробен интеграл на Ердей–Кобер (7.2.1) и формулата (7.6.2), получаваме последователно:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{(1-\tau_1)^{\lambda_1-1} \tau_1^{-\lambda_1}}{\Gamma(\lambda_1)} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z \tau_1 \dots \tau_m) d\tau_1 \\ &= I_1^{-\lambda_1, \lambda_1} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z \tau_2 \dots \tau_m) = \Gamma(1-\lambda_1) E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i), m}(\omega z \tau_2 \dots \tau_m), \end{aligned}$$

с параметри

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 - \lambda_1, \gamma_2 = \dots = \gamma_m = 1, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots, \end{aligned}$$

и съответно

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{(1-\tau_m)^{\lambda_m-1} \tau_m^{-\lambda_m}}{\Gamma(\lambda_m)} \Gamma(1-\lambda_1) \dots \Gamma(1-\lambda_{m-1}) E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\tilde{\gamma}_i), m}(\omega z \tau_m) d\tau_m \\ &= \Gamma(1-\lambda_1) \dots \Gamma(1-\lambda_{m-1}) I_1^{-\lambda_m, \lambda_m} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\tilde{\gamma}_i), m}(\omega z) \\ &= \Gamma(1-\lambda_1) \dots \Gamma(1-\lambda_m) E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(1-\lambda_i), m}(\omega z), \end{aligned}$$

с параметри

$$\tilde{\gamma}_1 = 1 - \lambda_1, \dots, \tilde{\gamma}_{m-1} = 1 - \lambda_{m-1}, \tilde{\gamma}_m = 1.$$

Всичко това показва, че извършването на последователни повтарящи се (m пъти) интегрирания в (7.6.5) води до тъждеството

$$\begin{aligned} I_{1,m}^{(-\lambda_i), (\lambda_i)} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z) &= \prod_{i=1}^m I_1^{-\lambda_i, \lambda_i} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z) \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\prod_{i=1}^m \frac{(1-\tau_i)^{\lambda_i-1} \tau_i^{-\lambda_i}}{\Gamma(\lambda_i)} \right] E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z \tau_1 \dots \tau_m) d\tau_1 \dots d\tau_m \\ &= \Gamma(1-\lambda_1) \dots \Gamma(1-\lambda_m) E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(1-\lambda_i), m}(\omega z), \end{aligned}$$

което доказва теоремата. □

Глава 8

Редове по функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип. Сходимость

8.1 Редове по функции от Беселов тип. Теореме от Коши–Адамаров и Абелов тип

Нека $J_n^\mu(z)$, дефинирани с (4.1.1), и $J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$, дефинирани с (4.2.2), са съответно така наречените функции на Бесел–Мейтланд и обобщени функции на Ломел–Райт с $z \in \mathbb{C}$ и параметри $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и нека $n \in \mathbb{N}_0$. Да припомним, че за $m = 1$ функциите на Ломел–Райт дават обобщените 3-индексни функции на Бесел–Мейтланд. Ако допълнително $\lambda = 0$ и $\mu = 1$, те се свеждат до функции на Бесел от първи род, дефинирани с (1.5.2). Ето защо, вземайки $m = 1$ (съответно $m = 1$, $\lambda = 0$ и $\mu = 1$), всички резултати за $J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$, получени в тази глава, пораждаат съответните твърдения, свързани със споменатите функции $J_{n-2\lambda,\lambda}^\mu(z)$, съответно $J_n(z)$. В тази секция разглеждаме редове по изброените по-горе обобщени Беселови функции в комплексната равнина и за по-кратко ги наричаме редове от Беселов тип или мултииндексни Беселови редове.

За да направим по-нататъшното изложение възможно по-ясно и да представим получените резултати във възможно най-опростен вид, избираме подходяща фамилия от функции. За целта първо въвеждаме следните означения:

$$\tilde{J}_n^\mu(z) = z^n \Gamma(n+1) J_n^\mu(z), \quad (8.1.1)$$

$$\tilde{J}_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z) = (-1)^p z^{-2p} 2^{n+2p} \Gamma^m(\lambda+p+1) \Gamma(n-\lambda+p\mu+1) J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z), \quad (8.1.2)$$

за $n = 0, 1, 2, \dots$ и със съответните p , дефинирани в Секция 4.2. След това да отбележим, че в тази глава изследваме редове от следните видове

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_n^\mu(z), \quad (8.1.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z), \quad (8.1.4)$$

с комплексни коефициенти a_n .

Започваме с теореми от Коши–Адамаров тип, които дават областите на сходимост, т.е. областите, в които редовете са абсолютно сходящи и разходящи в техните външности.

Теорема 8.1.1 (от Коши–Адамаров тип [99]). *Областта на сходимост и на двата реда (8.1.3) и (8.1.4) е отворения кръг $D(0; R)$ с радиус на сходимост*

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} \right)^{-1}. \quad (8.1.5)$$

По-конкретно, те са абсолютно сходящи в отворения кръг $D(0; R)$ и разходящи в областта $|z| > R$. Случаите $R = 0$ и $R = \infty$ се включват в общия случай.

Доказателство. Започвайки с реда (8.1.4), даваме само идеята за доказателство, защото то в голяма степен следва това за редове по функции на Бесел в Глава 2. Именно, използвайки асимптотичната формулата (4.2.6), оценяваме абсолютната стойност на общия член на реда (8.1.4), след което доказателството се разделя на три отделни случая: $R = \infty$, $0 < R < \infty$ и $R = 0$, следвайки идеята на доказателството на Теорема 2.5.1. Първо доказваме абсолютната сходимост на реда (8.1.4) в кръговата област $D(0; R)$. Във втория случай доказваме също, че редът е разходящ за $|z| > R$, и в третия случай, че е разходящ за всички комплексни стойности на z , за които $z \neq 0$.

Доказателството за другия ред протича аналогично, но в него се използва асимптотичната формула (4.2.4) вместо (4.2.6). $\square$

По-долу са дадени резултати, аналогични на класическата лема на Абел, които могат да се извлекат като следствие от последната теорема.

Следствие 8.1.1. [99] *Нека редът (8.1.3) (съответно (8.1.4)) е сходящ в точката $z_0 \neq 0$. Тогава той е абсолютно сходящ в кръга $D(0; |z_0|)$. Освен това сходимостта е равномерна вътре в кръга $D(0; R)$, т. е. във всеки затворен кръг $|z| \leq r$ ($r < R$, R е дефиниран с (8.1.5)).*

Върху границата на кръга $\partial D(0; R)$ разглежданите редове могат да са даже разходящи. По-нататък е изследвано поведението им “в близост” до окръжността $C(0; R)$. Нека за целта, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R < \infty$, $|z_0| = R$ и g_φ е произволна ъглова област от вида (2.1.4) с големина на ъгъла $2\varphi < \pi$ и връх в точката $z = z_0$, която е симетрична относно правата, минаваща през точките 0 и z_0 . Нека освен това d_φ е частта от областта g_φ , разположена между раменете на ъгъла g_φ и дъгата от окръжността, която има център точката 0 и се допира до раменете на ъгъла. Може да се формулира следната теорема, свързана както с редовете по функции на Бесел–Мейтланд, така и с обобщените функции на Ломел–Райт.

Теорема 8.1.2 (от Абелов тип [99]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ е редица от комплексни числа, R е положително число, дефинирано с (8.1.5), $F(z)$ е сумата на кой да е от редовете (8.1.3), съответно (8.1.4), в областта $D(0; R)$, т. е.*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_n^\mu(z), \quad z \in D(0; R),$$

съответно

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z), \quad z \in D(0; R),$$

и нека този ред е сходящ в точката z_0 от границата на $D(0; R)$. Тогава

(I) *Разглежданият ред ((8.1.3), съответно (8.1.4)), е равномерно сходящ в областта d_φ .*

(II) *В сила е следното равенство*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_n^{\mu}(z_0), \quad (8.1.6)$$

$$\text{с\textit{ъ}отв. : } \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, m}(z_0), \quad (8.1.7)$$

стига само $z \in g_{\varphi}$.

Доказателство. Започвайки с реда (8.1.3), просто даваме идеята на доказателството. И така, нека $z \in d_{\varphi}$. Означавайки за удобство

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^k a_n \tilde{J}_n^{\mu}(z),$$

ние оценяваме модула на израза

$$S_{k+p}(z) - S_k(z) = \sum_{n=0}^{k+p} a_n \tilde{J}_n^{\mu}(z) - \sum_{n=0}^k a_n \tilde{J}_n^{\mu}(z) = \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n \tilde{J}_n^{\mu}(z),$$

като използваме съществено неравенството (2.1.5) и асимптотичната формула (4.2.4). Следвайки доказателството на Теорема 2.5.1, доказваме равномерната сходимост. Тогава равенството (8.1.6) следва поради изпълнението на равенствата $\lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{J}_n^{\mu}(z) = \tilde{J}_n^{\mu}(z_0)$ за $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказателството за реда (8.1.4), протича аналогично, но в него се използва асимптотичната формула (4.2.6). $\square$

Тъй като доказателствата на резултатите в тази секция следват напълно пътя на онези за Беселови редове (Секции 2.4 и 2.5), детайлите са пропуснати.

8.2 Редове по функции от Беселов тип.

Теорема от типа на теоремите на Таубер и Фату

Изложението в тази секция започва с теореми от Тауберов тип за сумиране на разходящи редове, представени както чрез функции на Бесел–Мейтланд, така и тези чрез функции на Ломел Райт. За да бъдат формулирани резултатите за (J, z_0) -сумируемост, дефинирана с Дефиниция 2.6.2,

първо конструираме подходяща фамилия от вида (2.6.4). В началото възнамеряваме да започнем с твърденията, свързани с функциите на Бесел–Мейтланд.

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$, $0 < R < \infty$, и $J_n^\mu(z_0) \neq 0$ за $n = 0, 1, 2, \dots$ и нека за краткост да означим

$$j_n(z) = J_{n,\mu}^*(z; z_0) = \frac{\tilde{J}_n^\mu(z)}{\tilde{J}_n^\mu(z_0)}, \quad (J; z_0) := \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (8.2.1)$$

Очевидно е, че функциите j_n от (8.2.1) са цели функции и $j_n(z_0) = 1$, поради което, фамилията $(J; z_0)$ е от типа, дефиниран с (2.6.4). Освен това ние се нуждаем и от реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{n,\mu}^*(z; z_0). \quad (8.2.2)$$

Съгласно Теорема 8.1.2, може да се запише следната забележка.

Забележка 8.2.1. (J, z_0) - сумируемостта, използваща системата от функции (8.2.1), е регулярна, и това свойство е само частен случай на Теорема 8.1.2.

И така, стигаме до следното твърдение, което е аналог на класическата теорема на Таубер.

Теорема 8.2.1 (от Тауберов тип [99]). *Нека фамилията $(J; z_0)$ е дефинирана с формулата (8.2.1). Ако числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) - сумируем и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0, \quad (8.2.3)$$

тогава той е сходящ.

По-нататък е дадено и обобщението на $o(1/n)$ версията на теоремата от Тауберов тип (Теорема 8.2.1), което може да се разглежда като теорема от Литълудов тип.

Теорема 8.2.2 (от Литълудов тип [99]). *Нека фамилията $(J; z_0)$ е дефинирана с равенството (8.2.1). Ако числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) - сумируем и числата a_n удовлетворяват свойството*

$$a_n = O(1/n), \quad (8.2.4)$$

то редът (2.2.2) е сходящ.

Доказателство. Нека z да принадлежи на отсечката $[0, z_0]$. Използвайки асимптотичната формула (4.2.4) за функциите на Бесел–Мейтланд, получаваме:

$$a_n J_{n,\mu}^*(z; z_0) = a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \frac{1 + \theta_n^\mu(z)}{1 + \theta_n^\mu(z_0)} = a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \left(1 + \tilde{\theta}_n^\mu(z; z_0) \right),$$

където $\tilde{\theta}_n^\mu(z; z_0) = \frac{\theta_n^\mu(z) - \theta_n^\mu(z_0)}{1 + \theta_n^\mu(z_0)}$. Тогава $\tilde{\theta}_n^\mu(z; z_0) = O(1/n^\mu)$, благодарение на (4.3.3) и Забележка 1.1.2 (iii).

Нека да запишем (8.2.2) във вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{n,\mu}^*(z; z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \left(1 + \tilde{\theta}_n^\mu(z; z_0) \right). \quad (8.2.5)$$

След това, означавайки

$$w_n(z) = a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \tilde{\theta}_n^\mu(z; z_0),$$

разглеждаме реда $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$. Тъй като $|w_n(z)| \leq |a_n| |\tilde{\theta}_n^\mu(z; z_0)|$ и съгласно условието (8.2.4) и оценката (4.3.3), то съществува константа $\tilde{C}$, такава че $|w_n(z)| \leq \tilde{C}/n^{1+\mu}$ за $n \in \mathbb{N}$. Поради сходимостта на реда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\mu}$ следва,

че редът $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ е също сходящ, даже абсолютно и равномерно върху отсечката $[0, z_0]$. Следователно (понеже $\lim_{z \rightarrow z_0} w_n(z) = w_n(z_0) = a_n \tilde{\theta}_n^\mu(z_0; z_0) = 0$) е изпълнено равенството

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} w_n(z) = 0.$$

Очевидно, предположението, че редът (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем, влече съществуването на границата (2.6.6). Тогава, имайки предвид, че (8.2.5) може да се запише във вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{n,\mu}^*(z; z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \tilde{\theta}_n^\mu(z; z_0),$$

заклучаваме, че съществува границата

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n, \quad (8.2.6)$$

и освен това, че

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{n,\mu}^*(z; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n.$$

От съществуването на границата (8.2.6) следва, че редът (2.2.2) е A -сумируем и тогава, съгласно Теорема 2.2.2, редът (2.2.2) е сходящ. $\square$

Забележка 8.2.2. *Сега валидността на Теорема 8.2.1 следва от Теорема 8.2.2, просто като следствие. Тя може да се докаже и независимо и доказателството се извършва аналогично на това на Теорема 8.2.2.*

Резултатите, свързани с обобщените функции на Ломел–Райт (4.2.1) са само формулирани, защото техните доказателства протичат по същия начин, но използвайки спецификата на съответната асимптотична формула.

Да отбележим, че всяка една от функциите $\tilde{J}_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$, $n \in \mathbb{N}_0$, бидейки цяла функция, не тъждествено нула, има най-много краен брой нули в затвореното и ограничено множество $[D(0; R)]$. Освен това, поради Забележка 4.4.2, само краен брой от тези функции изобщо имат някакви нули, евентуално с изключение на 0.

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$, $0 < R < \infty$, $J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z_0) \neq 0$ за $n = 0, 1, 2, \dots$, и нека да означим за краткост

$$j_n(z) = J_{n,\lambda,\mu,m}^*(z; z_0) = \frac{\tilde{J}_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)}{\tilde{J}_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z_0)}, \quad (J; z_0) := \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (8.2.7)$$

Очевидно, фамилията $(J; z_0)$ е от типа, дефиниран с (2.6.4), защото всички функции j_n в (8.2.7) са цели функции и при това $j_n(z_0) = 1$. Използвайки системата (8.2.7) от обобщени функции на Ломел–Райт, ние формулираме теоремите от Тауберов и Литълудов тип.

Теорема 8.2.3 (от Тауберов тип [99]). *Нека системата $(J; z_0)$ е дефинирана с (8.2.7). Ако числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем и*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0, \quad (8.2.8)$$

то той е сходящ.

Теорема 8.2.4 (от Литълудов тип [99]). *Нека системата $(J; z_0)$ е дефинирана с (8.2.7). Ако числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем и*

$$a_n = O(1/n), \quad (8.2.9)$$

то редът (2.2.2) е сходящ.

Да отбележим, че тази (J, z_0) -сумируемост е също регулярна, т.е. може да се запише следната забележка.

Забележка 8.2.3. *Разглежданата (J, z_0) -сумируемост е регулярна и това свойство е само частен случай на Теорема 8.1.2.*

Друг интересен резултат, който се отнася до поведението на редовете (8.1.3) и (8.1.4) по границата на областта на сходимост, дава зависимост между разпределението на регулярните точки на техните суми и сходимостта на редовете в такива точки на границата. Получените резултати в тази насока за двете фамилии са комбинирани в една теорема, както следва.

Теорема 8.2.5 (от Фату тип [99]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяващи условията*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1, \quad (8.2.10)$$

и $F(z)$ да бъде сумата на (8.1.3), съответно (8.1.4), в единичния кръг $D(0; 1)$, т. е.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_n^{\mu}(z), \quad z \in D(0; 1) \quad (8.2.11)$$

$$(\text{resp. : } F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_{n,\lambda}^{\mu,m}(z), \quad z \in D(0; 1)). \quad (8.2.12)$$

Нека σ е произволна дъга от единичната окръжност $C(0; 1)$, всички точки на която (включително и краищата) са регулярни за функцията F . Тогава редът (8.1.3) (съответно (8.1.4)) е сходящ, даже равномерно, върху дъгата σ .

Доказателство. Тук е изложено доказателството за реда (8.1.3). Тъй като всички точки на дъгата σ са регулярни за функцията $F(z)$, то съществува област $G \supset \sigma$, в която функцията F може да бъде продължена.

Означавайки $\tilde{G} = G \cup D(0; 1)$, ние дефинираме функция ψ в областта $\tilde{G}$ със следното равенство

$$\psi(z) = F(z), \quad z \in D(0; 1).$$

С други думи казано, ψ е еднозначно аналитично продължение на F в областта $\tilde{G}$.

Нека $\rho > 0$ е разстоянието между границата $\partial\tilde{G}$ на областта $\tilde{G}$ и дъгата σ ($\partial\tilde{G}$ съдържа част от единичната окръжност $|z| = 1$), нека да вземем точките ζ_1, ζ_2 от единичната окръжност

$$\zeta_1, \zeta_2 \notin \sigma, \quad |\zeta_1| = |\zeta_2| = 1,$$

такива, че разстоянието на всяка една от точките ζ_1, ζ_2 и съответния поблизък край на дъгата σ са равни на $\rho/2$, и да означим

$$z_1 = \zeta_1(1 + \rho/2), \quad z_2 = \zeta_2(1 + \rho/2).$$

Да дефинираме сега помощната функция

$$\varphi_n(z) = \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k^\mu(z) \quad (8.2.13)$$

и да отбележим, че съгласно Забележка 4.4.2, съществува естествено число N_0 , такова че $\tilde{J}_n^\mu(z) \neq 0$ когато z принадлежи на непразно компактно подмножество на $\mathbb{C}$, $z \neq 0$ и $n > N_0$. Сега, вземайки $n \geq N_0$, въвеждаме следното означение:

$$\omega_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\tilde{J}_{n+1}^\mu(z)}(z - \zeta_1)(z - \zeta_2), \quad z \neq 0, \quad \omega_n(0) = a_{n+1}\zeta_1\zeta_2. \quad (8.2.14)$$

За да докажем, че редицата $\left\{ \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k^\mu(z) \right\}$ е равномерно сходяща върху дъгата σ , е достатъчно да докажем, че редицата $\{\omega_n(z)\}_{n=N_0}^\infty$ клони равномерно към нула върху границата на областта $\partial\Delta$ на сектора $\Delta = Oz_1z_2$, който е компактно множество, и след това да оценим $\varphi_n(z)$ върху дъгата σ .

За целта да се върнем на (4.3.3) и да си припомним свойството на частно на две Γ -функции, дадено в Забележка 1.1.2(iii). Нека само да споменем,

че тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\mu} = 0$, то съществуват числа C и $\tilde{N} > N_0$, такива че $|1 + \theta_n^\mu(z)| \leq C/2$ за всички стойности на $n \in \mathbb{N}$ и $1/2 \leq |1 + \theta_n^\mu(z)| \leq 2$ за $n > \tilde{N}$ върху произволно компактно подмножество на $\mathbb{C}$.

Сега, вземайки $\varepsilon > 0$ и означавайки

$$R = 1 + \rho/2, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon \rho^3}{8(8CR^2 + \rho)}, \quad M = \max_{z \in [\Delta]} |\psi(z)| \quad ([\Delta] = \Delta \cup \partial\Delta),$$

ние трябва да разгледаме четири случая, както следва.

(1) Първо, нека $z \in (O, \zeta_1) \cup (O, \zeta_2) \subset D(0; 1)$.

В единичния кръг, съгласно (8.2.13), имаме последователно, че

$$\begin{aligned} \omega_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} \frac{\tilde{J}_{n+k+1}^\mu(z)}{\tilde{J}_{n+1}^\mu(z)} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2), \\ \omega_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} z^k \frac{(1 + \theta_{n+k+1}^\mu(z))}{(1 + \theta_{n+1}^\mu(z))} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2). \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

Тъй като $a_n \rightarrow 0$ и $|(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)| < 2(1 - |z|)$, то съществува число $N_1 = N_1(\varepsilon_1) > \tilde{N}$, такова че

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &< \varepsilon_1 \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k \left| \frac{(1 + \theta_{n+k+1}^\mu(z))}{(1 + \theta_{n+1}^\mu(z))} \right| |(z - \zeta_1)| |(z - \zeta_2)| \\ &< 2C\varepsilon_1 \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k (1 - |z|) = 2C\varepsilon_1 \end{aligned}$$

за $n > N_1$, т. е.

$$|\omega_n(z)| < 2C\varepsilon_1. \quad (8.2.16)$$

(2) Нека $z \in (\zeta_1, z_1) \cup (\zeta_2, z_2)$.

В този случай $|z - \zeta_1| = |z| - 1$ и $|z - \zeta_2| \leq |z| + |\zeta_2| < 2R$, и вземайки под внимание Теорема 4.4.1, асимптотичните формули (4.2.4) и (8.2.13),

можем да запишем следните неравенства за абсолютната стойност на $\omega_n(z)$, дадена с формулата

$$\omega_n(z) = \frac{\psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k (1 + \theta_k^\mu(z))}{z^{n+1}(1 + \theta_{n+1}^\mu(z))} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2),$$

именно:

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &\leq \frac{M + \sum_{k=0}^n |a_k| |z|^k (1 + \theta_k^\mu(z))}{|z|^{n+1} (1 + \theta_{n+1}^\mu(z))} 2R(|z| - 1) \\ &< 2R \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k|R^k \right) \frac{(|z| - 1)}{|z|^{n+1}} + 2\varepsilon_1 RC \frac{(|z| - 1)}{|z|^{n+1}} \sum_{k=N_1+1}^n |z|^k. \end{aligned}$$

По-нататък, имайки предвид че от една страна:

$$\frac{(|z| - 1)}{|z|^{n+1}} < \frac{(|z| - 1)}{|z|^{n+1} - 1} = \frac{1}{|z|^n + \dots + 1} < \frac{1}{n + 1},$$

и от друга страна:

$$\sum_{k=N_1+1}^n |z|^k = \frac{|z|^{n+1} - |z|^{N_1+1}}{(|z| - 1)} < \frac{|z|^{n+1}}{(|z| - 1)},$$

ние заключаваме, че

$$|\omega_n(z)| < \frac{2R}{n + 1} \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k|R^k \right) + 2\varepsilon_1 RC.$$

Тогава, тъй като $n^{-1} \rightarrow 0$, то съществува число $N_2 = N_2(\varepsilon_1) > N_1$, такова че

$$\frac{2R}{n + 1} \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k|R^k \right) < \varepsilon_1$$

за $n > N_2$, т. е.

$$|\omega_n(z)| < (1 + 2RC)\varepsilon_1. \quad (8.2.17)$$

(3) z принадлежи на дъгата $\widehat{z_1 z_2}$ (включително краищата).

Тогава $|z - \zeta_1| < 2R$, $|z - \zeta_2| < 2R$ и следователно

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &< \frac{4R^2 \left(2M + \sum_{k=0}^n C|a_k|R^k \right)}{R^{n+1}} \\ &< \frac{4 \left(2M + \sum_{k=0}^{N_1} C|a_k|R^k \right)}{R^{n-1}} + \frac{8\varepsilon_1 C R^2}{\rho}. \end{aligned}$$

Тъй като $R^{-n} \rightarrow 0$, то съществува число $N_3 = N_3(\varepsilon_1) > N_1$, такова че

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8CR^2}{\rho} + 1 \right) \varepsilon_1 \quad (8.2.18)$$

за $n > N_3$.

(4) Нека $z \in \{O, \zeta_1, \zeta_2\}$.

В този случай (8.2.14) води до $\omega_n(0) = a_{n+1}\zeta_1\zeta_2$, откъдето

$$|\omega_n(0)| = |a_{n+1}| < \varepsilon_1 \quad \text{за } n > N_1 \quad \text{и} \quad \omega_n(\zeta_{1,2}) = 0. \quad (8.2.19)$$

Нека $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ и $n > N$, тогава имайки предвид, че са изпълнени неравенствата (8.2.16) – (8.2.19), можем да запишем следната верига от релации:

$$|\omega_n(z)| < \max \left(2C\varepsilon_1, (2RC + 1)\varepsilon_1, \left(\frac{8CR^2}{\rho} + 1 \right) \varepsilon_1 \right) = \left(\frac{8CR^2}{\rho} + 1 \right) \varepsilon_1,$$

върху границата на областта Δ . Следователно, съгласно принципа за максимума на модула, може да се извлече следното неравенство

$$|\omega_n(z)| < \left(\frac{8CR^2 + \rho}{\rho} \right) \varepsilon_1, \quad z \in \sigma. \quad (8.2.20)$$

Накрая, съгласно (4.2.4), (8.2.13) и (8.2.15), и тъй като $|z| = 1$ върху дъгата σ , то получаваме

$$|\omega_n(z)| = \frac{\left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k^\mu(z) \right|}{|z^{n+1}| |1 + \theta_{n+1}^\mu(z)|} |z - \zeta_1| |z - \zeta_2| > \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{4} \left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k^\mu(z) \right|. \quad (8.2.21)$$

Тогава прилагането на неравенството (8.2.20), релацията (8.2.21) дава

$$\left| \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{J}_k^\mu(z) \right| < \frac{8}{\rho^2} |\omega_n(z)| < \frac{8\varepsilon_1}{\rho^3} (8CR^2 + \rho) = \varepsilon, \quad z \in \sigma,$$

което доказва теоремата в този случай.

Доказателството за реда (8.1.4) протича аналогично. $\square$

8.3 Митаг-Лефлерови и обобщени Митаг-Лефлерови редове. Теорема от Коши-Адамаров и Абелов тип

Нека $E_n(z)$ и $E_{\alpha,n}(z)$, дефинирани с (5.1.1) и (5.1.2) и $E_{\alpha,n}^\gamma(z)$, дефинирани с (5.3.1), са съответно функциите на Митаг-Лефлер и техните 3-индексни обобщения със $z \in \mathbb{C}$ и параметри $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$. Да припомним освен това, че за $\gamma = 1$ обобщената 3-параметрична функция на Митаг-Лефлер (известна още като функция на Прабхакар) съвпада с функцията на Митаг-Лефлер, поради което, поставяйки $\gamma = 1$, всички получени резултати, свързани с $E_{\alpha,n}^\gamma(z)$, в тази глава пораждаат съответните твърдения, свързани с класическите функции на Митаг-Лефлер $E_{\alpha,n}(z)$.

В по-нататъшното изложение ние използваме означенията

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0(z) &= 1, \quad \tilde{E}_n(z) = z^n E_n(z), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{E}_{\alpha,0}^0(z) &= 1, \quad \tilde{E}_{\alpha,n}^0(z) = \Gamma(n) z^n E_{\alpha,n}^0(z), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{E}_{\alpha,n}^\gamma(z) &= \frac{\Gamma(\alpha p + n)}{(\gamma)_p} z^{n-p} E_{\alpha,n}^\gamma(z) \quad (\gamma \neq 0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

със съответните стойности на p , определени в Секция 5.4 (тук $\tilde{E}_0(z) = 1$ и $\tilde{E}_{\alpha,0}^0(z) = 1$ са въведени само за пълнота).

В тази секция разглеждаме редове по такъв тип от функции в комплексната равнина, именно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_n(z), \quad (8.3.2)$$

съответно

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{\alpha,n}^{\gamma}(z), \quad (8.3.3)$$

с комплексни коефициенти a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Първия от тях наричаме по-кратко Митаг-Лефлеров ред а втория – обобщен Митаг-Лефлеров ред, или двата вида редове наричаме общо редове от Митаг-Лефлеров тип. Тъй като доказателствата на твърденията в тази секция следват линията на онези, отнасящи се до редове по Беселови и обобщени Беселови функции, детайлите тук са пропуснати. Първо формулираме теорема от Коши–Адамаров тип за редовете (8.3.2) и (8.3.3).

Теорема 8.3.1 (от Коши–Адамаров тип [99]). *Областта на сходимост на всеки един от редовете (8.3.2) и (8.3.3) с комплексни коефициенти a_n е отворения кръг $D(0; R)$ с радиус на сходимост*

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} \right)^{-1}. \quad (8.3.4)$$

По-конкретно, и двата реда са абсолютно сходящи в кръга $D(0; R)$ и разходящи в областта $|z| > R$. Случаите $R = 0$ и $R = \infty$ попадат в общия случай.

Следствие 8.3.1. [99] *Нека кой да е от редовете (8.3.2) и (8.3.3) е сходящ в точката $z_0 \neq 0$. Тогава той е абсолютно сходящ в кръга $D(0; |z_0|)$. Освен това, сходимостта е равномерна вътре в кръга $D(0; R)$, т. е. върху всеки затворен кръг $|z| \leq r < R$ (R дефиниран с (8.3.4)).*

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R < \infty$, $|z_0| = R$, g_{φ} е произволна ъглова област от вида (2.1.4) с големина $2\varphi < \pi$ и с връх в точката $z = z_0$, и нека d_{φ} е частта от g_{φ} , дефинирана с (2.1.4). Следващата теорема се отнася до равномерната сходимост на редовете (8.3.2) и (8.3.3) в множеството d_{φ} и съществуването на границата на тяхната сума в точката z_0 , при условие, че $|z| < R$ и $z \in g_{\varphi}$.

Теорема 8.3.2 (от Абелов тип [99]). Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа и R да бъде реалното число, дефинирано с (8.3.4), $0 < R < \infty$ и $F(z)$, $G(z)$ да са сумите съответно на редовете (8.3.2), (8.3.3) в областта $D(0; R)$, т. е.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_n(z), \quad z \in D(0; R), \quad (8.3.5)$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{\alpha, n}^{\gamma}(z), \quad z \in D(0; R). \quad (8.3.6)$$

Ако кой да е от тези редове ((8.3.2) или съответно (8.3.3)) е сходящ в точката z_0 от границата $\partial D(0; R) = C(0; R)$, то

(I) Редът (8.3.2), съответно (8.3.3), е равномерно сходящ в областта d_{φ} .

(II) В сила е следната релация

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_n(z_0), \quad (8.3.7)$$

$$\text{resp. : } \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{\alpha, n}^{\gamma}(z_0), \quad (8.3.8)$$

при условие, че $z \in g_{\varphi}$.

Подробностите от доказателствата, отнасящи се за редовете (8.3.3) и равенството (8.3.8) могат да се намерят в [94], с изключение на равномерността и Следствие 8.3.1. Идеите, както и пътя по който могат да се извършат доказателствата на последните, са аналогични на [91], където са дадени доказателствата на съответните резултати, засягащи редовете (8.3.2) и равенството (8.3.7).

8.4 Редове по функции от Митаг-Лефлеров тип. Теорема от типа на теоремите на Таубер и Фату

Нека $\tilde{E}_n$, $\tilde{E}_{\alpha, n}^{\gamma}$ са функциите, дефинирани с релациите (8.3.1), $z_0 \in \mathbb{C}$ с $|z_0| = R$ и $0 < R < \infty$, $\tilde{E}_n(z_0) \neq 0$ и също $\tilde{E}_{\alpha, n}^{\gamma}(z_0) \neq 0$ (последното

условие може да бъде записано, защото и двете функции $\tilde{E}_n$, $\tilde{E}_{\alpha,n}^\gamma$ са цели функции, и допълнително предвид Забележки 5.6.3, 5.6.4). За удобство означаваме

$$j_n(z) := E_n^*(z; z_0) = \frac{\tilde{E}_n(z)}{\tilde{E}_n(z_0)}, \quad (J; z_0) := \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad (8.4.1)$$

съответно

$$j_n(z) := E_{\alpha,n,\gamma}^*(z; z_0) = \frac{\tilde{E}_{\alpha,n}^\gamma(z)}{\tilde{E}_{\alpha,n}^\gamma(z_0)}, \quad (J; z_0) := \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}. \quad (8.4.2)$$

Ясно е, че всичките функции j_n във формулите (8.4.1) и (8.4.2) са цели функции, които удовлетворяват условието $j_n(z_0) = 1$.

За да формулираме следващите резултати ние разглеждаме съответните редове от вида (2.6.5), т. е редовете:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n E_n^*(z; z_0), \quad (8.4.3)$$

респективно

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n E_{\alpha,n,\gamma}^*(z; z_0), \quad (8.4.4)$$

използвани в Дефиниция 2.6.2 за (J, z_0) -сумируемост на даден числов ред. Да отбележим, че съгласно Теорема 8.3.2 може да се запише следващата забележка, която се отнася за такъв вид сумиране.

Забележка 8.4.1. (J, z_0) -сумируемостта на числовия ред (2.2.2), която използва фамилията (8.4.1), респективно (8.4.2), е регулярна и това свойство е само частен случай на Теорема 8.3.2.

Теорема 8.4.1 (от Тауберов тип [99]). Ако $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, която удовлетворява свойството

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0, \quad (8.4.5)$$

и числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем, (чрез системата (8.4.1), съответно (8.4.2)), то редът (2.2.2) е сходящ.

Доказателство. Да започнем със сумируемост, изразена чрез фамилията от функции на Прабхакар (8.4.2) (т. е. 3-параметрични обобщения на функциите на Митаг-Лефлер). В случая, когато $\gamma = 0$, доказателството се извършва незабавно, защото съгласно Лема 5.4.3, редът (8.4.4) се свежда до степенен ред. Нека сега $\gamma \neq 0$ и z принадлежи на сегмента $[0, z_0]$. Вземайки под внимание асимптотичната формула (5.6.4) за обобщените функции на Митаг-Лефлер, получаваме:

$$a_n E_{\alpha, n, \gamma}^*(z; z_0) = a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \left(1 + \tilde{\theta}_n(z; z_0) \right),$$

където $\tilde{\theta}_n(z; z_0) = \frac{\theta_{\alpha, n}^\gamma(z) - \theta_{\alpha, n}^\gamma(z_0)}{1 + \theta_{\alpha, n}^\gamma(z_0)}$. Тогава благодарение на (5.6.5) имаме:

$$|\tilde{\theta}_n(z; z_0)| = O(1/n^{Re(\alpha)}). \quad (8.4.6)$$

По-нататък, записвайки (8.4.4) по следния начин

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n E_{\alpha, n, \gamma}^*(z; z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \left(1 + \tilde{\theta}_n(z; z_0) \right), \quad (8.4.7)$$

ние разглеждаме реда $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$, където w_n е използвано за означаване на израза

$$w_n(z) = a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \tilde{\theta}_n(z; z_0).$$

Тъй като $|w_n(z)| \leq |a_n| |\tilde{\theta}_n(z; z_0)|$ и съгласно условието (8.4.5) и зависимостта (8.4.6), съществува константа C , такава че $|w_n(z)| \leq C/n^{1+Re(\alpha)}$.

Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+Re(\alpha)}$ е сходящ, то редът $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$ е също сходящ, даже абсолютно и равномерно върху сегмента $[0, z_0]$. Следователно (понеже $\lim_{z \rightarrow z_0} w_n(z) = 0$)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} w_n(z) = 0.$$

Очевидно, предположението, че редът (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем влече съществуването на границата (2.6.6). Тогава, като се има предвид, че (8.4.7) може да бъде записано във вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n E_{\alpha, n, \gamma}^*(z; z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z),$$

ние заключаваме, че съществува границата

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \quad (8.4.8)$$

и освен това, че

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n E_{\alpha, n, \gamma}^*(z; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n.$$

От съществуването на границата (8.4.8) следва, че редът (2.2.2) е A -сумируем. Тогава съгласно Теорема 2.2.1, редът (2.2.2) е сходящ, което доказва теоремата в този случай.

Сумируемостта, която се отнася до системата (8.4.1) може да бъде доказана аналогично, използвайки реда (8.4.3) вместо (8.4.4) и съответната асимптотична формула. $\square$

По-долу е направено обобщение от Литълудов тип на $o(1/n)$ -версията на теоремата от Тауберов тип (Theorem 8.4.1). Тъй като неговото доказателство следва това на Теорема 8.4.1, то резултатът е само формулиран.

Теорема 8.4.2 (от Литълудов тип [99]). *Ако $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, която удовлетворява условието $a_n = O(1/n)$, и числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем (изразено чрез системата (8.4.1), съответно (8.4.2)), то той е сходящ.*

Теорема 8.4.3 (от Фату тип [99]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условията*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1,$$

и $F(z)$ да бъде сумата на реда (8.3.2), съответно (8.3.3), в единичния отворен кръг $D(0; 1)$, т.е.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_n(z), \quad z \in D(0; 1) \quad (8.4.9)$$

$$(\text{resp.: } F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{\alpha, n}^{\gamma}(z), \quad z \in D(0; 1)). \quad (8.4.10)$$

Нека σ е произволна дъга от единичната окръжност $C(0; 1)$, всички точки на която (включително и краищата) са регулярни за функцията F . Тогава редът (8.3.2) (съответно (8.3.3)) е сходящ, даже равномерно, върху дъгата σ .

Доказателство. Тук е дадена само идея за доказателство. Поради регулярността съществува област $G \supset \sigma$, в която функцията F може да бъде продължена. След като означим $\tilde{G} = G \cup D(0; 1)$, ние дефинираме функцията ψ в областта $\tilde{G}$ с помощта на равенството

$$\psi(z) = F(z), \quad z \in D(0; 1),$$

т. е. това означава, че F има еднозначно аналитично продължение в $\tilde{G}$.

Нека $\rho > 0$ е разстоянието между границата $\partial\tilde{G}$ на областта $\tilde{G}$ и дъгата σ ($\partial\tilde{G}$ съдържа част от единичната окръжност $C(0; 1)$), нека да вземем точките $\zeta_1, \zeta_2 \notin \sigma$, $|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1$, такива, че разстоянието на всяка една от точките ζ_1, ζ_2 и съответния по-близък край на дъгата σ са равни на $\rho/2$, и да означим $z_1 = \zeta_1(1 + \rho/2)$, $z_2 = \zeta_2(1 + \rho/2)$.

Да дефинираме сега помощната функция

$$\varphi_n(z) = \psi(z) - \sum_{k=0}^n a_k \tilde{E}_{\alpha,k}^{\gamma}(z),$$

и да отбележим, че съгласно Забележка 5.6.4, съществува естествено число N_0 , такова че $\tilde{E}_{\alpha,n}^{\gamma}(z) \neq 0$ в ограниченото множество $\tilde{G}$, когато $z \neq 0$ и $n > N_0$. Сега, вземайки $n \geq N_0$, ние въвеждаме означението

$$\omega_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\tilde{E}_{\alpha,n+1}^{\gamma}(z)}(z - \zeta_1)(z - \zeta_2), \quad \omega_n(0) = a_{n+1}\zeta_1\zeta_2.$$

Доказателството продължава по същия начин, както в Теорема 8.2.5, като първо се покаже, че редицата $\{\omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ клони равномерно към нула върху границата $\partial\Delta$ на сектора $\Delta = O z_1 z_2$, и след това се използва това, за да се докаже, че редицата $\left\{ \sum_{k=0}^n a_k \tilde{E}_{\alpha,k}^{\gamma}(z) \right\}$ е равномерно сходяща върху дъгата σ . Детайлите са пропуснати, но могат да се намерят например в публикацията [95].

Доказателствата на останалите два случая следват същата идея и се извършват аналогично. $\square$

8.5 Мултииндексни Митаг-Лефлерови редове. Теорема от Коши–Адамаров и Абелов тип

Нека

$E_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z)$, дефинирани с (6.2.2), и $J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z)$, дефинирани с (4.2.9), са мултииндексните функции на Митаг-Лефлер и съответно хипер-Беселовите функции със $z \in \mathbb{C}$ и параметри, както следва:

$$\alpha_i > 0, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\nu_i + 1) > 0 \ (i = 1, \dots, m), \ n \in \mathbb{N}_0.$$

За да изберем подходящи семейства от функции за по-нататъшното изложение, ние модифицираме малко функциите, споменати по-горе, като ги умножим с подходящи коефициенти и степенни функции.

Нека $\tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}$ са функциите

$$\tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z) = z^{n-p} E_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z) \Gamma(\alpha_{i_0}p + n) \prod_{i=1}^m {}' \Gamma(\alpha_i p + \mu_i), \quad (8.5.1)$$

със съответните стойности на p , определени в Секция 6.2 и нека $\tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}$ са дефинирани с равенството

$$\tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z) = C_{m,n} \left(\frac{z}{m+1} \right)^{-\sum_{i=1}^m {}' \nu_i} J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z), \quad (8.5.2)$$

където символът $C_{m,n}$ е използван за означаване на израза по-долу, т. е.

$$C_{m,n} = (m+1)^n \Gamma(n+1) \prod_{i=1}^m {}' \Gamma(\nu_i + 1). \quad (8.5.3)$$

В тази секция са разгледани редове по такива видове функции, както е записано в следващите две формули, съответно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z) \quad (8.5.4)$$

както и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z), \quad (8.5.5)$$

с комплексни коефициенти a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и е изучена тяхната сходимост в комплексната равнина $\mathbb{C}$. Намерени са техните кръгове на сходимост и също така е изследвано поведението им “в близост” до границата на кръга на сходимост, като са дадени резултати от Коши-Адамаров и Абелов тип. Тъй като доказателствата на резултатите, които са дадени в тази и следващата секция, следват линията на тези за Беселови редове (Секции 2.4 – 2.8), а също така и на онези в предшестващите няколко Секции 8.1 – 8.4, детайлите са пропуснати.

Започваме с формулировката на теоремата от Коши–Адамаров тип, комбинирайки резултатите за двата разглеждани реда.

Теорема 8.5.1 (от Коши–Адамаров тип [99]). *Областта на сходимост на всеки един от редовете (8.5.4) и (8.5.5) с комплексни коефициенти a_n е отворения кръг $D(0; R)$ с радиус на сходимост, даден с формулата*

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} \right)^{-1}. \quad (8.5.6)$$

По-конкретно, и двата реда ((8.5.4) и (8.5.5)) са абсолютно сходящи в кръга $D(0; R)$ и разходящи в областта $|z| > R$. Случаите $R = 0$ и $R = \infty$ попадат в общия случай.

Като елементарно следствие от тази теорема може да се запише следното твърдение.

Следствие 8.5.1. [99] *Нека кой да е от редовете (8.5.4) и (8.5.5) е сходящ в точката $z_0 \neq 0$. Тогава той е абсолютно сходящ в кръга $D(0; |z_0|) \subset \mathbb{C}$. Освен това, сходимостта е равномерна вътре в кръга $D(0; R)$, т. е. върху всеки затворен кръг $|z| \leq r < R$ (R , дефиниран с (8.5.6)) сходимостта е равномерна.*

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < R < \infty$, $|z_0| = R$ и g_φ е произволна ъглова област от вида (2.1.4) с големина на ъгъла $2\varphi < \pi$ и с връх в точката $z = z_0$. Нека също така d_φ да бъде частта от ъгловата област g_φ , която е разположена между раменете на ъгъла и дъгата от окръжността, допираща се до раменете на ъгъла и имаща център точката 0. Следващата теорема се отнася до равномерната сходимост на редовете (8.5.4) и (8.5.5) в множеството d_φ и съществуването на границата на техните суми в точката z_0 , при условие, че $z \in g_\varphi$.

Теорема 8.5.2 (от Абелов тип [99]). Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа и R да бъде реалното число, дефинирано с (8.5.6), $0 < R < \infty$ и $F(z)$, $G(z)$ да са сумите съответно на редовете (8.5.4) и (8.5.5) в кръга $D(0; R)$. Ако кой да е от тези редове ((8.5.4), респективно (8.5.5)) е сходящ в точката z_0 от границата на $D(0; R)$, то той е равномерно сходящ в областта d_φ и освен това е в сила релацията

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z_0), \quad (8.5.7)$$

съответно

$$\lim_{z \rightarrow z_0} G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z_0), \quad (8.5.8)$$

при условие, че $z \in g_\varphi$.

Подробностите от доказателствата, засягащи редовете (8.5.4) и равенството (8.5.7) могат да се намерят в [92], с изключение на равномерността и Следствие 8.5.1, които са публикувани в [97]. Съответните резултати за редовете (8.5.5) са разгледани в [96], където са дадени идеите за доказателствата им.

8.6 Мултииндексни Митаг-Лефлерови редове. Теорема от типа на теоремите на Таубер и Фату

Нека $\tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z)$ и $\tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z)$ са функциите, дефинирани с релациите (8.5.1), съответно (8.5.2), нека $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$ и $0 < R < \infty$, и нека

$$\tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z_0) \neq 0, \quad \tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z_0) \neq 0$$

(последните условия могат да се запишат, защото функциите $\tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z)$ и $\tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z)$ са цели функции, и допълнително предвид Забележки 6.3.3 и 4.4.2). За удобство да означим

$$j_n(z) := E_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}^*(z; z_0) = \frac{\tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z)}{\tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z_0)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (8.6.1)$$

съответно

$$j_n(z) := J_{(\nu_{i_0}(n))}^{\star(m)}(z; z_0) = \frac{\tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z)}{\tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z_0)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (8.6.2)$$

Очевидно е, че всички функции j_n във формулите (8.6.1) и (8.6.2) са цели функции, удовлетворяващи условието $j_n(z_0) = 1$, т. е. съответните фамилии $(J; z_0) := \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ са от вида (2.6.4).

За да дадем следващите резултати, ние разглеждаме редовете от вида (2.6.5), т.е. реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n E_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}^{\star}(z; z_0), \quad (8.6.3)$$

съответно

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{(\nu_{i_0}(n))}^{\star(m)}(z; z_0), \quad (8.6.4)$$

както е описано в Дефиниция 2.6.2 за (J, z_0) -сумируемост на даден числов ред. Като се вземе под внимание Теорема 8.5.2, може да се запише следната забележка, отнасяща се за сумиране от такъв вид.

Забележка 8.6.1. (J, z_0) -сумируемостта на числовия ред (2.2.2), посредством фамилията (8.6.1), съответно (8.6.2), е регулярна и това свойство е само частен случай на Теорема 8.5.2.

Със следващото формулирано твърдение се дава резултат, обратен на Теорема 8.5.2.

Теорема 8.6.1 (от Тауберов тип [99]). Ако $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща свойството $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, и числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем (посредством функциите (8.6.1), съответно (8.6.2)), то редът (2.2.2) е сходящ.

Съответното обобщение от Литълудов тип на тази теорема изглежда по следния начин.

Теорема 8.6.2 (от Литълудов тип [99]). Ако $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа със свойството $a_n = O(1/n)$, и числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем (посредством функциите (8.6.1), респективно (8.6.2)), то той е сходящ.

В края на тази секция е формулирано твърдение от типа на теоремата на Фату.

Теорема 8.6.3 (от Фату тип [99]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условията*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1,$$

и нека $F(z)$ е сумата на реда (8.5.4), или съответно (8.5.5), в единичния кръг $D(0; 1)$, т. е.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}(z), \quad z \in D(0; 1), \quad (8.6.5)$$

или съответно

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z), \quad z \in D(0; 1). \quad (8.6.6)$$

Нека σ е произволна дъга от единичната окръжност $S(0; 1)$, всички точки на която (включително и краищата на дъгата) са регулярни за F . Тогава редът (8.5.4) (респективно (8.5.5)) е сходящ, даже равномерно, върху дъгата σ .

Да отбележим, че доказателствата на теоремите от Тауберов тип, посредством функциите (8.6.1), са дадени в [92]. Съответните резултати, свързани с функциите (8.6.2) могат да се докажат по аналогичен начин, използвайки асимптотичната им оценка (4.3.11). Теоремите от типа на Фату за редовете (8.5.4) и (8.5.5) са разгледани съответно в [97] и [96]. Техните подробни доказателства са изложени в тези публикации.

Глава 9

Редове по функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип. Свръхсходимост

9.1 Свръхсходимост на редове от Беселов тип

Да се върнем отново към функцията на Бесел–Мейтланд J_n^μ , дефинирана с (4.1.1), обобщената функция на Ломел–Райт $J_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, q}$, дефинирана с (4.1.3), и хипер-Беселовата функция $J_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}$, дефинирана с (4.1.4)–(4.1.6) и (4.2.8)–(4.2.10), и да разгледаме изброимите фамилии

$$\left\{ \tilde{J}_n^\mu(z) \right\}_{n=0}^\infty, \quad \left\{ \tilde{J}_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, q}(z) \right\}_{n=0}^\infty; \quad \mu > 0, \quad (9.1.1)$$

съответно

$$\left\{ \tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z) \right\}_{n=0}^\infty, \quad \operatorname{Re}(\nu_i + 1) > 0 \ (i = 1, 2, \dots, m), \quad (9.1.2)$$

от функции от Беселов тип, дадени съответно с (8.1.1), (8.1.2) и (8.5.2).

В тази секция ние разглеждаме редове по описаните по-горе обобщени Беселови функции в комплексната равнина от видовете (8.1.3), (8.1.4) и (8.5.5). По-конкретно, разглеждаме редовете:

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \tilde{J}_n^\mu(z), \quad \sum_{n=0}^\infty a_n \tilde{J}_{n-2\lambda, \lambda}^{\mu, q}(z), \quad \sum_{n=0}^\infty a_n \tilde{J}_{(\nu_{i_0}(n))}^{(m)}(z), \quad (9.1.3)$$

с комплексни коефициенти, имащи Адамарови празнини, и изучаваме тяхната свръхсходимост (по смисъла на Забележка 3.2.1). Резултатите са само формулирани, защото доказателствата им буквално следват тези, които се отнасят за Беселовите редове, дадени в Секция 3.2.

Теорема 9.1.1 (за свръхсходимост [99]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условието $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1$, нека $\tilde{f}(z)$ е сумата на кой да е от редовете (9.1.3) в единичния кръг $D(0; 1)$, $\tilde{f}(z)$ има поне една регулярна точка, принадлежаща на окръжността $C(0; 1)$, и нека $\tilde{f}(z)$ притежава Адамарови празнини. Тогава съответният ред (9.1.3) е свръхсходящ.*

Теорема 9.1.2 (от Адамаров тип за празнините [99]). *Нека $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяващи условията*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_{k_n}|)^{1/k_n} = 1 \quad \text{за } k_{n+1} \geq (1 + \theta)k_n \quad (\theta > 0),$$

коефициентите $a_k = 0$ за $k_n < k < k_{n+1}$ и $\tilde{f}(z)$ е сумата на кой да е от редовете (9.1.3) в единичния кръг $D(0; 1)$. Тогава всички точки на единичната окръжност $C(0; 1)$ са сингулярни за функцията $\tilde{f}$, т.е. единичната окръжност е естествена граница на аналитичност за съответния ред (9.1.3).

В заключение да отбележим, че като частни случаи могат да се получат съответните резултати за редове по Беселови функции, дадени в Секция 3.2 и публикувани в [98] и [99].

9.2 Парциални суми и интеграли за редове от Беселов тип: Полезни оценки

В тази секция са намерени някои свойства на разглежданите свръхсходящи редове, които се отнасят до подредици на редиците от парциалните им суми и интеграли от тях. Започваме изложението с фамилията от функции $J_n^{\mu}(z)$, дефинирани с (4.1.1), с цели неположителни индекси $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\mu > 0$, т.е.

$$J_n^{\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(n + \mu k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ и } \mu > 0.$$

Разглеждаме редове по тези функции в комплексната равнина, т. е редове от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_n^{\mu}(z) \quad (\tilde{J}_n^{\mu}(z) = n! z^n J_n^{\mu}(z)), \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (9.2.1)$$

В по-нататъшното изложение използваме обичайните означения $D(0; \tilde{R})$ и $C(0; \tilde{R})$ за отворения кръг с център в началото и радиус $\tilde{R}$ и съответно за неговия контур, т.е.

$$D(0; \tilde{R}) = \{z : |z| < \tilde{R}, z \in \mathbb{C}\}, \quad C(0; \tilde{R}) = \partial D(0; \tilde{R}) = \{z : |z| = \tilde{R}, z \in \mathbb{C}\},$$

и $\tilde{D}(0; \tilde{R})$ за кръговата област

$$\tilde{D}(0; \tilde{R}) = \{z : |z| > \tilde{R}, z \in \mathbb{C}\}. \quad (9.2.2)$$

Нека $\tilde{\gamma} \subset \tilde{D}(0; 1)$ е дадена окръжност и нека областта G е от вида на изобразената на Фиг. 3.3.1, т.е. G е ограничена от окръжностите $\tilde{\gamma}$ и $C(0; 1)$ (с други думи казано, G е тяхната външност). Освен това, нека $R > 1$ и окръжността $C(0; R) \subset G$, т.е.

$$C(0; R) \subset G \subset \mathbb{C}, \quad \partial G = \tilde{\gamma} \cup C(0; 1), \quad R > 1. \quad (9.2.3)$$

Като означим

$$S_{k_n}(z) = \sum_{m=0}^{k_n} a_m \tilde{J}_m^{\mu}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.2.4)$$

и

$$I_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{S_{k_n}(z)}{z^{m+1}} dz, \quad (9.2.5)$$

можем да формулираме следния резултат.

Теорема 9.2.1. *Ако редът (9.2.1) има радиус на сходимост 1 и подредицата (9.2.4) от парциалните му суми е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$, то съществува положително число η , такова че са в сила следните неравенства:*

$$|S_{k_n}(z)| \leq (Re^{-\eta})^{k_n} \quad (9.2.6)$$

за $z \in C(0; R)$ и

$$|I_m| \leq \frac{(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m}, \quad \text{за } m \leq k_n. \quad (9.2.7)$$

Доказателство. Разглеждаме функцията

$$u_n(z) = \frac{1}{k_n} \log \left| \frac{S_{k_n}(z)}{z^{k_n}} \right| = \frac{1}{k_n} \log |S_{k_n}(z)| - \log |z|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.2.8)$$

която е субхармонична в множеството, разглеждано по-нататък.

Очевидно, съществува константа N_1 , такава че е изпълнено неравенството $u_n(z) < -q$ за $z \in \tilde{\gamma}$ и $n > N_1$, с q не зависещо нито от z , нито от n , и освен това $q > 0$.

Сега вземайки $\varepsilon > 0$, означаваме $\delta = e^{-\varepsilon/2}$, което очевидно изпълнява неравенството $\delta < 1$. Тъй като максимумът на модула $\left| \frac{S_{k_n}(z)}{z^{k_n}} \right|$ в затворената обвивка $[\tilde{D}(0; \delta)]$ на множеството $\tilde{D}(0; \delta)$ се достига върху окръжността $C(0; \delta)$, то означавайки

$$m_{\delta, n} = \max_{|z|=\delta} |S_{k_n}(z)|,$$

можем да запишем следното неравенство в множеството $|z| \geq \delta$:

$$u_n(z) \leq \frac{1}{k_n} \log m_{\delta, n} - \log \delta = \frac{1}{k_n} \log m_{\delta, n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

което остава в сила също така и върху $|z| \geq 1$. Тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \log m_{\delta, n} = 0$, съществува число N_2 , такава че за всички стойности на $n > N_2$, за $|z| > \delta$, а в частност също и за $|z| \geq 1$, е изпълнено неравенството $u_n(z) \leq \varepsilon$.

Заедно с двете окръжности $\tilde{\gamma}$ и $C(0; 1)$ разглеждаме и окръжността $C(0; R)$ (Фиг. 3.3.1) с радиус $R > 1$, лежаща в областта G , ограничена от кривите $\tilde{\gamma}$ и $C(0; 1)$. Нека сега $n > N = N(\varepsilon) = \max(N_1, N_2)$. Тогава можем да запишем

$$u_n(z) < -q \text{ за } z \in \tilde{\gamma} \quad \text{и} \quad u_n(z) \leq \varepsilon \text{ за } |z| = 1.$$

В резултат се получава следната оценка

$$u_n(z) \leq -\lambda_1 q + \lambda_2 \varepsilon \quad \text{за } z \in C(0; R) \text{ и } n > N,$$

с $\lambda_{1,2} > 0$ и $\lambda_{1,2}$ зависещи само от R (всъщност λ_1 е минимумът на хармоничната мярка на областта G спрямо окръжността $C(0; R)$ [22, Гл. VIII, §4, доказателството на Теорема 2]). Вземайки ε такава, че $-\lambda_1 q + \lambda_2 \varepsilon = -\eta < 0$ стигаме до извода, че $u_n(z) \leq -\eta$ за $n > N$ и $|z| = R$, което поражда оценката (9.2.6), т.е.

$$|S_{k_n}(z)| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}.$$

Сега използвайки последното неравенство за $|S_{k_n}(z)|$, получаваме следната оценка за модулите $|I_m|$ на интегралите (9.2.5)

$$|I_m| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^{m+1}} (Re^{-\eta})^{k_n} 2\pi R = \frac{(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m}, \quad \text{за } m \leq k_n,$$

което е второто от желаните неравенства. $\square$

Забележка 9.2.1. *Да отбележим, че не само парциалните суми $S_{k_n}(z)$ и съответстващите им интеграли I_m за първата от фамилията (9.1.1) удовлетворяват съответно неравенствата (9.2.6) и (9.2.7). Същите свойства са изпълнени и за втората от фамилията (9.1.1), а също и за (9.1.2), и тези резултати се доказват абсолютно аналогично на Теорема 9.2.1.*

За да формулираме съответното твърдение за всяка една от тези фамилии, първо нека да означим с

$$\tilde{J} = \left\{ \tilde{j}_n(z) \right\}_{n=0}^{\infty} \tag{9.2.9}$$

коя да е от фамилията (9.1.1) или (9.1.2), и нека редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{j}_n(z), \quad \tilde{j}_n \in \tilde{J} \tag{9.2.10}$$

е представен по елементите на тази фамилия. Нека освен това

$$S_{k_n}(z) = \sum_{m=0}^{k_n} a_m \tilde{j}_m(z), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{9.2.11}$$

и

$$I_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{S_{k_n}(z)}{z^{m+1}} dz. \quad (9.2.12)$$

Тогава, както е отбелязано в Забележка 9.2.1, е валидна формулираната по-долу теорема.

Теорема 9.2.2. *Ако редът (9.2.10) има радиус на сходимост 1 и под-редицата (9.2.11) от парциалните му суми е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$, то съществува положително число η , такова че са в сила следните неравенства:*

$$|S_{k_n}(z)| \leq (Re^{-\eta})^{k_n} \quad (9.2.13)$$

за $z \in C(0; R)$ и

$$|I_m| \leq \frac{(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m}, \quad \text{за } m \leq k_n, \quad (9.2.14)$$

където I_m са взведени с формулата (9.2.12) и участващата S_{k_n} в подинтегралната им функция е дадена с (9.2.11).

Да се върнем към реда (9.2.1), парциалната му сума (9.2.4) и интеграла I_m , даден с (9.2.5), от които се нуждаем за да оценим абсолютната стойност $|a_m|$ на коефициента a_m . За тази цел първо да припомним, че

$$I_m = \text{Res}_0 (S_{k_n}(z)/z^{m+1})$$

и след като извършим директно интегрирането в I_m за $m = 0, 1, \dots, k_n$, получаваме последователно

$$\begin{aligned} I_0 &= a_0, \quad I_1 = a_1 - a_0 \frac{\Gamma(1)}{1!\Gamma(\mu+1)}, \\ I_2 &= a_2 - a_1 \frac{\Gamma(2)}{1!\Gamma(\mu+2)} + a_0 \frac{\Gamma(1)}{2!\Gamma(2\mu+1)}, \\ I_3 &= a_3 - a_2 \frac{\Gamma(3)}{1!\Gamma(\mu+3)} + a_1 \frac{\Gamma(2)}{2!\Gamma(2\mu+2)} - a_0 \frac{\Gamma(1)}{3!\Gamma(3\mu+1)}, \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

и в общия случай, съответно:

$$\begin{aligned}
 I_m = & a_m - a_{m-1} \frac{\Gamma(m)}{1!\Gamma(\mu+m)} + a_{m-2} \frac{\Gamma(m-1)}{2!\Gamma(2\mu+m-1)} + \dots \\
 & + a_2 \frac{(-1)^{m-2}\Gamma(3)}{(m-2)!\Gamma((m-2)\mu+3)} + a_1 \frac{\Gamma(2)(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma((m-1)\mu+2)} \\
 & + a_0 \frac{(-1)^m\Gamma(1)}{m!\Gamma(m\mu+1)}.
 \end{aligned} \tag{9.2.16}$$

По-нататък, означавайки

$$\alpha_{s,m} = \frac{\Gamma(s+1)}{(m-s)!\Gamma((m-s)\mu+s+1)} \quad (0 \leq s \leq m), \tag{9.2.17}$$

зависимостта (9.2.16) приема вида

$$\begin{aligned}
 I_m = & a_m - a_{m-1} \alpha_{m-1,m} + a_{m-2} \alpha_{m-2,m} + \dots \\
 & + (-1)^{m-2} a_2 \alpha_{2,m} + (-1)^{m-1} a_1 \alpha_{1,m} + (-1)^m a_0 \alpha_{0,m}.
 \end{aligned} \tag{9.2.18}$$

В следващото помощно твърдение е формулирано едно простичко свойство, което изпълняват числата (9.2.17).

Лема 9.2.1. Ако $\mu \geq 1$ и $0 \leq s \leq m$, то са валидни следните неравенства

$$\Gamma((m-s)\mu+s+1) \geq \Gamma(m+1) = m!, \quad 0 < \alpha_{s,m} \leq \frac{s!}{(m-s)!m!}. \tag{9.2.19}$$

Доказателство. За $m = 0$ неравенствата са тривиално изпълнени. За $m \geq 1$ верността на (9.2.19) следва незабавно, като се отчете, че аргументът на Γ -функцията

$$(m-s)\mu+s+1 \geq m+1 \geq 2$$

както и, че Γ -функцията е растяща в този случай. $\square$

Вече сме готови да формулираме следващата теорема, в която са дадени горни оценки на абсолютните стойности $|a_m|$ на коефициентите a_m .

Теорема 9.2.3. Ако параметърът $\mu \geq 1$, редът (9.2.1) има радиус на сходимост 1, подредицата (9.2.4) на парциалните му суми е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$, и числото R от (9.2.3) има свойството $1 < R < \sqrt{2}$, то коефициентите a_m в (9.2.4) удовлетворяват неравенствата

$$|a_0| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad |a_1| \leq \frac{5}{2R} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad (9.2.20)$$

$$|a_2| \leq \frac{7}{2R^2} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad |a_3| \leq \frac{7}{2R^3} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad (9.2.21)$$

както и

$$|a_m| \leq \frac{3}{R^m} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad \text{за } 4 \leq m \leq k_n. \quad (9.2.22)$$

Доказателство. Използвайки (9.2.7), (9.2.15), и Лема 9.2.1, първата от оценките (9.2.20), която се отнася за $|a_0|$, автоматично следва, именно

$$|a_0| = |I_0| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}.$$

Респективно, за $|a_1|$ е изпълнено следното неравенство

$$|a_1| \leq |I_1| + |a_0| \leq \frac{1}{R} (Re^{-\eta})^{k_n} + (Re^{-\eta})^{k_n} \leq \frac{(1 + \sqrt{2})}{R} (Re^{-\eta})^{k_n},$$

откъдето (9.2.20) следва незабавно. Аналогично

$$\begin{aligned} |a_2| &\leq |I_2| + |a_1| \frac{\Gamma(2)}{1!\Gamma(3)} + |a_0| \frac{\Gamma(1)}{2!\Gamma(3)} = |I_2| + |a_1| \frac{1}{2!} + |a_0| \frac{1}{2!2!} \\ &\leq \left(\frac{1}{R^2} + \frac{5}{4R} + \frac{1}{4} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \leq \left(\frac{1}{R^2} + \frac{15}{8R^2} + \frac{1}{2R^2} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\ &= \frac{27}{8R^2} (Re^{-\eta})^{k_n} < \frac{7}{2R^2} (Re^{-\eta})^{k_n}, \end{aligned}$$

и също така

$$\begin{aligned} |a_3| &= |I_3| + |a_2| \frac{2!}{1!3!} + |a_1| \frac{1}{2!3!} + |a_0| \frac{1}{3!3!} \\ &\leq \left(\frac{1}{R^3} + \frac{4}{3R^2} + \frac{5}{3!4R} + \frac{1}{3!3!} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\ &\leq \left(\frac{1}{R^3} + \frac{2}{R^3} + \frac{5}{12R^3} + \frac{1}{12R^3} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} = \frac{7}{2R^3} (Re^{-\eta})^{k_n}, \end{aligned}$$

което потвърждава валидността на (9.2.21).

За доказателството на (9.2.22) използваме математическа индукция, и затова най-напред проверяваме валидността му за $m = 4$, именно:

$$\begin{aligned}
 |a_4| &\leq |I_4| + \frac{|a_3|}{4} + \frac{|a_2|}{4!} + \frac{|a_1|}{3!4!} + \frac{|a_0|}{4!4!} \\
 &\leq \left(\frac{1}{R^4} + \frac{7}{8R^3} + \frac{7}{4!2R^2} + \frac{5}{3!4!2R} + \frac{1}{4!4!} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\
 &\leq \left(\frac{1}{R^4} + \frac{21}{16R^4} + \frac{7}{24R^4} + \frac{5}{16R^4} + \frac{1}{144R^4} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\
 &\leq \left(\frac{2}{R^4} + \frac{11}{12R^4} + \frac{1}{144R^4} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} < \frac{3}{R^4} (Re^{-\eta})^{k_n},
 \end{aligned}$$

което потвърждава верността на (9.2.22) за $m = 4$.

Като предположим, че

$$|a_m| \leq \frac{3}{R^m} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad \text{за } 4 \leq m < k_n,$$

непосредствено може да се запише следната верига от неравенства

$$\begin{aligned}
 |a_{m+1}| &\leq |I_{m+1}| + \frac{|a_m|}{m+1} + \frac{|a_{m-1}|}{2!m(m+1)} + \frac{|a_{m-2}|}{3!(m-1)m(m+1)} + \dots \\
 &+ \frac{3!|a_3|}{(m-2)!(m+1)!} + \frac{2!|a_2|}{(m-1)!(m+1)!} + \frac{|a_1|}{m!(m+1)!} + \frac{|a_0|}{(m+1)!(m+1)!} \\
 &\leq \left(\frac{1}{R^{m+1}} + \frac{1}{R^{m+1}} + \underbrace{\frac{1}{(m+1)R^{m+1}} + \dots + \frac{1}{(m+1)R^{m+1}}}_m \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\
 &\leq \frac{3}{R^{m+1}} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad \text{за } 5 \leq m+1 \leq k_n.
 \end{aligned}$$

Ето защо, (9.2.22) следва по индукция. □

9.3 Обратна теорема за свръхсходимость за редове от Беселов тип

Аналогично на случая за степенните редове, прибавянето на ред от вида (9.2.1) с радиус на сходимост по-голям от единица към свръхсходящия ред (9.2.1) с радиус на сходимост 1, запазва свръхсходимостта. По-нататък е формулирано и доказано твърдение, което се отнася за реда (9.2.1), обратно на Теорема 9.1.1, а именно, че даден свръхсходящ ред от вида (9.2.1) с радиус на сходимост 1 може да се представи като сума на два реда – първият с радиус на сходимост по-голям от 1, а вторият с Адамарови празнини. По-точно, вярна е следната теорема.

Теорема 9.3.1. *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяващи условието $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1$, параметърът $\mu \geq 1$, $F(z)$ е сумата на реда (9.2.1) в единичния кръг $D(0; 1)$, т. е.*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{J}_n^{\mu}(z) \text{ за } z \in D(0; 1) \quad (\tilde{J}_n^{\mu}(z) = n! z^n J_n^{\mu}(z)),$$

и нека редът (9.2.1) е свръхсходящ. Тогава $F(z)$ може да се представи като сума от два реда във вида

$$F(z) = H(z) + G(z), \quad (9.3.1)$$

където редът $H(z)$ притежава Адамарови празнини, а редът $G(z)$ има радиус на сходимост по-голям от 1.

Доказателство. От свръхсходимостта на реда (9.2.1) следва, че съществува окръжност $\tilde{\gamma} \subset \tilde{D}(0; 1)$ и подредица $\{S_{k_n}(z)\}$ на редицата от неговите парциални суми, дефинирана с (9.2.4), която е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$. Избираме индексите k_n по такъв начин, че

$$k_{n+1} > \alpha_n k_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{с } \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 1). \quad (9.3.2)$$

Разглеждайки областта G , ограничена от двете криви $C(0; 1)$ и $\tilde{\gamma}$, ние разглеждаме също и окръжността $C(0; R)$ с радиус $R > 1$, лежаща в G (Фиг. 3.3.1). Без ограничение на общността може да се предполага, че разстоянието между кривите $C(0; 1)$ и $\tilde{\gamma}$ не надминава $\sqrt{2} - 1$. Това влече

неравенството $0 < R \leq \sqrt{2}$, защото последното е валидно за радиуса R на всяка окръжност $C(0; R) \subset G$.

В частност, означавайки $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 1$ и вземайки

$$1/\alpha < p' < 1, \quad p'k_n < m \leq k_n,$$

следва неравенството $R^{-m} < R^{-p'k_n}$, откъдето

$$|a_m| \leq 3 \left(\frac{Re^{-\eta}}{R^{p'}} \right)^{k_n}, \quad \text{за } p'k_n < m \leq k_n. \quad (9.3.3)$$

Избирайки p' толкова близко до 1, че $(Re^{-\eta}R^{-p'}) = \rho < 1$, неравенството (9.3.3) придобива вида

$$|a_m| \leq 3\rho^{k_n} \leq 3\rho^m \quad (\rho < 1), \quad \text{за } p'k_n < m \leq k_n. \quad (9.3.4)$$

По-нататък, означавайки $p_n = [p'k_n]$ (където $[p'k_n]$ означава цялата част на $p'k_n$), разглеждаме групирания ред

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{J}_{p_n+1, k_n}(z), \quad \tilde{J}_{p_n+1, k_n}(z) = a_{p_n+1} \tilde{J}_{p_n+1}^{\mu}(z) + \cdots + a_{k_n} \tilde{J}_{k_n}^{\mu}(z). \quad (9.3.5)$$

От условията (9.3.2) и $1/\alpha < p' < 1$ произтича следното неравенство, свързано с индексите в $\tilde{J}_{p_n+1, k_n}$:

$$p_n + 1 \leq k_n < \frac{1}{\alpha} k_{n+1} < p'k_{n+1} < [p'k_{n+1}] + 1 = p_{n+1} + 1. \quad (9.3.6)$$

От една страна, най-големият индекс в събираемост $\tilde{J}_{p_n+1, k_n}(z)$ е k_n , а от друга страна, най-малкият индекс в следващото събираемо $\tilde{J}_{p_{n+1}+1, k_{n+1}}(z)$ е $p_{n+1} + 1$. Тогава индексите на индивидуалните функции в различните членове на (9.3.5) не се застъпват. Следователно, развитието (9.3.5) може да бъде разглеждано като представяне по функциите $\tilde{J}_m^{\mu}(z)$ с индекси

$$m \in \{p_n + 1, \dots, k_n\}_{n=1}^{\infty}$$

(съгласно току-що направения коментар, без застъпване на индексите). Най-после, неравенството (9.3.4) показва, че редът от функции (9.3.5), раз-

глеждан като ред по функциите на Бесел–Мейтланд $\tilde{J}_m^\mu(z)$, е сходящ в кръг $D(0; 1/\rho)$ с радиус $1/\rho > 1$.

Допълнителният ред

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m \tilde{J}_m^\mu(z), \quad \tilde{a}_m = \begin{cases} 0 & \text{за } m \in \{p_n + 1, \dots, k_n\}_{n=1}^{\infty}, \\ a_m & \text{иначе,} \end{cases} \quad (9.3.7)$$

очевидно е с празнини. Преди да приведем доказателството, че това са Адамарови празнини, да отбележим, че

$$\tilde{a}_m = 0 \text{ за } p_n < m < k_n + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

и да разгледаме (9.3.7). Тогава, означавайки

$$\alpha_0 = \frac{1}{p'} > 1 \text{ и } q_n = k_n + 1$$

и вземайки под внимание, че $p_n = [p'k_n] \leq p'k_n$, заключаваме, че

$$\alpha_0 p_n = \alpha_0 [p'k_n] \leq \alpha_0 p'k_n = k_n < k_n + 1 = q_n, \quad (9.3.8)$$

и също така, че

$$\tilde{a}_m = 0 \text{ за } p_n < m < q_n.$$

Сега от (9.3.8) следва, че

$$\alpha_0 p_n < q_n \quad \text{с} \quad \alpha_0 > 1,$$

което означава, че редът (9.3.7) е с Адамарови празнини. $\square$

В заключение, да отбележим, че частният случай $\mu = 1$ води до аналогични резултати за редове по функциите на Бесел–Клифорд $C_n(z)$, дадени с (1.5.7), по конкретно за редовете

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{C}_n(z) \quad (\tilde{C}_n(z) = n! z^n C_n(z)), \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (9.3.9)$$

които са тясно свързани с резултатите, получени в [101].

9.4 Сврѣхсходимость на редове от Митаг-Лефлеров тип

Нека отново да разгледаме фамилиите от функции от Митаг-Лефлеров тип, дефинирани с (8.3.1), т.е. фамилиите

$$\left\{ \tilde{E}_n(z) \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \left\{ \tilde{E}_{\alpha,n}^{\gamma}(z) \right\}_{n=0}^{\infty}; \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (9.4.1)$$

респективно мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (8.5.1)

$$\left\{ \tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}^{(m)}(z) \right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \mu_i \in \mathbb{C}, \alpha_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, m). \quad (9.4.2)$$

В тази секция разглеждаме редове по изброените по-горе функции на Митаг-Лефлер и техните обобщения от видовете (8.3.2), (8.3.3) и (8.5.4) в комплексната равнина. По-конкретно, разглеждаме редовете:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_n(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{\alpha,n}^{\gamma}(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{(\alpha_i), (\mu_{i_0}(n))}^{(m)}(z), \quad (9.4.3)$$

с комплексни коефициенти, при предположение, че имат Адамарови празнини, и изучаваме тяхната сврѣхсходимость (в смисъла на Забележка 3.2.1).

Отново само формулираме резултатите, започвайки с теоремата за сврѣхсходимость. Доказателствата се извършват напълно аналогично на онези в Секция 3.2, и затова те са пропуснати.

Теорема 9.4.1 (за сврѣхсходимость [99]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяващи условието $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1$, $\tilde{f}(z)$ е сумата на кой да е от редовете (9.4.3) в единичния кръг $D(0; 1)$, $\tilde{f}(z)$ има поне една регулярна точка, лежаща на окръжността $C(0; 1)$, и нека $\tilde{f}(z)$ притежава Адамарови празнини. Тогава съответният ред (9.4.3) е сврѣхсходящ.*

Теорема 9.4.2 (от Адамаров тип за празнините [99]). *Нека $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяващи условието*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_{k_n}|)^{1/k_n} = 1 \quad \text{за} \quad k_{n+1} \geq (1 + \theta)k_n \ (\theta > 0),$$

$a_k = 0$ за $k_n < k < k_{n+1}$ и $\tilde{f}(z)$ е сумата на кой да е от редовете (9.4.3) в единичния кръг $D(0; 1)$. Тогава всички точки на единичната окръжност $S(0; 1)$ са сингулярни за функцията $\tilde{f}$, т.е. единичната окръжност е естествена граница на аналитичност за съответния ред (9.4.3).

В заключение на тази секция да отбележим, че резултатите от Секция 9.1, засягащи третия от редовете (9.1.3) могат да се получат и като следствия от съответните резултати, отнасящи се до третия от редовете (9.4.3).

9.5 Парциални суми и интеграли за редове от Митаг-Лефлеров тип: Полезни оценки

Преди да преминем към оценките на парциалните суми за свръхсходящи редове от вида (9.4.3), първо да въведем няколко означения. И така, нека за удобство да означим с

$$\tilde{J} = \left\{ \tilde{j}_n(z) \right\}_{n=0}^{\infty} \quad (9.5.1)$$

коя да е от фамилиите (9.4.1) или (9.4.2), и нека редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{j}_n(z), \quad \tilde{j}_n \in \tilde{J} \quad (9.5.2)$$

е представен по елементите на тази фамилия. Нека освен това

$$S_{k_n}(z) = \sum_{m=0}^{k_n} a_m \tilde{j}_m(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.5.3)$$

и

$$I_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{S_{k_n}(z)}{z^{m+1}} dz. \quad (9.5.4)$$

Тогава, е валидна формулираната по-долу теорема, която се доказва абсолютно аналогично на Теорема 9.2.1, и затова нейното доказателство е пропуснато в изложението.

Теорема 9.5.1. [100, 102] *Ако редът (9.5.2) има радиус на сходимост 1 и подредицата (9.5.3) от парциалните му суми е равномерно сходяща*

върху кривата $\tilde{\gamma}$, то съществува положително число η , такова че са в сила следните неравенства:

$$|S_{k_n}(z)| \leq (Re^{-\eta})^{k_n} \quad (9.5.5)$$

за $z \in C(0; R)$ и

$$|I_m| \leq \frac{(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m}, \quad \text{за } m \leq k_n, \quad (9.5.6)$$

където I_m са въведени с формулата (9.5.4) и участващата S_{k_n} в подинтегралната им функция е дадена с (9.5.3).

Да разгледаме реда (9.5.2), парциалната му сума (9.5.3) и интеграла I_m , даден (9.5.4), от които се нуждаем за да оценим абсолютната стойност $|a_m|$ на коефициента a_m , и да припомним, че съгласно теоремата за резидуумите

$$I_m = \text{Res}_0 (S_{k_n}(z)/z^{m+1}). \quad (9.5.7)$$

В по-нататъшното изложение в тази и следващата секция спираме вниманието си на първите два от редовете (9.4.3), започвайки с първия от тях, т.е. с реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_n(z) \quad (\text{т. е. } \tilde{j}_n = \tilde{E}_n). \quad (9.5.8)$$

След като извършим директно интегрирането в съответния интеграл I_m за $m = 0, 1, \dots, k_n$, получаваме последователно

$$I_0 = a_0, \quad I_1 = a_1, \quad I_2 = a_2 + a_1, \quad I_3 = a_3 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_1}{2!}, \quad (9.5.9)$$

$$I_4 = a_4 + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_2}{4!} + \frac{a_1}{3!}, \quad I_5 = a_5 + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_3}{6!} + \frac{a_2}{6!} + \frac{a_1}{4!},$$

и в общия случай съответно

$$I_m = a_m + \frac{a_{m-1}}{(m-1)!} + \frac{a_{m-2}}{[2(m-2)]!} + \frac{a_{m-3}}{[3(m-3)]!} + \dots \quad (9.5.10)$$

$$+ \frac{a_3}{[3(m-3)]!} + \frac{a_2}{[2(m-2)]!} + \frac{a_1}{(m-1)!}$$

В следващата теорема са дадени горни оценки на абсолютните стойности $|a_m|$ на коефициентите a_m .

Теорема 9.5.2. [100] *Ако редът (9.5.8) има радиус на сходимост 1, подредицата (9.5.3) на парциалните му суми е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$, и числото R от (9.2.3) има свойството $1 < R < \sqrt{2}$, то коефициентите a_m в (9.5.3) удовлетворяват неравенствата*

$$\begin{aligned} |a_0| &\leq (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad |a_1| \leq \frac{(Re^{-\eta})^{k_n}}{R}; \\ |a_m| &\leq \frac{(m-1)(R+1)(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m}, \quad \text{за } m \geq 2, \end{aligned} \quad (9.5.11)$$

Доказателство. Използвайки (9.5.6) и (9.5.9), първите две от оценките (9.5.11), които се отнасят за $|a_0|$ и $|a_1|$ автоматично следват, именно

$$|a_0| = |I_0| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad |a_1| = |I_1| \leq \frac{(Re^{-\eta})^{k_n}}{R}.$$

Респективно, за $|a_2|$ е изпълнено следното неравенство

$$|a_2| \leq |I_2| + |a_1| \leq \frac{1}{R^2} (Re^{-\eta})^{k_n} + \frac{1}{R} (Re^{-\eta})^{k_n} = \frac{(1+R)(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^2},$$

и аналогично

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq |I_3| + \frac{|a_2|}{2!} + \frac{|a_1|}{2!} \\ &\leq \left(\frac{1}{R^3} + \frac{1+R}{2R^2} + \frac{1}{2R} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\ &< \left(\frac{1}{R^3} + \frac{1+R}{R^3} + \frac{1}{R^3} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} < \frac{2(1+R)}{R^3} (Re^{-\eta})^{k_n}, \end{aligned}$$

откъдето (9.5.11) следва и за $m = 2$ и $m = 3$. По-нататък, за доказателството на (9.5.11) за произволна стойност на m използваме индукция, поради което предполагаме, че е изпълнено неравенството

$$|a_m| \leq \frac{(m-1)(R+1)(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m}, \quad \text{за } 2 \leq m < k_n,$$

след което непосредствено може да се запише следната верига от неравенства

$$\begin{aligned}
 |a_{m+1}| &\leq |I_{m+1}| + \frac{|a_m|}{m!} + \frac{|a_{m-1}|}{[2(m-1)]!} + \frac{|a_{m-2}|}{[3(m-2)]!} + \dots \\
 &+ \frac{|a_3|}{[3(m-2)]!} + \frac{|a_2|}{[2(m-1)]!} + \frac{|a_1|}{m!} \leq \left(\frac{1}{R^{m+1}} + \frac{1}{m!R} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\
 &+ \left(\frac{(m-1)}{m!R^m} + \frac{(m-2)}{[2(m-1)]!R^{m-1}} + \dots + \frac{1}{[2(m-1)]!R^2} \right) (R+1) (Re^{-\eta})^{k_n}.
 \end{aligned} \tag{9.5.12}$$

Тогава, означавайки

$$\alpha_{s,n} = \frac{sR^{m+1-(s+1)}}{[(s+1)(m-s)]!}, \quad \text{за } s = 1, 2, \dots, (m-1) \quad \text{и} \quad \alpha_{0,n} = \frac{R^{m-1}}{m!},$$

и отчитайки, че

$$\alpha_{s,n} \leq 1 \quad \text{за } s = 0, 1, 2, \dots, (m-1),$$

(9.5.12) се преобразува последователно както следва

$$\begin{aligned}
 |a_{m+1}| &\leq \frac{R+1}{R^{m+1}} (Re^{-\eta})^{k_n} + \frac{m-1}{R^{m+1}} (R+1) (Re^{-\eta})^{k_n}, \\
 |a_{m+1}| &\leq \frac{m(R+1) (Re^{-\eta})^{k_n}}{R^{m+1}},
 \end{aligned}$$

което показва, че исканото неравенство е изпълнено и за $m+1$, откъдето по индукция следва, че е изпълнено за всяко $2 \leq m \leq k_n$. $\square$

Преди да преминем към тримерния случай, привеждаме едно допълнително неравенство за символа на Поххамер, което се използва по-нататък.

Лема 9.5.1. [103] *Нека $R \leq 2$, тогава са в сила следните неравенства*

$$(m)_{k+1} \geq (m+1)R^k \quad \text{и} \quad (m)_{m+1} \geq 4R^m, \tag{9.5.13}$$

за $k = 2, \dots, m-1$ и $m = 2, 3, \dots$.

Доказателство. Първото от неравенствата е тривиално изпълнено и затова неговото доказателство е пропуснато. За $m = 2$ проверката на второто от неравенствата е елементарна, именно $(2)_3 = 2.3.4 \geq 4R^2$. По-нататък, предполагайки, че $(m)_{m+1} \geq 4R^m$, незабавно може да се запише следната верига от неравенства:

$$(m+1)_{m+2} = (m+1)_{m+1}(2m+2) \geq 4R^m(2m+2) \geq 4R^{m+1}, \quad (9.5.14)$$

откъдето, по индукция, второто от неравенствата (9.5.13) е изпълнено за всички стойности на $m = 2, 3, \dots$. $\square$

Нека сега да се занимаем с 3-параметричния случай при ограничения за параметрите $\alpha > 0$ и $-1 \leq \gamma \leq 1$, т. е. нека да разгледаме реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{\alpha,n}^{\gamma}(z) \quad (\alpha > 0, -1 \leq \gamma \leq 1). \quad (9.5.15)$$

Започвайки със случая $\gamma = -1$, ние извършваме директно делението в съответното (9.5.4) за $m = 0, 1, \dots, k_n$. Имайки предвид, че коефициентът на $1/z$ в израза (9.5.4) е равен на съответния резидуум, получаваме последователно

$$\begin{aligned} I_0 &= a_0, & I_1 &= a_1, & I_2 &= a_2 - a_1 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ I_3 &= a_3 - a_2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}, & I_4 &= a_4 - a_3 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\alpha+3)}, \\ &\dots & \dots & \dots \end{aligned} \quad (9.5.16)$$

Изобщо,

$$I_m = a_m - a_{m-1} \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(\alpha+m-1)}, \quad \text{за } m \geq 2. \quad (9.5.17)$$

Сега можем да формулираме следния резултат за оценките на модулите на коефициентите в (9.5.3), при допълнителното условие $\alpha \geq 2$, използвано в доказателството на (1.4.1), (1.4.2) и (1.4.11).

Теорема 9.5.3. [103] *Ако параметърът $\alpha \geq 2$, $\gamma = -1$, редът (9.5.15) има радиус на сходимост 1, подредицата от парциалните му суми (9.5.3)*

е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$, и числото R от (9.2.3) има свойството $1 < R < \sqrt{2}$, то коефициентите a_m в (9.5.3) удовлетворяват неравенствата

$$|a_0| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad |a_1| \leq \frac{1}{R} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad (9.5.18)$$

и съответно

$$|a_m| \leq \frac{2}{R^m} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad \text{за } 2 \leq m \leq k_n. \quad (9.5.19)$$

Доказателство. Използвайки (9.5.6) и (9.5.16), оценките (9.5.18)

$$|a_0| = |I_0| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad |a_1| = |I_1| \leq \frac{1}{R} (Re^{-\eta})^{k_n},$$

следват автоматично. За да докажем (9.5.19), ние първо проверяваме валидността му за $m = 2$, където поради (1.4.2) имаме

$$|a_2| \leq |I_2| + |a_1| \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \leq \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{2R} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \leq \frac{2}{R^2} (Re^{-\eta})^{k_n}.$$

Предполагайки след това, че

$$|a_m| \leq \frac{2}{R^m} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad \text{за } m < k_n,$$

незабавно може да се запише следното неравенство:

$$\begin{aligned} |a_{m+1}| &\leq |I_{m+1}| + |a_m| \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha + m)} \leq \left(\frac{1}{R^{m+1}} + \frac{1}{m(m+1)} \frac{2}{R^m} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\ &\leq \frac{2}{R^{m+1}} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad \text{за } m+1 \leq k_n. \end{aligned}$$

Ето защо, (9.5.19) следва по индукция. $\square$

Другият случай, когато $\alpha > 0$ и $\gamma \neq -1$ (изключвайки $\gamma = 0$, който е тривиален случай), е по-сложен. Сега, вземайки $-1 < \gamma \leq 1$ и $\gamma \neq 0$, ние разглеждаме този случай. Отново извършвайки директно делението в

(9.5.4) и изразявайки резидуумите, съответните интеграли могат да бъдат пресметнати. Именно, могат да се получат следните вериги от релации:

$$I_0 = a_0, \quad I_1 = a_1 + a_0 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \frac{(\gamma+1)_1}{2!}, \quad (9.5.20)$$

$$I_2 = a_2 + a_1 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(\gamma)_1}{1!} + a_0 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\alpha)} \frac{(\gamma+1)_2}{3!},$$

и, изобщо за $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} I_m = & a_m + a_{m-1} \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(\alpha+m-1)} \frac{(\gamma)_1}{1!} + a_{m-2} \frac{\Gamma(m-2)}{\Gamma(2\alpha+m-2)} \frac{(\gamma)_2}{2!} \\ & + \cdots + a_2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma((m-2)\alpha+2)} \frac{(\gamma)_{m-2}}{(m-2)!} \\ & + a_1 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma((m-1)\alpha+1)} \frac{(\gamma)_{m-1}}{(m-1)!} + a_0 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma((m+1)\alpha)} \frac{(\gamma+1)_m}{(m+1)!}. \end{aligned} \quad (9.5.21)$$

По-нататък са намерени горни оценки за за модулите $|a_m|$ на коефициентите a_m и получените резултати са дадени със следната теорема.

Теорема 9.5.4. [103] *Ако параметърът $\alpha \geq 2$, $-1 < \gamma \leq 1$ и $\gamma \neq 0$, редът (9.5.15) има радиус на сходимост 1, подредицата на парциалните му суми (9.5.3) е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$, и числото R от (9.2.3) има свойството $1 < R < \sqrt{2}$, то коефициентите a_m в (9.5.3) удовлетворяват неравенствата*

$$|a_0| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad |a_1| \leq \frac{4}{3R} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad (9.5.22)$$

и

$$|a_m| \leq \frac{m+1}{R^m} (Re^{-\eta})^{k_n}, \quad \text{за } 2 \leq m \leq k_n. \quad (9.5.23)$$

Доказателство. Едновременно прилагане на (9.5.20) и (9.5.6) води до неравенствата (9.5.22), именно,

$$|a_0| = |I_0| \leq (Re^{-\eta})^{k_n}$$

и съответно, съгласно (1.4.1):

$$\begin{aligned} |a_1| &\leq |I_1| + |a_0| \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \left| \frac{(\gamma+1)_1}{2!} \right| \leq \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3!} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\ &\leq \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3R} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \leq \frac{4}{3R} (Re^{-\eta})^{k_n}. \end{aligned}$$

Аналогично, веригата

$$\begin{aligned} |a_2| &\leq |I_2| + |a_1| \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \left| \frac{(\gamma)_1}{1!} \right| + |a_0| \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(3\alpha)} \left| \frac{(\gamma+1)_2}{3!} \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{R^2} + \frac{2}{3R} + \frac{1}{4!} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \\ &\leq \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{4!} \right) (Re^{-\eta})^{k_n} \leq \frac{3}{R^2} (Re^{-\eta})^{k_n}, \end{aligned}$$

потвърждава верността на (9.5.23) за $m = 2$. Сега предполагайки, че

$$|a_s| \leq \frac{(s+1)(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^s}, \quad \text{за } s = 2, \dots, m \text{ и } m < k_n,$$

и прилагайки неравенството (9.5.6) и заедно с него (9.5.22), както и (1.4.1), (1.4.2), (1.4.11), (9.5.13), получаваме

$$\begin{aligned} |a_{m+1}| &\leq |I_{m+1}| + |a_m| \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(\alpha+m)} + |a_{m-1}| \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(2\alpha+m-1)} \\ &\quad + \dots + |a_1| \frac{\Gamma(1)}{\Gamma((m-1)\alpha+1)} + |a_0| \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma((m+1)\alpha)} \\ &\leq \frac{(m+2)(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^{m+1}}, \end{aligned} \tag{9.5.24}$$

което установява верността на (9.5.23), по индукция. $\square$

9.6 Обратна теорема за свръхсходимость за редове от Митаг-Лефлеров тип

В предната секция направихме горни оценки за модулите в парциалните суми $\{S_{k_n}(z)\}$ на редовете (9.5.8) и (9.5.15). В тази секция са предложени твърдения, обратни на Теорема 9.4.1, касаещи тези редове, а именно, че свръхсходящ ред с радиус на сходимост 1 (от който да е от тези два вида) може да се представи като сума от два реда – първият с радиус на сходимост по-голям от единица, а вторият – с Адамарови празнини. Започвайки с еднопараметричните функции, формулираме първата от тези теореми.

Теорема 9.6.1 (за свръхсходимость [100]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условието $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1$, $F(z)$ е сумата на реда (9.5.8) в единичния кръг $D(0; 1)$, и нека този ред е свръхсходящ. Тогава $F(z)$ може да се представи като сума на два реда по същия вид функции както следва*

$$F(z) = H(z) + G(z), \quad (9.6.1)$$

където редът $H(z)$ притежава Адамарови празнини, а $G(z)$ има радиус на сходимост по-голям от 1.

Доказателство. От свръхсходимостта на реда (9.5.8) следва, че съществува окръжност $\tilde{\gamma} \subset \tilde{D}(0; 1)$ и подредица

$$S_{k_n}(z) = \sum_{m=0}^{k_n} a_m \tilde{E}_m(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.6.2)$$

на парциалните му суми, такава че $\{S_{k_n}(z)\}$ е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$. При това, ние можем да предполагаеме, че

$$k_{n+1} > \alpha_n k_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha > 1). \quad (9.6.3)$$

Съгласно Теорема 9.5.1 и 9.5.2, съществува положително число η , такава че са в сила следните неравенства:

$$|a_m| \leq \frac{(m-1)(R+1)(Re^{-\eta})^{k_n}}{R^m} \quad \text{за } m \geq 2. \quad (9.6.4)$$

В частност, вземайки p' такава, че да са изпълнени неравенствата

$$1/\alpha < p' < 1, \quad p'k_n < m \leq k_n,$$

веднага следва неравенството $R^{-m} < R^{-p'k_n}$, откъдето

$$(Re^{-\eta})^{k_n} R^{-m} \leq (Re^{-\eta})^{k_n} R^{-p'k_n} = \left(Re^{-\eta} R^{-p'} \right)^{k_n}.$$

Това означава, че

$$|a_m| \leq (m-1)(R+1) \left(\frac{Re^{-\eta}}{R^{p'}} \right)^{k_n}, \quad \text{за } p'k_n < m \leq k_n. \quad (9.6.5)$$

Избирайки p' толкова близко до 1, че $(Re^{-\eta} R^{-p'}) = \rho < 1$, неравенството (9.6.5) приема вида

$$|a_m| \leq (m-1)(R+1)\rho^{k_n} < (m-1)(R+1)\rho^m \quad (\rho < 1), \quad (9.6.6)$$

за $p'k_n < m \leq k_n$.

По-нататък, означавайки $p_n = [p'k_n]$ (където $[p'k_n]$ означава цялата част на $p'k_n$), разглеждаме групирания ред

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_{p_n+1, k_n}(z), \quad \tilde{E}_{p_n+1, k_n}(z) = a_{p_n+1} \tilde{E}_{p_n+1}(z) + \cdots + a_{k_n} \tilde{E}_{k_n}(z). \quad (9.6.7)$$

Отчитайки условието (9.6.3) и също, че $1/\alpha < p' < 1$, може да се получи следното неравенство за индексите в $\tilde{E}_{p_n+1, k_n}$:

$$p_n + 1 \leq k_n < \frac{1}{\alpha} k_{n+1} < p'k_{n+1} < [p'k_{n+1}] + 1 = p_{n+1} + 1. \quad (9.6.8)$$

От една страна, най-големият индекс в събираемото $\tilde{E}_{p_n+1, k_n}(z)$ е k_n , а от друга страна, най-малкият индекс в следващото събираемо е $p_{n+1} + 1$. Следователно, индивидуалните функции в различните членове на (9.6.7) не се застъпват. Така че, развитието на всички членове на (9.6.7) може да бъде разглеждано като по функциите $\tilde{E}_m(z)$ с индекси $m \in \{p_n + 1, \dots, k_n\}_{n=1}^{\infty}$. Най-сетне, неравенството (9.6.6) показва, че редът (9.6.7) разглеждан като ред по Митаг-Лефлеровите функции $\tilde{E}_m(z)$, е сходящ в кръга $D(0; 1/\rho)$ с радиус $1/\rho > 1$.

Допълнителният ред

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m \tilde{E}_m(z), \quad \tilde{a}_m = \begin{cases} 0 & \text{за } m \in \{p_n + 1, \dots, k_n\}_{n=1}^{\infty}, \\ a_m & \text{иначе,} \end{cases} \quad (9.6.9)$$

очевидно е с празнини. За да довършим доказателството, първо да отбележим, че $\tilde{a}_m = 0$ за $p_n < m < k_n + 1$, $n = 1, 2, \dots$ и да разгледаме (9.6.9). Означавайки $\alpha_0 = \frac{1}{p'} > 1$ и $q_n = k_n + 1$ и отчитайки, че $p_n = [p'k_n] \leq p'k_n$, получаваме, че

$$\alpha_0 p_n = \alpha_0 [p'k_n] \leq \alpha_0 p'k_n = k_n < k_n + 1 = q_n \quad \text{и} \quad \tilde{a}_m = 0 \text{ за } p_n < m < q_n.$$

Следователно $\alpha_0 p_n < q_n$ с $\alpha_0 > 1$, което означава, че редът (9.6.9) има Адамарови празнини. $\square$

Теорема 9.6.2 (за свръхсходимост [103]). *Нека параметърът $\alpha \geq 2$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условието*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n} = 1,$$

$F(z)$ е сумата на реда (9.5.15) в единичния кръг $D(0; 1)$, и нека този ред е свръхсходящ. Тогава $F(z)$ може да се представи като сума на два реда по същия вид функции както следва

$$F(z) = H(z) + G(z), \quad (9.6.10)$$

където редът $H(z)$ притежава Адамарови празнини, а $G(z)$ има радиус на сходимост по-голям от 1.

Доказателство. В голяма степен доказателството следва това на Теорема 9.6.1. От свръхсходимостта на реда (9.5.15) следва, че съществува окръжност $\tilde{\gamma} \subset \tilde{D}(0; 1)$ и подредица

$$S_{k_n}(z) = \sum_{m=0}^{k_n} a_m \tilde{E}_{\alpha, m}^{\gamma}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.6.11)$$

на парциалните му суми, такава че $\{S_{k_n}(z)\}$ е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$, при което можем да предполагаме, че

$$k_{n+1} > \alpha_n k_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \tilde{\alpha} > 1). \quad (9.6.12)$$

Доказателството продължава, като за параметъра γ са разгледани поотделно три различни случая.

- i. Когато $\gamma = 0$ случаят е тривиален (даже за $\alpha > 0$), защото редът (9.5.15) се редуцира до степенен ред, което е просто класическия случай.
- ii. Когато $\gamma = -1$, доказателството основно се базира на Теорема 9.5.3. От свръхсходимостта на реда (9.5.15) следва, че съществува окръжност $\tilde{\gamma} \subset \tilde{D}(0; 1)$ и подредица $\{S_{k_n}(z)\}$, дефинирана с (9.6.11), която е равномерно сходяща върху кривата $\tilde{\gamma}$. Разглеждайки областта G , ограничена от двете криви $C(0; 1)$ и $\tilde{\gamma}$, ние разглеждаме също и окръжността $C(0; R)$ с радиус $R > 1$, лежаща в G (Фигура 3.3.1). Без ограничение на общността, можем да предполагаме, че разстоянието между кривите $C(0; 1)$ и $\tilde{\gamma}$ е по-малко или равно на $\sqrt{2} - 1$. Това води до $0 < R \leq \sqrt{2}$, защото такова неравенство е вярно за радиуса R на всяка една окръжност $C(0; R) \subset G$.

В частност, вземайки $1/\tilde{\alpha} < p' < 1$, $p'k_n < m \leq k_n$, следва неравенството $R^{-m} < R^{-p'k_n}$, откъдето се получава, че

$$(Re^{-\eta})^{k_n} R^{-m} \leq (Re^{-\eta})^{k_n} R^{-p'k_n} = \left(Re^{-\eta} R^{-p'} \right)^{k_n}.$$

Съгласно Теорема 9.5.1, 9.5.2 и 9.5.3 съществува положително число η , такова че са в сила следните неравенства:

$$|a_m| \leq 2 \left(\frac{Re^{-\eta}}{R^{p'}} \right)^{k_n}, \quad \text{за } p'k_n < m \leq k_n. \quad (9.6.13)$$

Избираме p' толкова близко до 1, че $(Re^{-\eta} R^{-p'}) = \rho < 1$, при което (9.6.13) приема вида

$$|a_m| \leq 2\rho^{k_n} \leq 2\rho^m \quad (\rho < 1), \quad \text{за } p'k_n < m \leq k_n. \quad (9.6.14)$$

По-нататък, означавайки $p_n = [p'k_n]$ (тук $[p'k_n]$ отново е цялата част на $p'k_n$), разглеждаме групирания ред

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_{\alpha; p_n+1, k_n}(z), \quad (9.6.15)$$

с $\tilde{E}_{\alpha; p_n+1, k_n}$ както следва

$$\tilde{E}_{\alpha; p_n+1, k_n}(z) = a_{p_n+1} \tilde{E}_{\alpha; p_n+1}^{\gamma}(z) + \cdots + a_{k_n} \tilde{E}_{\alpha; k_n}^{\gamma}(z).$$

Вземайки под внимание условието (9.6.12) и също, че $1/\tilde{\alpha} < p' < 1$, получаваме следното неравенство за индексите в $\tilde{E}_{\alpha; p_n+1, k_n}$:

$$p_n + 1 \leq k_n < \frac{1}{\tilde{\alpha}} k_{n+1} < p' k_{n+1} < [p' k_{n+1}] + 1 = p_{n+1} + 1. \quad (9.6.16)$$

Аналогично на доказателството на Теорема 9.6.1 следва, че развитието на всички членове на (9.6.15) може да се разглежда като по функциите $\tilde{E}_{\alpha, m}^{\gamma}(z)$ с индекси $m \in \{p_n + 1, \dots, k_n\}_{n=1}^{\infty}$, а редът (9.6.15) е без застъпване на индексите. Накрая, неравенството (9.6.14) показва, че редът (9.6.15) (като ред по функциите $\tilde{E}_{\alpha, m}^{\gamma}(z)$) е сходящ в кръга $D(0; 1/\rho)$ с $1/\rho > 1$, т. е. радиусът на сходимост на (9.6.15) е по-голям от 1.

Допълнителният ред

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m \tilde{E}_{\alpha, m}^{\gamma}(z), \quad \tilde{a}_m = \begin{cases} 0 & \text{за } m \in \{p_n + 1, \dots, k_n\}_{n=1}^{\infty}, \\ a_m & \text{иначе,} \end{cases} \quad (9.6.17)$$

очевидно е с Адамарови празнини, което следва точно както в доказателството на Теорема 9.6.1.

iii. Когато $-1 < \gamma \leq 1$ и $\gamma \neq 0$, доказателството протича аналогично, но използва Теорема 9.5.4 вместо Теорема 9.5.3. Разликата е само в (9.6.13) и (9.6.14), които са заменени съответно с

$$|a_m| \leq (m+1) \left(\frac{Re^{-\eta}}{R^{p'}} \right)^{k_n}, \quad \text{и} \quad |a_m| \leq (m+1)\rho^m \quad (\rho < 1) \quad (9.6.18)$$

за $p'k_n < m \leq k_n$. □

В заключение да отбележим, че ако $\gamma = 1$, то функциите $E_{\alpha, m}^{\gamma}$ се редуцират до функциите $E_{\alpha, n}$. Следователно може да се запише следната забележка.

Забележка 9.6.1. В частност, получените тук резултати за редовете (9.5.15) са в сила и за редове от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{\alpha, n}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{E}_{\alpha, n}^1(z), \quad (9.6.19)$$

по функциите на Митаг-Лефлер $\tilde{E}_{\alpha, n}$ с два индекса.

Заклучителни бележки

Както вече беше подчертано, функциите на Бесел дължат своя произход на конкретни задачи от механиката и астрономията, докато функцията на Митаг-Лефлер се появява при изследвания от чисто теоретичен характер и дълго остава почти непозната за по-голямата част от учените. Най-вероятно за първи път интерес към тази функция е проявен от Хил и Тамаркин [31] поради използването ѝ за представянето на решението на интегралното уравнение на Абел от втори род

$$u(t) + \frac{a}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t - \tau)^{\lambda-1} u(\tau) d\tau = f(t), \lambda > 0,$$

в което a е реален или комплексен параметър, а функцията $f(t)$ е дадена. Въпросното решение се записва както следва [64]:

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t E_{\lambda,1}(-a\tau^\lambda) f(t - \tau) d\tau,$$

като се изразява чрез функцията на Митаг-Лефлер $E_\lambda(-at^\lambda)$. Тук е мястото да отбележим, че разглежданото уравнение може да се представи чрез интеграла на Риман–Лиувил R^λ във вида:

$$u(t) + aR^\lambda u(t) = f(t), \lambda > 0,$$

което показва, че то е интегрално уравнение от дробен ред λ . Поради тази причина функцията на Митаг-Лефлер се числи към специалните функции на дробното смятане.

В дисертационния труд се изучават тези два вида функции, първата от които е класическа специална функция, а втората — специална функция

на дробното смятане, и появилите се техни многобройни обобщения вследствие на нарастващия интерес към специалните функции, към широката им и разнообразна употреба, т. е. накратко казано, функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип.

Най-общо получените резултати могат да се класифицират в две групи по следния начин:

- Резултати свързани с известни класове от специални функции
- Резултати свързани с въведен нов клас от специални функции.

Към първата група спадат резултатите от Глави 1–5, 8, 9 и част от Глава 6, където се изучават различни изброими системи от функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип. В Глави 1, 4, 5 и 6 са получени фундаментални резултати, като например важни неравенства за такива системи, както и за суми от такива функции, и асимптотични формули за “големи” стойности на параметрите, които се използват съществено при по-нататъшните изследвания. В Глави 2, 3, 8 и 9 се разглеждат редове по системи от функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип, а именно по системите (2.7.1), (8.1.1), (8.1.2), (8.3.1), (8.5.1) и (8.5.2). Изучава се сходимостта на такива редове в комплексната равнина, и са доказани аналози на класическите резултати, като например теоремите на Коши–Адамар, Абел, Таубер, Литълуд и Фату, а също и теореми за свръхсходимост за широко използваните степенни редове.

За опростяване на по-нататъшното изложение и за удобство, нека да означим с

$$\tilde{J} := \left\{ \tilde{j}_n \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} \quad (\text{C.1.1})$$

коя да е от споменатите фамилии. В процеса на изучаване на реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{j}_n(z), \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{C.1.2})$$

ние разглеждаме заедно с него и степенния ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\text{C.1.3})$$

със същите коефициенти a_n .

Да подчертаем, че резултатите получени за реда (C.1.2) са абсолютно аналогични на тези за класическите степенни редове от вида (C.1.3).

Оказва се, че тези редове имат един и същ радиус на сходимост R , и са абсолютно и равномерно сходящи във всеки затворен кръг $|z| \leq r$ ($r < R$). Освен това, ако всеки един от тях е сходящ в точката z_0 от границата на $D(0; R)$, то и за двата реда са валидни теореми от Абелов тип в една и съща ъглова област.

Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че $R = 1$. Ако освен това $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условието $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, и всичките точки (включително и краищата) на дъгата σ от единичната окръжност $C(0; 1)$ са регулярни за сумите на двата разглеждани реда, то редовете (C.1.2) и (C.1.3) са сходящи, даже равномерно върху дъгата σ . Освен това, ако $\tilde{f}$ е сумата на който да е от двата разглеждани реда в единичния кръг $D(0; 1)$ и ако ако $\tilde{f}$ имат Адамарови празнини и поне една регулярна точка, лежаща на окръжността $C(0; 1)$, то те са свръхсходящи. Обаче, ако $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_{k_n}|)^{1/k_n} = 1$ за $k_{n+1} \geq (1 + \theta)k_n$ ($\theta > 0$) и $a_k = 0$ за $k_n < k < k_{n+1}$, то всички точки от единичната окръжност $C(0; 1)$ са сингулярни за функцията $\tilde{f}$, т. е. единичната окръжност е естествена граница на аналитичност за съответния ред. Най-сетне, ако който да е от разглежданите редове е свръхсходящ, то неговата сума $\tilde{f}$ може да се представи като сума на два реда по същия вид функции както следва

$$\tilde{f}(z) = \tilde{h}(z) + \tilde{g}(z),$$

където редът $\tilde{h}(z)$ притежава Адамарови празнини, а $\tilde{g}(z)$ има радиус на сходимост по-голям от 1.

За по-нататъшните разглеждания, вземайки $z_0 \in C(0; R)$ и $\tilde{j}_n(z_0) \neq 0$, ние нормираме в известен смисъл системата (C.1.1) и означаваме

$$(J; z_0) := \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad j_n(z) = j_n^*(z; z_0) = \frac{\tilde{j}_n(z)}{\tilde{j}_n(z_0)}. \quad (C.1.1^*)$$

Очевидно е, че функциите j_n във формулата (C.1.1*) са цели функции, удовлетворяващи условието $j_n(z_0) = 1$, т. е. съответната фамилия е от вида (2.6.4). За да дадем следващите резултати, ние се опираме на Дефиниция 2.6.2 за (J, z_0) -сумируемост на даден числов ред. Аналогично на

A -сумируемостта на даден числов ред, ако числовият ред (2.2.2) е (J, z_0) -сумируем, посредством фамилията (C.1.1*), и допълнително $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ (или даже $a_n = O(1/n)$), то той е сходящ. Това означава, че са в сила теореми от Тауберов и Литълудов тип, също както и в теорията на степенните редове. Разбира се, тази сумируемост е регулярна и нейната регулярност следва от съответната съществуваща теорема от Абелов тип.

Накрая, получените резултати в изброените четири глави могат да се резюмират по следния начин. Основните свойства на редовете, които са обект на това изследване, са достатъчно “близки” до тези на степенните редове, т. е. тяхното поведение е напълно сходно на поведението на широко разпространените степенни редове.

Поради непрекъснато нарастващия интерес към специалните функции и широката им употреба се появяват многобройни техни обобщения, което продължава и в днешно време. Останалата част от резултатите, изложени в част от Глава 6 и в Глава 7, е свързана с въвеждането и изучаването на нов клас от $3m$ -параметрични мултииндексни функции на Митаг-Лефлер, които обобщават едновременно функциите на Прабхакар и мултииндексните функции на Митаг-Лефлер с $2m$ параметъра. В този клас се включват и разгледаните преди това функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип като специални случаи. Изследванията на функциите от въведения клас включват намиране на фундаментални техни свойства, като ред и тип, интегрални представяния, както и определяне на мястото им сред известните до момента функции. Направени са изследвания, свързани с дробното смятане в класовете от мултииндексни функции, изследвани са връзката и свойствата на тези класове специални функции с операторите на дробното смятане. Подобни изследвания за останалите функции от Беселов и Митаг-Лефлеров са провеждани от редица учени и могат да се намерят в цитираните литературни източници, между които например: [2], [11] – [16], [24, 29, 33, 34], [38] – [41], [56, 57], [64, 66, 80, 105], [109] – [113] и [110, 116, 131, 132].

Освен значението в чисто теоретичния аспект за развиване на теорията на специалните функции и нейното обогатяване, получените в дисертационния труд резултати имат и приложно значение. Това се индикира от тяхното използване за решаване на моделни диференциални и интегрални уравнения свързани с приложенията на специалните функции в други клонове на науката. Така например цял кръг от специалисти от Планк институтите се занимава с решаване на задачи, решенията на които се да-

ват с редове по специални функции от разглежданите видове. Функциите (5.3.1) и редове по тях са използвани например за изразяване на решенията на обобщеното уравнение на Ланжевен от Сандев, Томовски и Дубелдам [121], а също така и за разлагане по собствените функции на решението на двучленно дробно уравнение (относно времето) от Бажлекова и Димовски [7, 8]. За нейното скорошно използване в триенето и обобщените ядра на паметта, както и в точните решения на обобщеното дробно уравнение на Ланжевен – може да се види например още в [117]–[119] и [125]. Тази функция играе фундаментална роля в описанието на аномалните диелектрични свойства в неразпределените материали и хетерогенните системи, които проявяват едновременно нелокалност и нелинейност [21]. За илюстрация на казаното са приведени два примера. Първият от тях се отнася до моделирането на еднопосочни вискоеластични потоци, което се прави със задачата [5]

$$u'(t) + \lambda u(t) + \lambda \gamma D_t^\alpha u(t) = 0, \quad u(0) = 1.$$

За стойности на $\lambda > 0$, решението $u(t, \lambda)$ се записва в следния явен вид:

$$u(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\gamma^{k+1} \lambda^{k+1}} t^{(\alpha-1)(k+1)} E_{\alpha, \alpha(k+1)-k}^{k+1}(-\gamma^{-1} t^\alpha),$$

чрез трипараметричните функции на Митаг-Лефлер.

Другият пример се отнася до общото уравнение на Ланжевен, което се използва като полезен инструмент за моделиране на аномални дифузни процеси в сложна и вискоеластична среда. За свободни частици то има следния вид

$$m.v'(t) + \int_0^t \gamma(t-\tau)v(\tau)d\tau = \xi(t), \quad x'(t) = v(t),$$

където $x(t)$ и $v(t)$ са съответно преместването и скоростта на частиците, $\gamma(t)$ е ядрото на фрикционната памет, $C(t) = k_B T \gamma(t)$ (k_B е константата на Болцман, T е абсолютната температура на околната среда) и $\xi(t)$ е случайна сила с нулева средна стойност и корелационна функция $\langle \xi(t)\xi(\tau) \rangle = C(\tau - t)$. Решението на това уравнение се дава с формулите [120]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \langle x(t) \rangle + \int_0^t G(t-\tau)\xi(\tau)d\tau, \\ v(t) &= \langle v(t) \rangle + \int_0^t g(t-\tau)\xi(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

където $\langle x(t) \rangle = x_0 + v_0 G(t)$ е средното преместване на частиците, $\langle v(t) \rangle = v_0 G(t)$ е средната скорост на частиците, а $x_0 = x(0)$ и $v_0 = v(0)$ са съответно начално преместване и начална скорост на частиците. В случая на двумерен шум функциите G и g се изразяват чрез трипараметричните функции на Митаг-Лефлер и имат следния вид:

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-A_1)^n t^{(2-\lambda_1)n+1} E_{2-\lambda_2, (2-\lambda_1)n+2}^{n+1} (-A_2 t^{2-\lambda_2}),$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-A_1)^n t^{(2-\lambda_1)n} E_{2-\lambda_2, (2-\lambda_1)n+1}^{n+1} (-A_2 t^{2-\lambda_2}),$$

със стойности на $\lambda_{1,2}$ както следва:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 1.$$

Не е изтекло и половин столетие от времето, когато Р. Аски е написал в своите класически Лекции по ортогонални полиноми и специални функции, че все още по-голямата част от математиците и представителите на природните, техническите и други приложни науки

“са напълно незапознати със силата на специалните функции. Те реагират на статия, която съдържа Беселови функции или полиноми на Лъожандър чрез незабавно преминаване към следващата статия ... Надявам се, че тези лекции ще покажат колко полезни биха могли да бъдат те ... Така че, моят съвет е да научите нещо за специалните функции или ако това изглежда твърде трудна или скучна задача, да се запознаете с някой, който знае нещо за тях ... Във всеки голям университет или изследователска лаборатория трябва да има човек който не само може да намери разни неща в проекта на Бейтман и Ердей, но и да може да попълни някои празнини в тази поредица от книги. Във всеки случай, моята гледна точка е следната: специалните функции са полезни и тези, които се нуждаят от тях и онези, които ги познават трябва да започнат да разговарят помежду си” [2].

Исключително интензивното развитие на специалните функции и тяхното активно използване за решаването на различни задачи от теорията и практиката показва, че може би това време вече е забравено и на специалните функции е отредено заслужено място като мощен инструмент за изследвания на разнообразни процеси и феномени.

Библиография

- [1] R.P. Agarwal: A propos d'une note de M.Pierre Humbert, C.R. Seances Acad. Sci., **236**, No.21, pp.2031–2032, 1953.
- [2] R. Askey: Orthogonal Polynomials and Special Functions, SIAM, Philadelphia (1975).
- [3] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo: Fractional Calculus Models and Numerical Methods, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, World Scientific (2012).
- [4] R.H. Battin: An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston (1999).
- [5] E. Bazhlekova: Subordination principle for a class of fractional order differential equations, Mathematics, **2**, 412–427, 2015; doi:10.3390/math3020412.
- [6] E. Bazhlekova, I. Bazhlekov: Stokes' first problem for viscoelastic fluids with a fractional Maxwell model, Fractal and Fractional, 2017, **1**, No 7, 1–12; doi:10.3390/fractalfract1010007.
- [7] E. Bazhlekova, I. Dimovski: Exact solution for the fractional cable equation with nonlocal boundary conditions, Central European Journal of Physics, **11**, No 10, pp. 1304–1313, 2013; DOI: 10.2478/s11534-013-0213-5.
- [8] E. Bazhlekova, I. Dimovski: Exact solution of two-term time-fractional Thornley's problem by operational method, Integral Transforms and Special Functions, **25**, No 1, 61–74, 2014; DOI:10.1080/10652469.2013.815184.

- [9] Vl. Bernstein: Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris. Gauthier Villars (1933).
- [10] L. Bieberbach: Analytische Fortsetzung. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1955).
- [11] P. Delerue: Sur le calcul symbolique à n variables et fonctions hyperbesséliennes (II), Annales Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1, No 3, 229–274, 1953.
- [12] I. Dimovski: Operational calculus for a class of differential operators, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **19**, No 12, 1111–1114, 1966.
- [13] I. Dimovski, V. Kiryakova: Generalized Poisson transmutations and corresponding representations of hyper-Bessel functions, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **39**, No 10, 29–32, 1986.
- [14] I. Dimovski, V. Kiryakova: Generalized Poisson representations of hypergeometric functions ${}_pF_q$, $p < q$, using fractional integrals, In: Proc. 16th Spring Conf. Union Bulg. Math., Sofia (1987), 205–212.
- [15] M.M. Dzrbashjan: On the integral transformation generated by the generalized Mittag-Leffler functions, Izv. AN Arm.SSR **13**, No 3, 21–63 (1960) (in Russian).
- [16] M.M. Dzrbashjan: Integral Transforms and Representations in the Complex Domain (in Russian), Nauka, Moscow (1966).
- [17] A. Erdélyi et al. (ed-s): Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, **1–3** (1953–1955).
- [18] L. Eulero: Institutiones Calculi Differentialis, **1**, Ticini (1787).
- [19] Г. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления, **1 – 3**, Издательство “Наука”, Москва (1966).
- [20] L. Gajić, B. Stanković: Some properties of Wright’s function. Publ. l’Institut Math. Beograd, Nouv. Ser., **20**, 34, 91–98, 1976.
- [21] R. Garra, R. Garrappa: The Prabhakar or three parameter Mittag-Leffler function: theory and application, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018; doi: 10.1016/j.cnsns.2017.08.018.

- [22] G. Goluzin: Geometric Theory of Functions of a Complex Variable (In Russian), Moskow, Nauka (1966).
- [23] R. Gorenflo, F. Mainardi: On Mittag–Leffler-type functions in functional evolution processes, J. Comput. Appl. Math. **118**, pp. 283–299, 2000.
- [24] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin: Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2014).
- [25] J. Hadamard: Essai sur l’étude des fonctions données par leur développement de Taylor, J. Math. Pures Appl. (4), **8**, 101–186, 1892.
- [26] J. Hadamard: Essai sur l’étude des fonctions données par les développement de Taylor, J. Math. Pures et appl. (ser. IV), **9**, 171–215, 1893.
- [27] G. Hardy: Divergent Series, 1st edition, Oxford University Press, Oxford (1949).
- [28] M. A. E. Herzallah, D. Baleanu: Comput. Math. Appl. **64**, No 10, 3059–3064, 2012.
- [29] R. Hilfer (Ed.): Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore (2000).
- [30] E. Hille: Contribution to the Theory of Hermitian series: (I) Duke Math. Journ., **5**, 875–936, 1939. (II) The Representation Problem, Trans. Amer. Soc., **47**, 80–94, 1940.
- [31] Hille, E., Tamarkin, J. D.: On the theory of linear integral equations, Ann. Math., **31**, 479–528, 1930.
- [32] P. Humbert et R. P. Agarwal: Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelquesunes de ses généralisations, Bulletin des Sciences Mathematiques, **77**, No.10, pp.180–185, 1953.
- [33] L. Iliev: Нули на цели функции, Издателство на БАН, София (1979).
- [34] L. Iliev: Laguerre Entire Functions, Publ. House of Bulg. Acad. Sciences, Sofia (1987).
- [35] A. A. Kilbas, A. A. Koroleva: Generalized Mittag-Leffler function and its extension, Tr. Inst. Mat. Minsk, **13** (1), 43–52, 2005, (In Russian).

- [36] A. A. Kilbas, A. A. Koroleva: Integral transform with the extended generalized Mittag-Leffler function, *Mathematical Modeling and Analysis*, **11**, No 2, 173–186, 2006.
- [37] A. A. Kilbas, A. A. Koroleva, S. V. Rogosin: *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **16**, 378–404, 2013; DOI:10.2478/s13540-013-0024-9.
- [38] A.A. Kilbas, M. Saigo: *H-Transform. Theory and Applications*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton/London/New York/Washington, DC (2004).
- [39] A.A. Kilbas, M. Saigo, R. K. Saxena: Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators, *Integral Transforms and Special Functions*, **15**, No. 1, 31–49 (2004).
- [40] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier (2006).
- [41] V. Kiryakova: *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Longman Sci. Tech. & J. Wiley, Harlow - N. York (1994).
- [42] V. Kiryakova: All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions, *J. Physics A: Math. & General*, **30**, No 14, 5085–5103, 1997; doi: 10.1088/0305-4470/30/14/019.
- [43] V. Kiryakova: Multiindex Mittag-Leffler functions, related Gelfond-Leontiev operators and Laplace type integral transforms, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **2**, No 4, 445–462, 1999.
- [44] V. Kiryakova: Multiple (multiindex) Mittag-Leffler functions and relations to generalized fractional calculus, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **118**, 241–259, 2000; doi:10.1016/S0377-0427(00)00292-2.
- [45] V. S. Kiryakova: Some special functions related to fractional calculus and fractional (non-integer) order control systems and equations, *Facta Universitatis, Ser.: Automatic Control and Robotics*, **7**, No 1, 79–98, 2008.
- [46] V. Kiryakova: The special functions of fractional calculus as generalized fractional calculus operators of some basic functions, *Computers and Mathematics with Appl.*, **59**, No 3, 1128–1141, 2010; doi:10.1016/j.camwa.2009.05.014.

- [47] V. Kiryakova: The multi-index Mittag-Leffler functions as important class of special functions of fractional calculus, *Computers and Mathematics with Appl.*, **59**, No 5, 1885–1895, 2010; doi:10.1016/j.camwa.2009.08.025.
- [48] V. Kiryakova: Fractional order differential and integral equations with Erdélyi-Kober operators: Explicit solutions by means of the transmutation method, *AIP Conf. Proc.*, **1410**, 247–258, 2011; doi:10.1063/1.3664376.
- [49] V. Kiryakova: From the hyper-Bessel operators of Dimovski to the generalized fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **17**, No 4, pp. 977–1000, 2014; DOI: 10.2478/s13540-014-0210-4.
- [50] V. Kiryakova: Fractional calculus operators of special functions? – The result is well predictable!, *Chaos, Solitons & Fractals*, **102**, pp. 2–15, 2017; doi:10.1016/j.chaos.2017.03.006.
- [51] V. Kiryakova, V. Hernandez-Suarez: Bessel-Clifford third order differential operator and corresponding Laplace type integral transform, *Dissertationes Mathematicae*, **340**, 143–161, 1995.
- [52] V. Kiryakova, Yu. Luchko: The multi-index Mittag-Leffler functions and their applications for solving fractional order problems in applied analysis, In: *American Institute of Physics - Conf. Proc.*, **1301** 597–613, 2010; doi:10.1063/1.3526661.
- [53] M. Kljuchantzev: On the construction of r -even solutions of singular differential equations, *Dokladi AN SSR*, **224**, No 5, 1000–1008, 1975 (In Russian).
- [54] M. Kljuchantzev: An introduction to the theory of $(\nu_1, \dots, \nu_{r-1})$ -transforms, *Mat. Sbornik*, **132**, No 2, 167–181, 1987 (In Russian).
- [55] J. Korevaar: A century of complex Tauberian theory, *Bulletin (New series) of the American mathematical society*, **39**, Number 4, Pages 475–531, 2002; doi:10.1090/S 0273-0979(02)00951-5 (Article electronically published on July 8, 2002).
- [56] R. Kovacheva: Zeros of sequences of partial sums and Overconvergence, *Serdica Math. J.*, **34**, 467–482, 2008.

- [57] R. Kovacheva: Overconvergence and zero distribution of Fourier series, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, **61**, No 11, 1377–1384, 2008.
- [58] C. Lavault: Fractional calculus and generalized Mittag-Leffler type functions, *arXiv:1703.01912v2*, LIPN, Université Paris 13 (2017); <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01482060/document>.
- [59] Yu. Luchko: Operational method in fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **2**, No 4, 463–488, 1999.
- [60] Yu. Luchko, R. Gorenflo: Scale invariant solutions of a PDE of fractional order, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **1**, No 1, 63–78, 1998.
- [61] Y. Luchko and R. Gorenflo: An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives, *Acta Mathematica Vietnamica*, **24**, No 2, 207–233, 1999.
- [62] J. T. Machado, F. Mainardi, V. Kiryakova: Fractional calculus: quo vadimus? (Where are we going?) (Contributions to Round Table Discussion held at ICFDA 2014), pp. 495–526, **18**, No 2, 2015; DOI: 10.1515/fca-2015–0031.
- [63] J.A.T. Machado, F. Mainardi, V. Kiryakova, T. Atanacković: Fractional calculus: d'où venons-nous? Que sommes-nous? Où allons-nous? (Contributions to Round Table Discussion held at ICFDA 2016), *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **15**, No 5, 1074–1104, 2016; DOI: 10.1515/fca-2016-0059.
- [64] F. Mainardi: *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*, Imperial College Press & World Sci., London - Singapore (2010).
- [65] S. Mandelbrojt: Modern researches on the Singularities of Functions Defined by Taylor's Series, *The Rice Institute Pamphlet*, **14** (1927).
- [66] O.I. Marichev: *A Method of Calculating Integrals of Special Functions (Theory and Tables of Formulas)* (In Russian: *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsij (Teoriya i tablitsy formul)*), Nauka i Tekhnika, Minsk (1978).
- [67] А. Маркушевич: *Теория аналитических функций*, **1, 2**, Наука, Москва (1967).

- [68] A. M. Mathai, H. J. Haubold: Special Functions for Applied Scientists, Springer (2008).
- [69] A. M. Mathai, H. J. Haubold: Matrix-variate statistical distributions and Fractional Calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **14**, 138–157, 2011; DOI:10.2478/s13540-011-0010-z.
- [70] A. M. Mathai, R. K. Saxena: The H-function with Applications in Statistics and Other Disciplines, Wiley Eastern Ltd, New Delhi (1978).
- [71] A. M. Mathai, R. K. Saxena, H. J. Haubold: The H-function. Theory and applications, Springer, Dordrecht (2010).
- [72] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogène (première note), *Acta Math.*, **23**, pp. 43—62, 1899.
- [73] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogène (seconde note), *Acta Math.*, **24**, pp. 183 — 204, 1900.
- [74] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogène (troisième note), *Acta Math.*, **24**, pp. 205 — 244, 1900.
- [75] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogène (quatrième note), *Acta Math.*, **26**, pp. 353 — 392, 1902.
- [76] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogène (cinquième note), *Acta Math.*, **29**, pp. 101 — 181, 1905.
- [77] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d’une branche uniforme d’une fonction monogène (sixième note), *Acta Math.*, **42**, pp. 285 — 308, 1920.
- [78] Nehari, Z.: On the Singularities of Legendre Expantions, *Rational Mech. Anal.*, **5**, No 6, 987–992, 1956.

- [79] R. R. Nigmatullin, D. Baleanu: The derivation of the generalized functional equations describing self-similar processes, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **15**, No 4, 718–740, 2012; DOI:10.2478/s13540-012-0049-5.
- [80] Н. Обрешков: Сумиране с трансформация на Ойлер на редовете на Дирихле, факултетните редове и редове на Нютон (с резюме на френски език – със заглавие: N. Obrechhoff, Sommatation par le transformation d'Euler. Les séries de Dirichlet, les séries de facultés et la série de Newton), *Год. на Соф. Унив. Физ.-мат. факултет*, **35**, кн. 2, стр. 1–156, 1939.
- [81] N. Obrechhoff: Summation by Euler's transform of the series of Dirichlet, factorial series and the series of Newton, *Pliska Stud. Math.*, **28**, 7–127, 2017; <http://www.math.bas.bg/pliska/Pliska-i28.html>.
- [82] N. Obrechhoff: On the summation of Taylor's series on the contour of the domain of summability, In: Nikola Obrechhoff, *Selected Papers, Part II*, Academic Publ. House, Sofia (2006), Paper # 7, 39–70 (Transl. from Bulg. original in: *Annuaire Univ. Sofia, Phys.-Math.* 26, No 1, 53–100), 1930.
- [83] N. Obrechhoff: On the summation of Taylor's series on the contour of the domain of summability, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **19**, No 5, pp. 1316–1346 (Reprinted from: *Annuaire Univ. Sofia, Phys.-Math. Fac.* 26, No 1 (1930), 53–100, In Bulgarian), 2016; DOI: 10.1515/fca-2016-0069.
- [84] D. S. de Oliveira, E. C. de Oliveira, S. Deif: On a sum with a three-parameter Mittag-Leffler function, *Integr. Transf. Spec. Funct.*, **27**, No 8, 639–652, 2016; DOI: 10.1080/10652469.2016.1182523.
- [85] A. Ostrowski: Uber eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlichvielen verschwindenden Koeffizienten, *Berl. Ber.*, 557–565, 1921.
- [86] A. Ostrowski: Uber Potenzreihen, die uberkonvergente Abschnittsfolgen besitzen, *Deutsche Math.-Ver.*, **32**, 185–194, 1923.
- [87] A. Ostrowski: On representation of analytical functions by power series *J.L.M.S.*, **1**, Part 4, 251–263, 1926.
- [88] G. Pagnini: Erdélyi-Kober fractional diffusion, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **15**, No 1, 117–127, 2012; DOI:10.2478/s13540-012-0008-1.

- [89] J. Paneva-Konovska: A Tauber type theorem for series in Bessel functions, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, **2**, No 5, 683–688, 1999.
- [90] J. Paneva-Konovska: Multi-index (3m-parametric) Mittag-Leffler functions and fractional calculus, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, Tome **64**, No 8, 1089–1098, 2011.
- [91] J. Paneva-Konovska: Series in Mittag-Leffler functions: Geometry of convergence, *Adv Math Sci Journal*, **1**, no. 2, 73–79 2012; UDC: 517.58:517.521.
- [92] J. Paneva-Konovska: The convergence of series in multi-index Mittag-Leffler functions, *Integr. Transf. Spec. Funct.*, **23**, No 3, 207–221, 2012; doi: 10.1080/10652469.2011.575567.
- [93] J. Paneva-Konovska: On the multi-index (3m-parametric) Mittag-Leffler functions, fractional calculus relations and series convergence, *Central European Journal of Physics (CEJP)*, **11**, no.10, 1164–1177, 2013; DOI: 10.2478/s11534-013-0263-8.
- [94] J. Paneva-Konovska: Convergence of series in three-parametric Mittag-Leffler functions, *Mathematica Slovaca*, **64**, Issue 1, pp 73–84, 2014; DOI: 10.2478/s12175-013-0188-0.
- [95] J. Paneva-Konovska: Series in Prabhakar functions and the geometry of their convergence, *Mathematics in Industry (Chapter V "Algorithms in Industrial Mathematics")*, pp 198–214, Cambridge, 2014.
- [96] J. Paneva-Konovska: A family of hyper-Bessel functions and convergent series in them, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **17**, No 4, pp. 1001–1015, 2014; DOI:10.2478/s13540-014-0211-3.
- [97] J. Paneva-Konovska: On the multi-index Mittag-Leffler series and their boundary behaviour, *Integral Transforms and Special Functions*, **26**, No. 3, 152–164, 2015; DOI: 10.1080/10652469.2014.975129.
- [98] J. Paneva-Konovska: Overconvergence of Bessel series, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, **68**, No 9, 1091–1098, 2015.
- [99] J. Paneva-Konovska: From Bessel to Multi-Index Mittag-Leffler Functions: Enumerable Families, Series in them and Convergence, London, World Scientific Publ. (2016).

- [100] J. Paneva-Konovska: On some Mittag-Leffler series: A set of overconvergence theorems, AMEE 2016, AIP Conf. proceedings, 1789, 050007, 1 – 6 стр., 2016; doi: 10.1063/1.4968491.
- [101] J. Paneva-Konovska: Bessel series: some results on their overconvergence, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **70**, No 1, 21–28, 2017; *http : //www.proceedings.bas.bg/PDF17/H_01 – 03.pdf*.
- [102] J. Paneva-Konovska: Inequalities for the partial sums of some Mittag-Leffler type series, Journal of Inequalities and Special Functions, **8** No 1, pp. 42–47, 2017; URL: <http://www.ilirias.com>.
- [103] J. Paneva-Konovska: Overconvergence of series in generalized Mittag-Leffler functions, Fract. Calc. Appl. Anal., **20**, No 2, pp. 506–520, 2017; DOI:10.1515/fca-2017-0026.
- [104] R.S. Pathak: Certain convergence theorems and asymptotic properties of a generalization of Lommel and Maitland transformations, Proc. Nat. Acad. Sci., India, A-36, No 19, 81–86, 1966.
- [105] I. Podlubny: Fractional Differential Equations, Acad. Press, New York, (1999).
- [106] I. Podlubny: What Euler could further write, or the unnoticed “big bang” of the fractional calculus, Fract. Calc. Appl. Anal., **16**, No 2, pp. 501–506, 2013; DOI:10.2478/s13540-013-0031-x.
- [107] T. R. Prabhakar: A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, Yokohama Math. J., **19**, 7–15, 1971.
- [108] A.I. Prieto, S.S. de Romero, H.M. Srivastava: Some fractional-calculus results involving the generalized Lommel-Wright and related functions, Applied Mathematics Letters, **20**, 17–22, 2007.
- [109] A. A. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev: Integrals and Series. More Special Functions, 1st edition, Gordon & Breach Sci. Publ., N. York etc. (1990).
- [110] P. Rajkovic, S. Marinkovic, M. Stankovic: Diferencijalno-Integralni Racun Baicnih Hipergeometrijskih Funkcija (In Serbian), Mas. Fak. Univ. u Nisu, Nis (2008).

- [111] P. Russev: A theorem of a Tauber type for summation by means Laguerre polynomials, *Compt. rend. Acad. bulg. Sci.*, **30**, No 3, 331–334, 1977 (In Russian).
- [112] P. Russev: *Analytic Functions and Classical Orthogonal Polynomials*, Sofia (1984).
- [113] P. Russev: *Classical Orthogonal Polynomials and Their Associated Functions in Complex Domain*, Publ. House Bulg. Acad. Sci., Sofia (2005).
- [114] P. Russev: *An Invitation to Bessel Functions*, Prof. M. Drinov Publ. House Bulg. Acad. Sci., Sofia (2016).
- [115] P. Russev: Preface (pp. 3–5), Addendum (pp. 128–132), *Pliska Stud. Math.*, **28**, 2017; <http://www.math.bas.bg/pliska/Pliska-i28.html>.
- [116] S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev: *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon and Breach, N. York - London (1993).
- [117] T. Sandev, A. Chechkin, H. Kantz, R. Metzler: Diffusion and Fokker-Planck-Smoluchowski equations with generalized memory kernel, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **18**, No 4, 1006–1038, 2015; DOI: 10.1515/fca-2015-0059.
- [118] T. Sandev, R. Metzler, Ž. Tomovski: Velocity and displacement correlation functions for fractional generalized Langevin equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **15**, 426–450, 2012; DOI:10.2478/s13540-012-0031-2.
- [119] T. Sandev, R. Metzler, Ž. Tomovski: Correlation functions for the fractional generalized Langevin equation in the presence of internal and external noise, *J. Math. Phys.* **55**, 023301, 2014; <http://dx.doi.org/10.1063/1.4863478>.
- [120] T. Sandev, Ž. Tomovski: Langevin equation for a free particle driven by power law type of noises, *Physics Letters A* **378** 1–9, 2014; doi:10.1016/j.physleta.2013.10.038.
- [121] T. Sandev, Ž. Tomovski, J. Dubbeldam: Generalized Langevin equation with a three parameter Mittag-Leffler noise, *Physica A*, **390**, Issue 21-22, 3627–3636, 2011; DOI: 10.1016/j.physa.2011.05.039.

- [122] L. Tchakalov: Увод в теорията на аналитичните функции, София, Наука и изкуство (1972).
- [123] E.C. Titchmarsh: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 3rd edition, Chelsea Publ., New York (1986) (the first edition Oxford Univ. Press, Oxford, 1937).
- [124] Ž. Tomovski, R. Garra: Analytic solutions of fractional integro-differential equations of Volterra type with variable coefficients, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **17**, No 1, pp. 38–60, 2014; DOI: 10.2478/s13540-014-0154-8.
- [125] Ž. Tomovski, T. Sandev: Distributed-order wave equations with composite time fractional derivative, *International Journal of Computer Mathematics*, 14 pp, 2017. DOI:10.1080/00207160.2017.1366465.
- [126] П.П. Юшков: Функции Бесселя и их Приложения к Задачам об Охлаждении Цилиндра, Минск, Изд. Академии наук БССР (1962).
- [127] D. Valério, J.T. Machado, V. Kiryakova: Some pioneers of the applications of Fractional calculus (Historical survey), *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **17**, No 2, pp. 552–578, 2014; DOI: 10.2478/s13540-014-0185-1.
- [128] Г.Н. Ватсон, Теория Бесселевых функций, Москва, Иностранная литература, **1** (1949).
- [129] A. Wiman: Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Math.*, **29**, 191–201, 1905.
- [130] Е.Т. Уиттекер, Г.Н. Ватсон, Курс современного анализа, Физ.-мат. литература, **1**, **2**, Москва (1963).
- [131] E.M. Wright: On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. London Math. Soc.*, **8**, 71–79, 1933.
- [132] S. Yakubovich, Yu. Luchko: The Hypergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions, 1st edition, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht - Boston - London (1994).

Азбучен указател

- асимптотична формула, 24–26,
77–82, 85, 86, 95, 96, 101,
103, 104, 107, 109, 113, 114,
138, 140, 142, 146, 153, 154
- дефиниция
(J, z_0)-сумируем, 41, 42
 A -сумируем, 31
Адамарови празнини, 51, 53
регулярна точка, 33
свръхсходимость, 51, 53
- функция
Г-функция, 18
Бесел, 23, 63, 80
Бесел–Клифорд, 24, 64, 172
Беселов тип, 80
Бета, 19
Фокс H -, 109, 112
Гама, 15
хипер-Беселова, 62, 63, 77, 79,
104, 156
Ломел, 80, 81
Майер G -, 109
Митаг-Лефлер, 83, 86, 90, 95
Митаг-Лефлеров тип, 83
- мултииндексна
($3m$ -параметрична)
Митаг-Лефлер, 106
- мултииндексна Митаг-Лефлер,
97, 99, 101
- обобщена Бесел–Мейтланд, 61,
79
обобщена Ломел–Райт, 62, 65,
79
обобщена Митаг-Лефлер, 88,
89, 95
Прабхакар, 88, 89, 92
Райт, 61, 109, 112
Струве, 80, 81
- горна оценка, 25, 77, 162, 164, 166,
168, 174–176
- интеграл
дробен ред, 119, 129
Ердей–Кобер, 123, 125, 133
Мелин трансформация, 115
обратна, 115
Мелин–Барнс тип, 110, 113
представяне, 24
Риман–Лиувил, 119, 129
- множество
 $[D(0; R)]$, 27
 $\partial D(0; R)$, 27
 $\tilde{D}(0; R)$, 27
 $A_{\psi, \varphi}$, 27
 $A_{z_0; \psi, \varphi}$, 28
 $C(0; R)$, 27
 $D(0; R)$, 27
 g_φ, d_φ , 28

неравенство, 28, 68, 86, 92, 101

ред

Беселов, 34

Беселов мултииндексен, 137

Беселов тип, 137, 140, 161

числов, 31, 41

Митаг-Лефлеров, 149

обобщен, 149

Митаг-Лефлеров

мултииндексен, 156, 158

Митаг-Лефлеров тип, 151, 173

степенен, 29

регулярна

сумируемост, 31

точка, 33

символ

на Поххамер, 19, 20, 88

сумируемост, сумируем, сумиране

(J, z_0) -сумируем, 41–45

A -сумируем, 31

сврѣхсходимост, 57, 170, 182

теорема

Абел, 30

Абелов тип, 37, 139, 151, 158

Адамар, 52

Адамаров тип, 56, 162, 173

Фату, 33

Фату тип, 45, 144, 154, 160

Коши–Адамар, 29

Коши–Адамаров тип, 34, 138,
150, 157

Литълуд, 32

Литълудов тип, 44, 45, 141,
144, 154, 159

сврѣхсходимост, 52, 53, 57, 162,
170, 173

Таубер, 32

Тауберов тип, 42, 141, 143, 152,
159