

Рецензия на дисертационния труд
"Функции на Bessel и Mittag-Leffler и
обобщения"
за присъждането на научната степен
"Доктор на математическите науки "
на доцент д-р Йорданка Панева-Коновска

РЕЦЕНЗЕНТ:
проф. дмн Ралица Ковачева

Биографични данни:

Средното си образование доцент д-р Панева получава в Природоматематическата гимназия във Варна. Завършва математика в Шуменския Университет "Свети Константин Преславски" с успех отличен (5,63). След дипломирането си като математик работи като стажант асистент в същия университет, а след спечелен конкурс, и като асистент в катедрата по математически анализ. Следват години на специализации в Института по математика на БАН, в сектора по математическо моделиране и в сектора по комплексен анализ, с ръководители съответно доц. д-р Спас Ташев и проф. дмн Петър Русев. Във времето от 1996 до 1999 година е редовна аспирантка. Научен ръководител е проф. дмн Петър Русев; под негово ръководство защитава дисертация и получава званието доктор по математика. Темата на дисертационния труд е "Функции на Бесел, базисност и пълнота на изброими системи от функции и полиноми на Бесел". От 1997 година работи в Техническия Университет - София, първоначално като асистент а, след това, като доцент. В момента е доцент във ФПМИ на ТУ-София, и заместник-декан. Асоцииран член е на ИМИ - секция "Анализ, геометрия и топология." Била е научен ръководител на докторската дисертация на Янка Николова (защитена през 2014 г.) и на дипломната работа на Хрисимира Тасева (защитена 2017). Чела е лекции по анализ 2, комплексен анализ, теория на полето, интегрални трансформации и функционален анализ (за магистри). През 2017

г. тя публикува монография на тема "From Bessel to multiindex Mittag-Leffler functions: Enumerable seies, series in them and convergence", издние на World Scientific Publications. За тази монография е удостоена с наградата на Съюза на Учените в България.

Обща постановка на дисертационния труд:

Дисертационният труд е посветен на функциите на Bessel и на Mittag-Leffler - както класическите, така и техни мултииндексни обобщения. Въведените и разгледани обобщения са не само плод на математическа любознателност, а са обусловени от конкретни проблеми от астрономията, механиката, инженерни дисциплини, решаване на определен вид частни уравнения, вълново уравнение с фрикционна памет, уравнение на Фокър-Планд, и др. Заслужава да се отбележи, че всяко обобщение е придружено от конкретен случай, мотивиращ неговата поява.

Две са основните направления на изследванията. Първото обхваща изследвания, свързани с известни вече специални функции и анализирани и характеризирани на основни техни свойства. Изследвания в това направление са свързани с въвеждане на нови класове от специални функции, а именно функции от Беселов и от Митаг-Лефлеров тип - $2m$ и $3m$ -параметрични функции на Mittag-Leffler (или мултииндексни функции на Mittag-Leffler). Друг аспект е дробно смятане с мултииндексни функции на Mittag-Leffler - производни на Riemann-Луивил интеграли на Едрей-Кобер от дробен ред и други. Определя се асимптотиката на функциите на Bessel и неговите обобщения, както и на функции на Mittag-Leffler и обобщения - въведени от други автори, така и от самата авторка. Установяват се асимптотични свойства, представяния чрез цели функции, намират се връзки с някои класове специални функции.

Във второто направление се разглеждат безкрайни редове по функции на Bessel и по функции от Besselов тип, както и редове по функции на Mittag-Leffler и от Митаг-Лефлеров тип. Определят се областите на сходимост чрез доказване на аналози на класическата формула на Cauchy-Hadamard за сходимост на степенен ред, доказват се аналози на първата и втората теорема на Abel за степенни редове, както и аналози на теореми на Tauber, Fatou и Littlewood. Съществена част от дисертацията е посветена на феномена "свръхсходимост" при въведените безкрайни редове. Поставя се и въпросът за връзката между свръхсходимостта и наличието на празнини на Hadamard, като се доказват теореми в духа на класическата теорема за А. Островски за празнините. Доказани са аналози на класическия резултат на Островски за непродължимостта на степенните редове. Всички по-горе резултати са класически и идеи-

те за техните доказателство са приложими за широк кръг от безкрайни суми, в които базовите функции имат "подходяща" асимптотика - напр. редове на Фурие по полиноми, ортогонални спрямо регулярен носител, интерполационни полиноми от Нютонов тип и др. Доказателствата на доц. Панева се предхождат от прецизни изследвания и нетривиална подготовка, което прави възможно прилагането на класическите идеи на Hadamard, Abel, Tauber, Fatou, Littlewood и Ostrowski.

Представяне и анализ на постигнатите резултати

Дисертацията се състои от предговор, увод, 9 глави и техни параграфи. заключителни бележки, библиография, съдържаща 132 заглавия, заключителни бележки и азбучен указател. Общият обем е 205 страници.

Следва последователно представяне на съдържанието.

Глава 1 има подготвителен характер. Главен обект на разглежданията са функциите на Bessel J_ν от първи род,

$$J_\nu(z) = z^\nu \sum \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}$$

Очевидно J_ν е цяла функцията, когато параметърът ν е цяло число и има точка на разклонение в нулата, когато ν не е цяло. В първия случай авторката ги нарича "коефициенти на Bessel". Тъй като всички изследвания в дисертацията, свързани с функциите на Bessel от първи род се отнасят до функции с цели параметри, то авторката би трябвало да следва така въведената терминология, вместо общото "функции на Bessel". В по-нататъшните си разглеждания ще използваме термина "функции на Bessel" имайки пред вид само такива функции, при които параметърът е цяло число (т.е., коефициенти на Bessel).

В глава първа е изведена и формула за асимптотиката на "коефициентите на Bessel" (Теорема 1.6.1), резултат, стоящ в основата на следващи доказателства. Тази теорема е анонсирана през 1963 г. в монографията "Курс современного анализа" на Witteker и Watson (изд. Физ-мат. литература, Москва 1963). Дисертантката я доказва по собствен път.

$$J_n(z) = (z/2)^n (1 + Q_n(z)) / n!, \quad n \rightarrow \infty$$

kato

$$Q_n(z) = O(1/n), \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно върху компактните множества в комплексната равнина.

В **Глава 2** дисертантката дефинира безкрайни редове по функции на Bessel от първи род (т.н. "коефициенти на Bessel"). Доказан е аналог на класическия резултат на Cauchy-Hadamard за радиуса на сходимост на степенни редове, както и аналог на първата теорема на Abel (т.е., "ако безкрайният ред $\sum a_n z^n$ е сходящ в точката $z_0 \neq 0$, то той е равномерно сходящ върху компактните подмножества на кръга $D_0(|z_0|)$ - т.е. локално равномерно в този кръг (Abel).) По-нататък се въвеждат безкрайни редове по "нормирани" в един или в друг смисъл функции на Bessel $J_n^* = n!z^n J_n$ и $\tilde{J}_n = n!z^n J_n$. За "новите" редове се доказват теореми от тип на втората теорема на Abel, на теоремите на Tauber, Fatou, Littlewood (втора теорема на Abel: ако редът $\sum a_n z^n$ с радиус на сходимост $R > 0$ е сходящ в точката $z_0, |z_0| = R$, то той е непрекъснат радиално в z_0 ¹; теорема на Tauber, Littlewood: ако съществува границата $l := \lim_{z \in [0, z_0], z \rightarrow z_0} \sum a_n z^n$ и $a_n = R^n o(1/n)$ ($a_n = R^n O(1/n)$), то $l = \sum a_n z_0^n$.) При тези резултати на доц. Панева аналогията с класическите степенни редове не е пълна - в дисертацията при редовете по функции от тип на Mittag-Leffler локално равномерната сходимост от първата теорема на Abel е валидна за определен вид кръгова област $d\phi$, докато непрекъснатостта се отнася до област g_ϕ . За редовете по функциите $\tilde{J}_n = n!z^n J_n$ е доказана теорема от тип на Fatou.

Следващата **Глава 3** е посветена на феномена "свръхсходимост" при безкрайни редове с базисни функции $\tilde{J}_n = n!z^n J_n, n = 1, 2, \dots$. Доказан е аналог на класическия резултат на Александър Островски, според който "редът $\sum a_n z^n$ с радиус на сходимост $R = 1$ и допускащ аналитично продължение през някоя точка на единичния кръг е свръхсходящ тогава и само тогава, когато притежава празнини на Островски-Hadamard. Доказан е и аналог на теоремата на Островски за непродължителността на степенен ред с "достатъчно големи" празнини.

В четвърта глава **Глава 4** се доказват редица свойства на мултииндексните обобщения на функциите на Bessel от първи род. До тях се стига, най-общо казано, чрез последователно добавяне на нови параметри във функциите на Bessel (с цял параметър). Това са: двуиндексните обобщения $J_\nu^\mu, \mu > -1$ (т.н. функции на Bessel-Wright или още на Bessel - Meitland), три-четирипараметрични обобщения, съответно на Bessel - Meitland и $J_{\nu, \lambda}^\mu$ и на Lomell-Wright $J_{\nu, \lambda}^{\mu, m}$, както и хипер-Besselовата функция $J_{\nu_1, \dots, \nu_m}^m$. Ще отбележим, че последната обобщава функцията на Bessel от първи род при $m = 1$. Доказани са редица общи свойства, както и са разгледани някои специални функции свойства, както и е изведена формула за асимптотиката им.

¹ $\lim_{z \in [0, z_0], z \rightarrow z_0} \sum a_n z^n(z) \rightarrow \sum a_n z_0^n$,

В **Глава 5** се разглеждат дву-и три параметрични обобщения на класическата функция на Mittag-Leffler $E_\alpha(z) := \sum \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$, именно $E_{\alpha,\beta}(z) := \sum \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$, $E_{\alpha,n}^\gamma(z) := \sum \frac{(\gamma)! z^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)}$ (всеки път с добавяне на нов параметър). Така дефинираните функции са въведени съответно от Агарвал и Прабхакар. В дисертацията е проведен обстоен техен анализ, като основно внимание е обърнато на т.н. функция на Прабхакар $E_{\alpha,n}^\gamma(z) := \sum \frac{(\gamma)! z^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)}$, като е изразена в явен вид точната и' асимптотика. Основният резултат в тази глава, по мнение на рецензента, са формулите за асимптотиката на всички въведени обобщения, изведени в монографията на дисертантката.

В **Глава 6** се въвеждат мултииндексни обобщения на функции от тип на Mittag-Leffler $E_{1/\rho,\mu}$, където $1/\rho := (1/\rho_1, \dots, 1/\rho_m)$, $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_m)$. Последните, наричани още $2m$ -мултииндексни функции на Mittag-Leffler, могат да се разглеждат, както е отбелязано в дисертацията, и като "дробно индексни" аналози на Besselовите и на хиперBesselовите функции. След направения анализ се извеждат формули за асимптотиката им. Въведени са по-нататък и $3m$ -параметричните мултииндексни обобщения и са посочени техни свойства. Тук е мястото да отбележи, че горните обобщения са дело на дисертантката и са публикувани в монографията и'. Посочено е връзката между $3m$ -параметричните мултииндексни функции на Mittag-Leffler, от една страна, и функциите на Fox и Wright, от друга.

Глава 7 е посветена на дробното смятане в класа на мултииндексните функции. Пресметната е в явен вид дробната производна на Riemann-Liouville от ред λ на $3m$ -параметричните мултииндексни функции на Mittag-Leffler, като последната е изразена чрез самата $3m$ -параметрична мултииндексна функция. По-нататък са разгледани интегралите и производните на Ердей-Кобер и са изведени техни конкретни представяния.

В **Глава 8** се въвеждат безкрайни редове по функции от Besselов, както и от Mittag-Lefflerов тип. Изследва се радиусът на сходимост на тези редове и се доказват теореми от типа на Cauchy-Hadamard, Abel, Tauber, Littlewood и Fatou. Доказва се, че посочените редове са сходящи или не едновременно със степенния ред $\sum a_n z^n$.

Глава 9 разглежда въпроса за свръхсходимост на безкрайни редове по функции от тип на Bessel и на Mittag-Leffler. В хода на доказателствата се установяват интересни резултати и неравенства, които имат и самостоятелно значение. Авторката формулира и доказва оценки за безкрайна редица от парциални суми $\{S_{n_k}\}$ на степенен ред от горния вид, ако тази редица е равномерно сходяща в Чебишевата метрика върху окръжност, непресичаща се с единичния кръг. Теорема 9.2.1. Тази теорема

е в основата на разглежданията в глава 9.

Заклучителни забележки: Освен направената вече забележка относно използването на термина "функции на Бесел" вместо "Функции на Бесел с цял параметър", или "коефициенти на Бесел при прочита на дисертационния труд забелязах и няколко неточности. На страница 164 с $m_{\delta,n}$ е означена непрекъснатата норма на полинома S_{n_k} върху окръжността $\{z, |z| = \delta\}$. Би трябвало означението да бъде m_{δ,n_k} или $m_{\delta,k}$. От доказателството на съответната теорема (Th.9.2.1) не става ясно γ е произволна ректифицируема крива ли е или непременно окръжност извън единичния кръг. Позоваването на фигура 3.3.1. е подвеждаща, тъй като, както се вижда от доказателството, твърдението на теоремата е валидно за всяко число $R > 1$, такова, че окръжността $\{z, |z| = R\}$ не се пресича с γ . Авторката явно се е разминала с този по-общ резултат. На страниците 188 и 189 забелязах правописни грешки, именно "свтърхсходимост" и "най сетне" вместо "свърхсходимост" и "най - сетне" съответно. На страница 165 е записано $\lambda_{1,1}$ и $\lambda_{1,2}$; има се пред вид λ_1 и λ_2 . Освен това терминът "хармонична мярка върху окръжността..." се нуждае от уточнение, а именно: "хармонична мярка на областта... спрямо окръжността ..." Тези забележки на са, разбира се, съществени и не оказват влияние върху стойността на диасертационния труд.

Заклучение: Представеният дисертационен труд представлява един завършен високостойностен научен труд, който несъмнено ще бъде от голяма полза не само за специалистите в областта на специалните функции, но и изследователи в други области на математиката, напр. в областта на диференциалните уравнения и дробното смятане. Авторката показва отлично познаване на тематиката на дисертацията и съответният литературни източници. Доказателствата за оригинални, прецизни и издържани. Логически грешки не констатирах, използваните цитирания са коректни.

Науко-метрични данни: Пълният списък от публикации на доц. Панева, включени в дисертацията се състои от една монография, 1 автореферат и 15 научни статии (с единствен автор). Всички те са публикувани в специализирани международни списания и в рецензирани сборници от трудове на международни конференции. Цялата научна продукция (59 статии) има общ IF 8.292 от статии в научни специализирани списания и сумарен SJR 1,483 от международни конференции. Научните

трудове, включени в дисертацията, имат общо 48 цитирания, като общият IF е 44,32, а SJR - 2,080. Цялата научна продукция на доцент Панева има над 90 цитирания с IF е 74,32 а SJR - 3,102. H-index по "Scopus" е 6,00, а по "Publish and Perish 11.

Тези данни показват, че са налице препоръчителните критерии за присъждане на научната степен “доктор на математическите науки”.

По мое мнение, авторефератът и авторската справка отразяват правилно основните приноси в дисертацията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ:

Изложеното дотук ми дава основание да препоръчам настойчиво на Почитаемото жури да вземе положително решение за присъждане на научната степен "Доктор на математическите науки" на дисертантката Йорданка Панева-Коновска.

София, 17.02.2018 г.

Подпис на рецензента:
(д.м.н. проф. Ралица Ковачева)