

РЕЦЕНЗИЯ
от акад. Петър Радоев Попиванов, ИМИ – БАН

на дисертация на тема:
Функции на Бесел и Митаг-Лефлер
и обобщения

на Йорданка Добрева Панева-Коновска, доц. д-р

представена за получаване на научната степен
“ДОКТОР НА НАУКИТЕ”

Област на висше образование:

4. Природни науки, математика и информатика,
Професионално направление: 4.5. Математика,
Научна специалност: „Математически анализ”

Г-жа Коновска е представила по процедурата общо 30 документа – в това число дисертация, автореферат, публикации по дисертацията и изискуеми списъци, които няма да изреждам. Ще спомена само, че от 2008 г. тя е доцент към катедра „Математически анализ и числени методи” на ФПМИ при ТУ – София (понастоящем заместник-декан по НИР) и също така е асоцииран член (доцент) от 2012 г., а от 2014 г. е на частичен трудов договор към секция „Анализ, геометрия и топология” на ИМИ при БАН. Получила е висшето си образование по математика във ВПИ – Шумен – ПМФ през 1977 с квалификация „математик” и има образователна и научна степен „доктор” от 1999 г.

Заседанието на звеното за предварителна защита на дисертацията беше проведено на 07. 11. 2017 г. съгласно заповед № 504/ 17. 10. 2017 г. на Директора на ИМИ. След успешната предзащита беше направено предложение до НС на ИМИ за 7 членно научно жури, което беше утвърдено от НС на ИМИ на 17. 11. 2017 г. На първото заседание на Научното жури, състояло се на 05. 12. 2017 г., бях избран за негов председател и за рецензент.

Представеният дисертационен труд съдържа 206 страници. Той се състои от увод, девет глави и заключителни бележки, разпределени общо в 55 секции, използвана литература и азбучен указател (индекс). Всички формулирани и доказани в дисертацията лемми и теореми са номерирани с три числа. Първото означава номера на главата, второто е номерът на секцията, а третото е поредният номер вътре в самата секция, като номерацията е отделна за лемите и теоремите. Номерацията на забележките, дефинициите и формулите следва същия принцип.

I. Съдържание на дисертационния труд

Дисертационният труд принадлежи към една “вечна област” на класическия едномерен комплексен анализ – теорията на специалните функции. Нещата започват с класиците

Ойлер, Коши, Бесел, Нойман ... През XX век има възобновен интерес към областта – като се започне с Митаг-Лефлер в началото на века и се премине през Райт (1933), Патак (1966), Прабхакар (1971).... Във връзка с приложението на интегралните трансформации и оператори за дробно смятане в математически модели на практически задачи се появиха многобройни публикации на Станкович, Килбас, Майнард, Горенфло, Лучко, Маричев и много други. Приятно ми е да отбележа, че има достойно българско присъствие в тази област на математиката. Достатъчно е само да спомена имената на нашите учители – академиците Н. Обрешков и Л. Илиев и в по-ново време – нашите колеги В. Кирякова, П. Русев, Ив. Димовски, техните монографии и разбира се, издаваното от В. Кирякова и получило висок IF (над 2) международно списание “Fract. Calc. Appl. Anal.”

Няколко най-общи думи за дисертацията. В нея се изучават функции на Бесел и техни обобщения (модифицирани Беселови функции) с 2, 3, 4 и повече индекса, а също функции на Митаг-Лефлер и техни обобщения с 3 индекса (α, β, γ) и мултииндексните ($2m$ - и $3m$ -индексни) функции на Митаг-Лефлер. Третира се както въпросът за изследване на фамилии от известни функции от изброените видове, така също и за един въведен нов клас функции и някои резултати, свързани с него.

По-нататък са проследени приносите в дисертационния труд и приложените 15 публикации, на които се базира дисертацията. Тематично те могат да бъдат систематизирани в следните две основни направления:

А. Приноси свързани с фамилии от известни функции

1. Неравенства и асимптотични формули
2. Редове по функции – сходимост
3. Редове по функции – свръхсходимост

Б. Приноси свързани с нов клас от функции

1. Дефиниция и основни свойства
2. Интегрални представяния
3. Дробно смятане.

На първото от двете направления (направление А.) са посветени Глава 1 – Глава 5, Глави 8, 9 и част от Глава 6, където се изучават фамилии от функции на Бесел и техни обобщения с 2, 3, 4 и повече индекса и функции на Митаг-Лефлер и техни обобщения с 3 индекса, в това число хипер-Беселови функции и мултииндексните ($2m$ -индексни) функции на Митаг-Лефлер (за краткост те са наречени в дисертацията функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип). Резултатите, които се съдържат в останалата част от Глава 6 и в Глава 7, представляват приноси по направление Б., а именно приноси свързани с новия клас от $3m$ -параметричните мултииндексни функции на Митаг-Лефлер.

Следвайки съдържанието на дисертационния труд и приложения списък от публикации (вж. Приложение № 07-1), по-надолу са изложени по-подробно основните приноси на дисертанта.

В първите три глави е отделено внимание на Беселовите функции от първи род. След като е направен обзор на основни означения, факти и формули, известни в литературата, в Глава 1 е доказано важно неравенство (публикувано в монографията [1]), свързано с тези функции, и е прецизирана добре известната асимптотична формула за „големи” стойности на индексите, която се отнася за тях. Полученият нов резултат, даден с неравенството

(1.6.4), играе съществена роля в изследването на сходимостта на редове по Беселови функции в следващите две глави, особено по периферията на областта на сходимост.

Както добре знаем, класическият едномерен комплексен анализ изучава степенни редове, които са сходящи в кръгове в равнината. Затова естествено възникват въпросите за пресмятане на радиуса на сходимост, а също така и изследване на поведението на реда по периферията на кръга на сходимост. В тази област през XIX и началото на XX век са установени основни теореми от Коши, Абел, Таубер, Адамар, Островски и т. н. Специално внимание е отделено и на теоремите за свръхсходимост (Островски) и за празнините (Адамар). Естествен е въпросът и за подобни изследвания за редове по функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип, чрез които се изразяват решенията на разнообразни моделни уравнения, като например вълновото уравнение с фрикционна памет, уравнението на Фокър–Планк, някои дифузионни уравнения и други.

Във втора и трета глава на дисертацията се изучават редове по Беселови функции и се изследва тяхната сходимост и свръхсходимост. Резултатите, свързани със сходимостта, са в Глава 2 – намерена е областта на сходимост (Теорема 2.4.1 от типа на Коши – Адамар) и редовете са изследвани както в областта на сходимост, така и по нейната периферия, т. е. установени са теореми от Абелов (Секц. 2.5), Тауберов, Литълудов и Фату типове (съотв. Секц. 2.7 и 2.8) за редове по Беселови функции. Резултатите са публикувани в [1], а първото публикуване на теорема от Тауберов тип за ред по Беселови функции е в [13]. Свръхсходимост на тези редове се изследва в Глава 3, като първо (в Секция 3.2) са доказани теореми от типа на Островски и Адамар. Резултатите са аналогични на класическите и са публикувани в [8] и също в монографията [1]. По-нататък, в Секция 3.3 на Глава 3 се дискутира, че аналогично на случая за степенни редове, добавянето на Беселов ред с радиус на сходимост >1 към свръхсходящ Беселов ред с радиус на сходимост 1 запазва свръхсходимостта. Нещо повече, както и при степенните редове, всеки свръхсходящ Беселов ред може да се получи по този начин. Това се потвърждава от доказаната в Секция 3.3 на дисертацията теорема, която е обратна на теоремата от типа на Островски за свръхсходимост, изложена в Секция 3.2. Този резултат гласи, че ако $F(z)$ е сума на даден ред по функции на Бесел, с кръг на сходимост единичния кръг, и въпросният ред е свръхсходящ, то $F(z)$ може да се представи във вида

$$F(z) = H(z) + G(z),$$

където редът $H(z)$ има Адамарови празнини, а редът $G(z)$ има радиус на сходимост, по-голям от единица. Полученият резултат е аналогичен на обратната теорема на Островски за свръхсходимост на степенни редове и е публикуван в [9]. В процеса на доказателството са намерени някои свойства на разглежданите свръхсходящи редове, като неравенства за подредици на редиците от парциалните им суми и интеграли от тях.

В Глава 4 се изучават семейства от мултииндексните обобщения на Беселовите функции от първи род, получени с добавяне на допълнителни индекси, включително хипер-Беселовата функция, а накрая са разгледани някои специални случаи на тези функции. В Глава 5 се изучават съответно функциите на Митаг-Лефлер и техните 3-параметрични обобщения, въведени от Прабхакар. В част от Глава 6 се изследват мултииндексните ($2m$ -индексни) функции на Митаг-Лефлер, въведени от Якубович, Лучко и Кирякова и изследвани подробно от Кирякова (тук са изложени предимно нови резултати). В тези три глави са получени резултати, свързани с индексите на разглежданите функции. При направените изследвания, както в цялата комплексна равнина, така и в нейни непразни компактни подмножества, са намерени важни неравенства и асимптотични формули за „големи” стойности на индексите. Това са

формулите (4.3.1) – (4.3.3), (5.2.3) – (5.2.5), (5.5.5), (6.3.4). Те се използват съществено в Глави 8 и 9 при изследване на сходимост и свръхсходимост на редове по съответните функции. Резултатите са публикувани в [1], тези от тях, които се отнасят с $2m$ -индексните функции на Митаг-Лефлер, са първо публикувани в статията [3], а свързаните с хипер-Беселовите функции – в [6].

Глава 8 е посветена на изучаването на редове по различни изброими системи от функции от горните типове, т. е. функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип с повече индекси, и тяхната сходимост в комплексната равнина. За тях, както е и при редовете по Беселови функции в Глава 2, са доказани резултати от типа на теоремата на Коши – Адамар, Абел, Таубер, Литълуд и Фату, с други думи казано, аналози на класическите теореми за степенни редове. Формулировките на резултатите и техните доказателства са публикувани в монографията [1], геометрията на сходимост на редове по функции на Митаг-Лефлер се изучава също така в [14], а по 3-параметричните функции на Прабхакар – в [12] и [5]. Теоремите, свързани със сходимостта на редове по мултииндексни функции, се съдържат в [6] и [3], а тези за редове по хипер-Беселови функции – в [7].

В последната Глава 9 се изследва свръхсходимостта на изучаваните в Глава 8 редове, а резултатите отново са аналози на класическите за степенни редове. В изложението се съдържат достатъчни условия за свръхсходимост за редовете от Беселов и Митаг-Лефлеров тип, които са публикувани в [1]. Намерени са някои свойства на разглежданите свръхсходящи редове, такива като полезни неравенства за подредици на редиците от парциалните им суми и интеграли от тях (Теореми 9.2.1, 9.2.2, 9.5.1), а също и неравенства за коефициентите на редовете (Теореми 9.2.3, 9.5.2 – 9.5.4). Те са използвани за доказване на обратни теореми за свръхсходимост. Резултатите за редове по функции на Митаг-Лефлер са публикувани в [11], по функциите на Прабхакар – в [15], а доказателствата на гореспоменатите неравенства за функциите на Прабхакар са изложени в [10].

Резултатите, получени при изследването на $3m$ -параметричните функции на Митаг-Лефлер, които обобщават едновременно функциите на Прабхакар и мултииндексните функции на Митаг-Лефлер с $2m$ параметъра се съдържат в Глави 6 и 7 и представляват приноси по направление Б., а именно приноси свързани с новия клас от $3m$ -параметричните (мултииндексни) функции на Митаг-Лефлер. Последните са въведени в публикацията [2], а техните основни свойства са дадени в [2], [4] и също в монографията [1].

Най-напред в Глава 6 на дисертацията са установени основни свойства на тези функции. Именно, според стойностите на разглежданите в дефиницията параметри е доказано, че или тези функции са цели, и в този случай е определен редът и типът им, или се редуцират до полиноми.

Тъй като повечето от специалните функции на математическата физика са частни случаи на обобщените хипергеометрични функции ${}_pF_q$ и ${}_p\Psi_q$, и по този начин на по-общите G-функции на Майер и H-функция на Фокс, по-нататък е определено мястото на нововъведените функции сред познатите специални функции, по-точно в класовете на обобщените хипергеометрични функции на Райт и H-функциите на Фокс. По-конкретно, мултииндексните функции на Митаг-Лефлер са изразени чрез обобщените хипергеометрични функции на Райт, а също така и чрез H-функциите на Фокс, като освен това са представени чрез интеграл от типа на контурния интеграл на Мелин–Барнс (Теорема 6.6.1). Като следствие (Следствие 6.6.1) е намерено, че трансформацията на Мелин от $3m$ -индексната функция на Митаг-Лефлер е H-функция на Фокс.

Глава 7 е свързана с подробно смятане в двата разглеждани класа от мултииндексни функции. Понятието „дробно смятане” или „дробен анализ” се използва като разширение

на понятието „смятане” („анализ”), когато редът на диференциране и интегриране е произволно число, т. е. не задължително цяло. Най-популярната дефиниция за интегриране от дробен ред е за *дробният интеграл на Риман–Лиувил*, а чрез композиция на него и диференциране от целочислен ред се дефинира дробна производна (7.1.2). Риман–Лиувилевите дробни интеграли и производни на мултииндексните функции на Митаг–Лефлер са широко използвани в дробното смятане. В началото на тази глава са получени резултати за дробните интеграли и производни на Риман–Лиувил от въведените мултииндексни функции на Митаг–Лефлер, като най-напред са пресметнати производните от цял ред. Наред с класическите дефиниции на Риман–Лиувил за оператори от дробен ред, в литературата се използват много други модификации и техни обобщения. Изглежда, че най-полезните оператори на класическото дробно смятане са тези на Ердей–Кобер. По-нататък изложението в Глава 7 продължава с две твърдения: Теорема 7.2.1, която е свързана с интегралите на Ердей–Кобер от $3m$ -параметричните, и съответно от $3m$ -параметричните функции на Митаг–Лефлер, а също така и Теорема 7.3.1, свързана с обобщения интеграл (7.3.1) на Ердей–Кобер от $3m$ -параметричните функции. Дотук в Глава 7 са намерени производни и интеграли от произволен ред от представители на $3m$ -параметрични функции, при които полученият резултат е функция от същия вид. По-нататъшните усилия на дисертанта са насочени към намиране на зависимости между представители на двата класа от функции – $2m$ - и $3m$ -параметричните функции на Митаг–Лефлер. Доказани са интересни релации, свързващи както производните от цял ред от $2m$ -параметричните функции (Теорема 7.4.1), така и интегралите и производните им от дробен ред (Теорема 7.5.1 – 7.5.4), с $3m$ -параметричните функции на Митаг–Лефлер. Накрая е намерена релация между $3m$ -параметричните функции и обобщените (m -кратни) дробни интеграли от $2m$ -параметричните функции на Митаг–Лефлер (Теорема 7.6.1).

В Заключителните бележки след Глава 9 е подчертана аналогията между поведението на степенните редове и разглежданите в дисертацията редове по специални функции. Изложени са и конкретни примери за използване на редове по трипараметричните функции на Митаг–Лефлер за представяне на решенията на конкретни моделни уравнения в явен вид.

Отделно от гореизложеното в монографичния труд [1] има и приноси, свързани с други фамилии от функции и резултати за пълнота в пространства от холоморфни функции, но те нямат отношение към дисертационния труд.

II. Наукометрични данни и апробация на резултатите от дисертацията

Г-жа Коновска е представила по процедурата общо 15 самостоятелни публикации, от тях 1 монография, публикувана от авторитетното международно издателство World Scientific Publishing, 2016 (22+205 стр.), а именно „From Bessel to Multi-Index Mittag-Leffler Functions: Enumerable Families, Series in them and Convergence”. От останалите публикации 9 са в специализирани списания с IF, като сумарният им IF е $IF=7,717$ (едно от списанията – Fract. Calc. Appl. Anal. има $IF: 2,034$), 1 е в Conf. Proceedings с импакт ранг $SJR = 0,163$, 3 статии са индексирани в световната мрежа и има една публикация, която е част от глава от книга, публикувана от Cambridge Scholars Publishing. Резултатите от публикациите [2] – [8] и [12] – [14] са включени в монографията [1].

Пълният списък на научните публикации на г-жа Коновска включва общо 60 заглавия, от които една монография и 59 статии; от тях – 12 статии в специализирани научни списания с IF (сумарен IF 8,344) и 9 в Conf. Proceedings (със сумарен SJR 1,335). Индексът на Хирш h – плава в зависимост от източниците:

$$h = \begin{cases} 6 & \text{Scopus} \\ 11 & \text{Google Scholar.} \end{cases}$$

Няколко думи за цитатите по цялото научно творчество на дисертанта. Двадесет броя публикации са цитирани от 94 източници, като 44 от тях са в списания с IF, а 9 броя в списания с импакт ранг. Сумарният IF на цитиранията е $IF = 74,785$, а сумарният SJR е $SJR = 3,102$.

По представените по тази процедура публикации са забелязани 48 цитирания (на 8 от публикациите), от които 1 цитиране в монография, 2 в книга, 5 броя в списания с SJR, 26 броя в списания с импакт фактор. Сумарният импакт фактор на цитиранията е $IF = 44,362$ & $SJR = 2,08$.

За пълнота на изложението ще спомена, че получените от автора нови и интересни научни резултати не са плод на самоцелни изследвания, а са установени и в рамките на 1 национален, 3 международни и два бюджетни проекта на ИМИ. Международните проекти са със Сръбската и Македонската АНИ, а нашият проект е към МОН – ФНИ. От приложения списък № 07-3 е видно, че доц. Панева-Коновска е изнесла 24 доклада на семинари и международни конференции у нас и в чужбина по тематиката на дисертацията. Това представлява безспорно международна апробация и признание за автора.

III. Оригиналност и значимост на резултатите

Доколкото ми е известно, резултатите в представените материали са нови и оригинални, т. е. не са публикувани преди това от други автори (освен тези, за които има позоваване – напр. част от резултатите от подготвителните Глава 1 на дисертационния труд и на монографията и резултатите за степенните редове).

Считам за съществени резултатите, свързани с неравенствата за разглежданите фамилии от функции, както и асимптотичните формули за „големи” стойности на параметрите, които са ключови за изследването на редове по тях.

Предвид високата цитируемост на резултатите, свързани с мултииндексните функции (публикувани първо в Доклади на БАН (2011) и Central European Journal of Physics (2013) и също така в [1]), считам за значими и резултатите в Глави 6 и 7, свързани с въведените $3m$ - параметрични функции. По мое мнение тези резултати, както и резултатите свързани с функции от Беселов тип (Гл. 1–6), представляват принос към теорията на специалните функции.

Резултатите от публикациите [9] – [11] и [15] (Глава 9 от дисертацията), с които се придава завършеност на проблематиката за свръхсходимост на редове по функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип имат теоретично значение и се отличават с вътрешна стройност.

По-общо: съществуващата пълна аналогия между получените резултати за сходимостта и свръхсходимостта на редове от Беселов и Митаг-Лефлеров тип показва наличието на теоретичен принос към теорията на редовете.

Освен това искам също да спомена, че голяма част от цитиранията, които засягат изследванията на поведението на функции от Митаг-Лефлеров тип и редовете по тях дискутирани в Гл. 5, 8 и 9 на дисертационния труд – сходимост, равномерна сходимост, свръхсходимост, са от специалисти, изследващи практически процеси, описани в приложни задачи. Те водят например до вълново уравнение с фрикционна памет, дифузионни уравнения и уравнение на Фокър–Планк–Смолуховски, темперирано вълново дифузионно уравнение и др., чиито аналитични решения се изразяват в явен вид с редове по такива функции. По мое мнение това показва практическа значимост на резултатите, посветени на изучаването на редовете в дисертацията.

В заключение, получени са многобройни нови резултати с приносен характер в областта на теорията на специалните функции, в която безспорно съществува международна конкуренция. Риман–Лиувилевите дробни интеграли и производни на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер са широко използвани в дробното смятане. Въобще Беселовите и Митаг-Лефлеровите функции имат приложение при решаването в явен вид на различни моделни ЧДУ, за които споменах по-горе. Изложението на дисертацията е стегнато и ясно, а оформянето е много добросъвестно.

Авторефератът на дисертацията отразява пълно и точно приносите на дисертанта.

Дисертационният труд удовлетворява критериите за придобиване на научната степен „доктор на науките” съгласно ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за прилагане на ЗРАСРБ на БАН и ИМИ.

Гореизложената положителна оценка ми дава достатъчно основание да препоръчам на Почитаемото Научно жури да присъди на доц. д-р Йорданка Добрева Панева-Коновска научната степен “доктор на науките” в Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, Професионално направление: 4.5. Математика, Научна специалност: „Математически анализ”.

София,
22. 01. 2018 г.

Рецензент:
(акад. Петър Попиванов)